微粒在旋转环内的奇异聚集行为的一维数学模型

徐 建 军

（中国科学院力学研究所）

1. 引言

在用 Chandler 环作人工血栓生长实验时，人们发现一个有趣的现象：血小板微粒总是在环内前弯月面处聚集而形成血栓[1,2]．继而有人作流动模拟实验，在旋转环内，注入普通牛顿流动及一定量固体示踪微粒，令环旋转，则出现一种奇异现象：这些随机分布的粒子随即从各处向前弯月面附近聚集，若再令环反转，这些粒子又会立刻“感到”这种方向的改变，而分散开来，向另一弯月面处重新聚合．显然，粒子的这种对弯月面或转动方向的“识别能力”是种纯粹的流体力学现象，值得作出理论的解析．

2. 旋转环内的流场分析

由于大环半径 $R \gg$ 圆管半径 r_0（见图 1），在距离弯月面转远处，可忽略离心力与端部效应不计．把流动看成 Poiseuille 流动与一平动迭加．因而流动速度分布为

$$u(r) \doteq 2u_m\left(1-\frac{r^2}{r_0^2}\right)-u_m=u_m\left(1-\frac{r^2}{r_*^2}\right) \tag{1}$$

其中

$$r_*=\frac{r_0}{\sqrt{2}}\approx 0.707r_0,$$

$$u_m=\Omega R\ (\text{轴线转动速度}) \tag{2}$$

由式（1）看出环内流场可分成内、外两部分：1）内管部分（$0\leqslant r\leqslant r_*$），$u\geqslant 0$ 流速与转动方向相反；2）外管部分（$r_*\leqslant r\leqslant 1$）．$u\leqslant 0$ 流速与转动方向相同．在两个弯月面处，两部分流线相联结，构成一个大迴流．

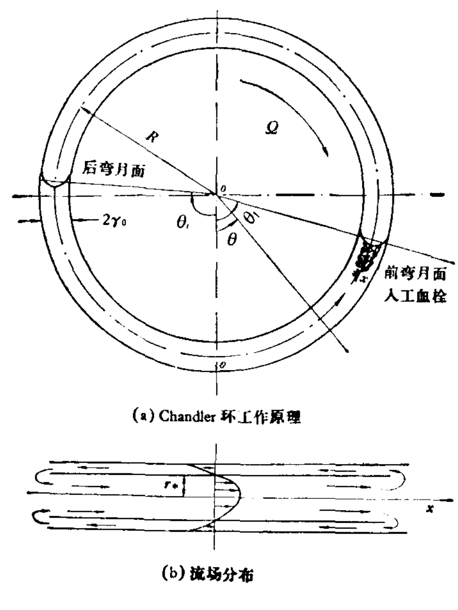

图 1　旋转环示意图

3. 环内固体粒子受力分析

环内将主要受三种力作用：1）重力（包括浮力）$m\boldsymbol{g}$；2）Stoke 粘性阻力 $(\boldsymbol{u}_f-\boldsymbol{v})6\pi a\mu$；3）由于流场是非均匀的剪切场，从而产生的一种侧向力 $\boldsymbol{F}_L$，其作用是使粒子向轴线附近“箍缩”．关于这第三种侧向力 $\boldsymbol{F}_L$ 的

本文于 1981 年 7 月收到．

存在与意义．已有许多理论与实验工作进行了证实．这种力是在 Re＜1 时出现的特定现象[3-14]．此处 $\boldsymbol{u}$，μ 分别为流体速度及粘性系数；$\boldsymbol{v}$，m，a 分别表示粒子速度、质量、半径．

4. 粒子运动的一维数学模型

基于上述粒子受力分析，我们可建立如下简化力学模型：

1）由于 $\boldsymbol{F}_L$ 的存在，可认为粒子将统计地集中于内管部分（$0 < r < r_*$）．

2）由于 Stokes 力只同粒子与流体相对速度有关，假设内管部分流动均匀，流速取其平均值（$u_m/2$）．

3）粒子速度指向轴向．

从而导出粒子运动方程

$$m\frac{dv}{dt}+\left(\frac{u_m}{2}-v\right)6\pi a\mu-mg\sin\theta=0 \tag{3}$$

其中

$$v=R\frac{d\theta}{dt} \tag{4}$$

为粒子沿轴线 $\boldsymbol{x}$ 方向的平均速度，无量纲化后便导出

$$\lambda\frac{d^2\theta}{d\tau^2}+\frac{d\theta}{d\tau}+\left(\varepsilon\sin\theta-\frac{1}{2}\right)=0 \tag{5}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}&\lambda=\Omega v_s/g, \quad \varepsilon=v_s/\Omega R\\&v_s=mg/6\pi a\mu, \quad \tau=\Omega t\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

v_s 为沉降速度．我们可在相平面（θ，φ）讨论非线性方程（5）．令

$$\frac{d\theta}{d\tau}=\varphi \tag{7}$$

从而

$$\frac{d\varphi}{d\theta}=\frac{\frac{1}{2}-\varepsilon\sin\theta-\varphi}{\lambda\varphi} \tag{8}$$

由式（8）推出方向场（$d\theta$，$d\varphi$）有两条等倾线 1）L_1：$\varphi=0$ 此时 $d\varphi/d\theta=\infty$； 2）L_2：$\varphi=\frac{1}{2}-\varepsilon\sin\theta$ 此时 $d\varphi/d\theta=0$．因此，我们可区分两种情形：

i）$\varepsilon\geqslant\frac{1}{2}$（对应较大粒子）：这时 L_1 与 L_2 相交于两个奇点：

$$\left.\begin{aligned}&\theta=\theta_1^*=\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)>0\\ \text{和}\quad &\theta=\theta_2^*=\pi-\sin^{-1}\left(\frac{1}{2\varepsilon}\right)\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

分析表明 θ_2^* 为不稳定鞍点．θ_1^* 为稳定螺线点．由于 $\theta_1^*>0$，所以粒子总是从各处沿积分曲线走向前弯月面附近的 θ_1^* 聚集（见图 2）．

ii) $\varepsilon < \frac{1}{2}$(对应极小微粒)：这时 L_1 与 L_2 无交点，相平面内无奇点．这时相平面的积分曲线将走向 $\theta = \infty$．这表明当流体充满圆环时，粒子将在环内作定向迴流运动．但是如果流体没有充满环，这时粒子尚有界面约束条件

$$\theta_r < \theta < \theta_f$$

因此粒子将沿相平面上的积分曲线走向 $\theta = \theta_f$．并停留在前弯月面处(见图 3)．

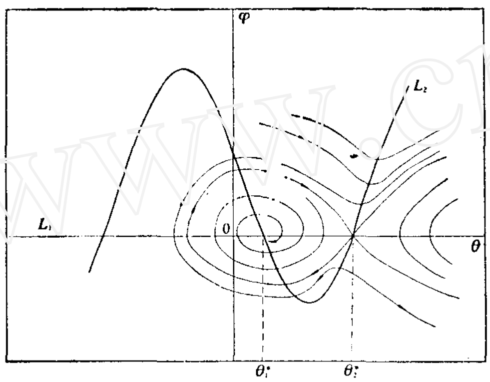

图 2　$\varepsilon > 0.5$ 时，相平面上积分曲线分布

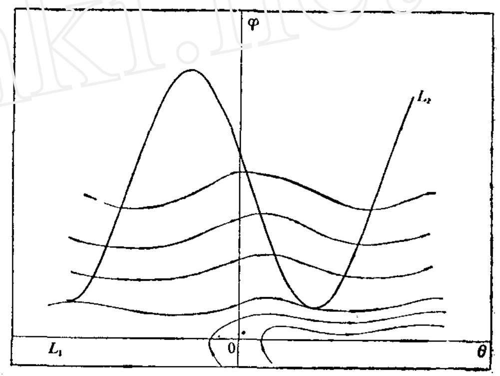

图 3　$\varepsilon < 0.5$ 时，相平面上积分曲线分布

由上可知，旋转环内粒子对前弯月面的"识别能力"或粒子总是追寻前弯月面聚集的本质，对较大粒子而言，是在前弯月面附近存在一稳定螺线点；对较小粒子而言，是由于前弯月面对内管流动起堵截作用．

作为数值例子：取 $\rho_s = 3.08/cm^3$ 为粒子速度 $\mu = 1.0 \times 10^{-2}$ 泊，$R = 8.1cm$、$\Omega = 10r.p.m = 1.047$ 弧度/S，我们算出 $\varepsilon = \left(\frac{a}{a_*}\right)^2$，$a_* = 0.0036cm$ 故当 $a = 25.45\mu m$ 时，$\varepsilon = 0.5$，$\theta_1^* = \frac{\pi}{2}$，更一般的结果见表 1 及图 4．

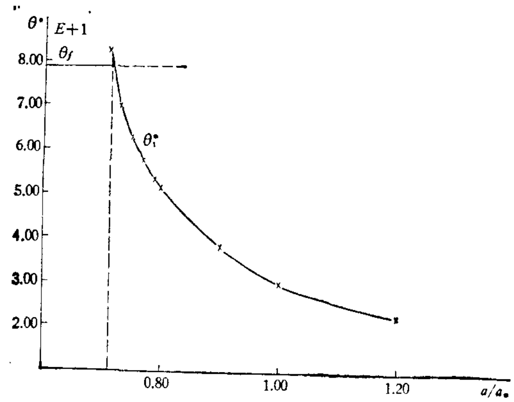

图 4　不同粒度颗粒聚集位置 θ^*(度)

表 1

a/a_*	0.71	0.73	0.75	0.77	0.79	0.80	0.90	1.0	1.2
$a(\mu m)$	25.56	26.28	27.0	27.72	28.44	28.80	32.40	36.00	43.20
ε	0.5041	0.5329	0.5625	0.5929	0.6241	0.640	0.810	1.00	1.44
θ_1^*	82.7°	69.8°	62.7°	57.5°	53.2°	51.4°	38.1°	30°	22.3°

参 考 文 献

[1] Chandler, A. B., In Vitro thrombotic Coagulation of the blood, a method for producing a thrombus Lab Invest 7: 110—114 (1958).
[2] 钱民全，吕恩武，旋转带环中血栓形成的实验研究，力学所研究报告.
[3] Poiseuille, J. L. M. *Ann Sci.*, Nat. 5 (1836), 111.
[4] Goldsmith, H. L. & Mason, S. G., *J. Coll. Sci.*, **17** (1962), p. 448.
[5] Rubipow, S. I. & Keller, J. B., *J. Fluid Mech.*, **14** (1961) 447.
[6] Saffman, P. G., *J. Fluid Mach.*, **22** (1963) 385.
[7] G. Segre & *Siberberg, A.*, *J. Fluid Mech.*, **14**, (1962), p. 115.
[8] Lighthill, M., J., *J. Fluid Mech.*, **52** (1972), p. 475.
[9] Gardner, R. A., *J. Lab. Clin. Med*, 84, 4(1974), p. 494.
[10] Halow, J. S., Wills, G. B., *AICHE. J.*, **16** (1970), 281.
[11] Ho, B. P., Leal, L. G., *J. F. M.*, **65** (1974), 365, *J. F. M.* **76** (1976), 783.
[12] Hinch, E. J., Leal, L. G., *J. F. M.*, **92** (1979) 591.
[13] Vassonr, P., Cox, R. G., *J. F. M.*, 78 (1976), 385.
[14] Wohl, P. R., Rubinow, S. I., *J. F. M.*, **62** (1974), 185.

ONE-DIMENSIONAL MATHEMATICAL MODEL ON PECULIAR GATHERING BEHAVIOUR OF PARTICLES IN A ROTATING LOOP

Xu Jianjun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

The gathering behaviour of the particles embeded in the fluid of a rotating loop such as chandler loop is discussed theoretically in the paper.

A simplified modal is given, the character of the integral curves of basic equation is discussed on the phase plane. The result shows that for a certain condition, a stable spiral point near the front crescent surface of the loop exists and particle gathering.