球形粒子的热致迁移及各跳跃系数对适应系数的依赖关系

沈　青

（中国科学院力学研究所）

提要　本文讨论有温度梯度场的稀薄气体（$K_n \ll 1$ 时）中圆球所受的热泳力问题. 在内区设分子在壁面作 Maxwell 类型反射求解 B-K-W 方程,与外区的 Stokes 方程和 Laplace 方程的解匹配. 滑移系数 C_m，热蠕动系数 C_s 和温度跳跃系数 C_t，做为待定量在内区解的一阶近似中定出. 所得的热泳力与实验相符,计算所得的 C_m，C_s 和 C_t 之值及对适应系数 α 的依赖关系与用变分等方法对平板问题所得结果相符.

一、引　言

从经典流体力学出发，在静止的有温度梯度的气体中放置的粒子不经受力的作用. 但当粒子足够小,以致 K_n 数足够大时($K_n = \lambda/2a$，λ：气体平均自由程，a：粒子半径)，粒子在温度梯度场中会受到力的作用，由高温区被推向低温区. 气溶胶粒子正是这种情况(参见[1]). 温度场中粒子的这种输运称为热泳或热致迁移(thermophoresis). 热泳现象在气溶胶研究和工业生产中有广泛的应用. 如,为了除去 1μ 以下的粒子，热除尘器最为有效,而为收集气溶胶中的小粒子,应用热泳原理的取样器被广泛使用. 热泳现象还引起石油在精炼过程中在热交换器上的结垢,等等.

在自由分子流领域，即当 $K_n \gg 1$ 时，Waldmann[2] 对热泳现象进行了研究. 当 $K_n \ll 1$ 时，Brock[3] 用滑移条件和温度跳跃条件求解连续介质方程，即速度场的 Stokes 方程和温度场的 Laplace 方程,得到了热泳力在滑流区的表达式. Talbot 等人[4] 发现,当选用合理的速度滑移系数 C_m，热蠕动系数 C_s 和温度跳跃系数 C_t 时，[3]的结果与以前的实验数值[5,6] 和他们新得到的实验数据相符较好,且可以用为连接连续介质和自由分子流的半经验公式.

我们用匹配渐近展开法，通过把内区分子运动论的解和外区连续介质的解衔接来处理这一问题,讨论适用于 $K_n \ll 1$ 的情况. 在外区如[3]一样，用 Stokes 方程与 Laplace 方程. 在内区即 Knudsen 层中，从 Bolzmann-Krook-Welander 方程[7,8]（以下简称 B-K-W 方程)出发，并在壁面取分子作 Maxwell 类型反射的边界条件，在无穷远处与外解匹配，将跳跃系数 C_m，C_s，C_t 等作为待定系数从解 B-K-W 方程的一阶近似中定出. 所得的 C_m，C_s，C_t 的数值结果及对热适应系数 α 的依赖关系与 Loyalka 等[9,10] 及 Ивченко 和

本文于 1982 年 2 月收到.

Яламов[11] 等对平板问题用变分或其它方法所得的结果相符.

二、线化的 B-K-W 方程与 Maxwell 边界条件

在内区,我们从 B-K-W 方程出发

$$v_{m_1}\partial f/\partial x_1 + v_{m_2}\partial f/\partial x_2 + v_{m_3}\partial f/\partial x_3 = \nu(N/N_0)(f_e - f) \tag{1}$$

其中 f 为速度分布函数,v_{m_i} 为分子速度,N 为分子数密度,ν 为修正了的碰撞频率,$\nu = \gamma c_{mp_0}/\lambda$, $c_{mp_0} = \sqrt{2RT_0}$, γ 为数值因子,当问题中动量传递占主导时 $\gamma = \sqrt{\pi}/1.996$,当能量传递占主导时取 $\gamma = \sqrt{\pi}/2.994$,以分别得到正确的粘性系数 μ 和热传导系数 k_g 的表达式: $\mu = 0.499\rho\bar{c}\lambda$, $k_g = (3/2)(5R/2)(0.499\rho\bar{c}\lambda)$, R 为气体常数,$\bar{c}$ 为平均速度; f_e 为平衡 Maxwell 分布

$$f_e = [N/(\sqrt{\pi}\, c_{mp})^3]\exp[-(\boldsymbol{v}_m - \boldsymbol{U})^2/c_{mp}^2] \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{U}$ 为宏观流速. 在球面上取 Maxwell 类型边界条件,分子在表面无聚集和吸收.

当温度梯度为小量或当流速缓慢时,f 与定常平衡态的偏离为小量,可以引入扰动分布函数 ϕ

$$f = (N_0/c_{mp_0}^3)F_0(1 + \phi) \tag{3}$$

其中 $F_0 = \pi^{-\frac{3}{2}}\exp(-\xi^2)$, $\xi_i = v_{m_i}/c_{mp_0}$. 对于球坐标 r, θ, φ (r 对 a 无量纲化) 和 Knudsen 变量 η

$$r = 1 + K_\eta \tag{4}$$

其中 $K = (2/\gamma)K_n$, 在 [12] 中已给出线化 B-K-W 方程和 Maxwell 边界条件

$$\begin{aligned}\xi_r \frac{\partial\phi}{\partial\eta} + \phi + \frac{K}{1+K\eta}\Big[&-\sqrt{1-\beta^2}\,\xi_\theta\frac{\partial\phi}{\partial\beta} + (\xi_\theta^2 + \xi_\varphi^2)\frac{\partial\phi}{\partial\xi_r} \\ &+ \Big(\frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\xi_\varphi^2 - \xi_r\xi_\theta\Big)\frac{\partial\phi}{\partial\xi_\theta} - \Big(\xi_r\xi_\varphi + \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}}\xi_\theta\xi_\varphi\Big)\frac{\partial\phi}{\partial\xi_\varphi}\Big] \\ &= 2(\xi_r u_r + \xi_\theta u_\theta) + n + \Big(\xi^2 - \frac{3}{2}\Big)\tau\end{aligned} \tag{5}$$

对于 $\xi_r > 0$,

$$\phi(\xi_\theta, \xi_r)|_{\eta=0} = (1-\alpha)\phi(\xi_\theta, -\xi_r)|_{\eta=0} + \alpha[n_w + (\xi^2 - 3/2)\tau_w] \tag{6}$$

$$u_r|_{\eta=0} = \int \xi_r\phi F_0 d\boldsymbol{\xi} = 0 \tag{7}$$

其中 $\beta \equiv \cos\theta$, $N = N_0(1+n)$, $T = T_0(1+\tau)$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{U}/c_{mp_0}$,

且

$$n = \int \phi F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{8}$$

$$(1+n)\boldsymbol{u} = \int \boldsymbol{\xi}\phi F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{9}$$

$$\frac{3}{2}(n+\tau) + u^2 = \int \xi^2\phi F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{10}$$

$$p = n + \tau \tag{11}$$

在 Knudsen 层中,我们将 ϕ 对小参数 K 作展开求解(5),在球面即 $\eta = 0$ 处满足边界条件(6),(7); 当 $\eta \to \infty$ 时,令解与外区的解匹配.

三、热泳问题外区的解

考察置于静止而有温度梯度的气体中的球形粒子，设气体温度为 $T_g = T_0(1+\tau_g)$，粒子温度为 $T_p = T_0(1+\tau_p)$. τ_g, τ_p 满足 Laplace 方程，壁面热流连续和温度跳跃条件，且 τ_g 满足无穷远处温度梯度 ∇T 为常值的条件

$$\nabla^2\tau_g = 0 \tag{12}$$

$$\nabla^2\tau_p = 0 \tag{13}$$

$$k_g(\partial\tau_g/\partial r)_{r=a} = k_p(\partial\tau_p/\partial r)_{r=a} \tag{14}$$

$$\tau_g - \tau_p = C_t\lambda(\partial\tau_g/\partial r),\quad r = a \text{ 时} \tag{15}$$

$$\tau_g \to (g/a)r\cos\theta,\quad r\to\infty \text{ 时} \tag{16}$$

其中 $g = |\nabla T|a/T_0$，C_t 为温度跳跃系数，在求解中定出，k_g, k_p 为气体和粒子的热传导系数. 将 (12)、(13) 在球坐标中写出，用分离变量法求解，容易得到满足 (14)、(15)、(16) 的解为

$$\tau_g = \left(1 + \frac{k + C_t\lambda/a - 1}{1 + 2k + 2C_t\lambda/a}\frac{a^3}{r^3}\right)\frac{r}{a}g\cos\theta \tag{17}$$

$$\tau_p = \frac{3k(r/a)g\sin\theta}{1 + 2k + 2C_t\lambda/a} \tag{18}$$

其中 $k = k_g/k_p$. 在 (18) 中令 $r = a$，得到壁面温度为

$$\tau_w = \frac{3k}{1 + 2k + 2C_t\lambda/a}g\sin\theta \tag{19}$$

速度场满足 Stokes 方程和连续方程

$$\nabla^2\boldsymbol{u} = (1/\mu)\nabla p \tag{20}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{u} = 0 \tag{21}$$

以及壁面上的速度滑移和热蠕动条件

$$u_\theta = C_m\lambda\left[r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\theta}{r}\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right] + \frac{C_s\mu}{a\rho T_0}\frac{\partial T_g}{\partial\theta},\quad r = a \tag{22}$$

和壁面上的法向速度为零和∞处速度为零的条件

$$u_r|_{r=a} = 0;\ u_r\to 0,\ u_\theta\to 0,\ r\to\infty \text{ 时} \tag{23}$$

(22) 中 C_m 为速度滑移系数，C_s 为热蠕动系数，均待定. 利用温度场的结果，得到 u_r, u_θ 和 p 的解为

$$u_r = A(a^3/r^3 - a/r)\cos\theta \tag{24}$$

$$u_\theta = (A/2)(a^3/r^3 + a/r)\sin\theta \tag{25}$$

$$p = -A\mu(a/r^2)\cos\theta \tag{26}$$

其中
$$A = -(3C_s\mu g/\rho a)\frac{k + C_t\lambda/a}{(1 + 3C_m\lambda/a)(1 + 2k + 2C_t\lambda/a)} \tag{27}$$

用所得 u_r, u_θ 和 p 代入应力表达式，并应用动量定理于以粒子中心为球心而半径较粒子为大的球面所包含的流体，可以得到粒子所受的总力之值为

$$F = -12\pi C_s(\mu^2 g/\rho)\frac{k + C_t\lambda/a}{(1 + 3C_m\lambda/a)(1 + 2k + 2C_t\lambda/a)} \tag{28}$$

为了给内区的解提供无穷远处的渐近条件，在解(17)、(18)、(24)—(26)中将 u_r，u_θ 和 r 分别用 $C_{mp_0}=\sqrt{2RT_0}$ 和 a 无量纲化，同时将 λ/a 写为 $2K_n=\gamma K$，并以 K 为小参数作幂次展开而保留主要项，可得到 τ_g、u_θ、u_r、p 和 τ_w 的渐近表达式

$$\tau_{g渐近}=\frac{3k}{1+2k}g\cos\theta+\left(\frac{3}{1+2k}\eta+\frac{3\gamma C_t}{(1+2k)^2}\right)g\cos\theta K \tag{29}$$

$$u_{\theta渐近}=-\frac{3\gamma}{\sqrt{\pi}}C_s\frac{k}{1+2k}g\sin\theta\cdot K+O(K^2) \tag{30}$$

$$u_{r渐近}=\frac{6\gamma}{\sqrt{\pi}}C_s\frac{k}{1+2k}\eta g\cos\theta\cdot K^2+O(K^3) \tag{31}$$

$$p_{渐近}=\frac{3\gamma}{\sqrt{\pi}}C_s\frac{k}{1+2k}g\cos\theta\cdot K^2+O(K^3) \tag{32}$$

$$\tau_w=\frac{3k}{1+2k}g\cos\theta-\frac{6k}{(1+2k)^2}\gamma C_t g\cos\theta\cdot K \tag{33}$$

四、Knudsen 层中的解．C_s，C_t 的确定

扰动速度分布函数 ϕ 可按 K 的幂次展开如下

$$\phi=\frac{k}{1+2k}g(\phi^{(0)}+K\phi^{(1)}+K^2\phi^{(2)}+\cdots) \tag{34}$$

宏观量 τ_g，u 等也按 K 的幂次展开，写为

$$\begin{aligned}\tau_g&=\frac{k}{1+2k}g(\tau_g^{(0)}+K\tau_g^{(1)}+\cdots)\\ u_\theta&=\frac{k}{1+2k}g(u_\theta^{(0)}+Ku_\theta^{(1)}+\cdots)\\ u_r&=\frac{k}{1+2k}g(u_r^{(0)}+Ku_r^{(1)}+\cdots)\end{aligned} \tag{35}$$

将(34)代入方程(5)，收集 K 的零阶项，得到 $\phi^{(0)}$ 的方程为

$$\xi_r\frac{\partial\phi^{(0)}}{\partial\eta}+\phi^{(0)}=2(\xi_r u_r^{(0)}+\xi_\theta u_\theta^{(0)})+n^{(0)}+\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)\tau^{(0)} \tag{36}$$

由(35)及(29)—(33)可见：$u_{\theta}^{(0)}{}_{渐近}=0$，$u_r^{(0)}{}_{渐近}=0$，$\tau^{(0)}{}_{渐近}=-n^{(0)}{}_{渐近}=3\cos\theta$. 容易看出

$$\phi^{(0)}=3(\xi^2-5/2)\cos\theta \tag{37}$$

可使上述渐近条件、宏观条件(8)—(11)和壁面条件(6)、(7)均得到满足.

将所得的零阶解代入(34)，再代入基本方程(5)及壁面条件和宏观条件，收集 K 的一阶项，得到 $\phi^{(1)}$ 的方程和应满足的条件

$$\xi_r\frac{\partial\phi^{(1)}}{\partial\eta}+\phi^{(1)}=3\left(\xi^2-\frac{5}{2}\right)\xi_\theta\sin\theta+2\xi_\theta u_\theta^{(1)}+n^{(1)}+\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)\tau^{(1)} \tag{38}$$

对于 $\xi_r>0$，

$$\phi^{(1)}(\xi_\theta,\xi_1)=(1-\alpha)\phi^{(1)}(\xi_\theta,-\xi_r)+\alpha\left[n_w^{(1)}+\left(\xi^2-\frac{3}{2}\right)\tau_w^{(1)}\right] \tag{39}$$

$$u_r^{(1)}|_{\eta=0} = 0$$

$$u_r^{(1)} = \int \xi_r \phi^{(1)} F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{40}$$

$$u_\theta^{(1)} = \int \xi_\theta \phi^{(1)} F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{41}$$

$$n^{(1)} = \int \phi^{(1)} F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{42}$$

$$\frac{3}{2}(n^{(1)} + \tau^{(1)}) = \int \xi^2 \phi^{(1)} F_0 d\boldsymbol{\xi} \tag{43}$$

$$p^{(1)} = n^{(1)} + \tau^{(1)} \tag{44}$$

其中壁面条件中的温度 $\tau_w^{(1)}$，根据(33)应为

$$\tau_w^{(1)} = -[6\gamma/(1+2k)]C_t \cos\theta \tag{45}$$

为简单计，我们记 $C_t' = [6\gamma/(1+2k)]C_t$，并引入 $n_w^{(1)} = \gamma_w^{(1)}\cos\theta$，从而可将边界条件(39)写为

对于 $\xi_r > 0$，

$$\phi^{(1)}(\xi_\theta, \xi_r) = (1-\alpha)\phi^{(1)}(\xi_\theta, -\xi_r) + \alpha[\gamma_w^{(1)} - (\xi^2 - 3/2)C_t']\cos\theta \tag{39'}$$

方程(38)满足(39)的解可以写出

$$\begin{aligned}\phi_{\xi_r>0}^{(1)} = &\left\{[(1-\alpha)/\xi_r]\int_0^\infty\left[3\left(\xi^2 - \frac{5}{2}\right)\sin\theta\cdot\xi_\theta + 2\xi_\theta u_\theta^{(1)}(\zeta) + n^{(1)}(\zeta)\right.\right.\\ &\left.\left.+ (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)}(\zeta)\right]\exp(-\zeta/\xi_r)d\zeta + \alpha[\gamma_w^{(1)} - (\xi^2 - 3/2)C_t']\cos\theta\right\}e^{-\frac{\eta}{\xi_r}}\\ &+ \frac{1}{\xi_r}\int_0^\eta[3(\xi^2 - 5/2)\sin\theta\cdot\xi_\theta + 2\xi_\theta u_\theta^{(1)}(\zeta) + n^{(1)}(\zeta) + (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)}(\zeta)]\\ &\cdot\exp(-|\eta - \zeta|/\xi_r)d\zeta,\\ \phi_{\xi_r<0}^{(1)} = &\frac{1}{|\xi_r|}\int_\eta^\infty[3(\xi^2 - 5/2)\sin\theta\cdot\xi_\theta + 2\xi_\theta u_\theta^{(1)}(\zeta) + n^{(1)}(\zeta) + (\xi^2 - 3/2)\tau^{(1)}(\zeta)]\\ &\cdot\exp(-|\eta - \zeta|/|\xi_r|)d\zeta\end{aligned} \tag{46}$$

(46)是形式解，将其代入各宏观条件(40)—(44)得到宏观量的积分方程，解这些方程可以得到 $\boldsymbol{\tau}$, $\boldsymbol{u}$ 等的解和 C_s, C_t 之值.

为了确定 C_s，我们将(46)代入(41)，从而得到关于 $u_\theta^{(1)}$ 的独立的积分方程

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}\,u_\theta^{(1)}(\eta) = &-\frac{3}{2}\alpha\sin\theta\cdot\left(J_2(\eta) - \frac{1}{2}J_0(\eta)\right) + \int_0^\infty J_{-1}u_\theta^{(1)}(\zeta)d\zeta\\ &+ (1-\alpha)\int_0^\infty J_{-1}^* u_\theta^{(1)}(\zeta)d\zeta\end{aligned} \tag{47}$$

其中

$$J_n(\eta) = \int_0^\infty t^n \exp(-t^2 - \eta/t)dt \tag{48}$$

$$J_n \equiv J_n(|\eta - \zeta|)$$

$$J_n^* \equiv J_n(\eta + \zeta)$$

根据(30)，(35)，$u_\theta^{(1)}$ 的渐近表达式为

$$u_{\theta\,\text{渐近}}^{(1)} = -(3\gamma/\sqrt{\pi})C_s\sin\theta \tag{49}$$

因而可以将 $u_\theta^{(1)}$ 写为如下形式

$$u_\theta^{(1)} = [-(3\gamma/\sqrt{\pi})C_s + u_\theta^*(\eta)]\sin\theta \tag{50}$$

其中 $u_\theta^*(\eta)$ 为 $\eta\to\infty$ 时趋于零的函数，可以将其展为 $J_n(\eta)$ 的多项式

$$u_\theta^*(\eta) = \sum_{n=0}^{m} a_n^* J_n(\eta) \tag{51}$$

将(50)代入(47)，我们得到

$$\sum_{n=0}^{m}\sqrt{\pi}\, a_n^* J_n(\eta) = -\frac{3}{2}\alpha\left(J_2(\eta) - \frac{1}{2}J_0(\eta)\right) + \alpha\cdot\frac{3\gamma}{\sqrt{\pi}}J_0(\eta)C_s + \sum_{n=0}^{m} a_n^*\left[\int_0^\infty J_{-1}\cdot J_n(\zeta)d\zeta + (1-\alpha)\int_0^\infty J_{-1}^* J_n(\zeta)d\zeta\right] \tag{52}$$

为了求解 C_s 与 a_n^*，分别用 $\eta^l(l=0,1,\cdots,m+1)$ 乘以(52)，再对 η 从 0 到∞积分，可得线代数方程组

$$(3\alpha\gamma/\sqrt{\pi})I_{l0}C_s + \sum_{n=0}^{m}[-\sqrt{\pi}I_{ln} + H_{ln}^{-1} + (1-\alpha)G_{ln}^{-1}]a_n^* = \frac{3}{2}\alpha\left(I_{l2} - \frac{1}{2}I_{l0}\right),\quad 0\leqslant l\leqslant m+1 \tag{53}$$

其中 $I_{l0}, H_{ln}^{-1}, G_{ln}^{-1}$ 为定积分，其表达式与算法已在[12]中给出．对于 $m\geqslant 4$，(53)的解准确到三位有效数不再变化，我们将不同 α 值下计算所得的 C_s 的结果列于表 1．计算时为针对传热为重要的本情况，碰撞频率的修正因子取 $\gamma=\sqrt{\pi}/2.994$.

表 1 (均作了 $\gamma=\sqrt{\pi}/2.994$ 修正)

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
C_s(本文)	.791	.833	.874	.915	.955	.994	1.033	1.072	1.110	1.147
C_{sL}[10]	.790	.830	.870	.910	.950	.990	1.030	1.069	1.109	1.15
C_{sN}[11]	.793	.835	.878	.920	.962	1.004	1.045	1.087	1.128	1.17

为了确定 C_t，将(46)代入(42)，(43)，得到关于 $\tau^{(1)}$ 和 $n^{(1)}$ 的积分方程

$$\sqrt{\pi}\,n^{(1)}(\eta) = \alpha\gamma_w^{(1)}\cos\theta\cdot J_0(\eta) - \alpha C_t'\cos\theta\left(J_2(\eta)-\frac{1}{2}J_0(\eta)\right) + \int_0^\infty\left[J_{-1}n^{(1)}(\zeta) + \left(J_1 - \frac{1}{2}J_{-1}\right)\tau^{(1)}(\zeta)\right]d\zeta + (1-\alpha)\int_0^\infty\left\{J_{-1}^* n^{(1)}(\zeta) + \left[J_1^* - \frac{1}{2}J_{-1}^*\right]\tau^{(1)}(\zeta)\right\}d\zeta \tag{54}$$

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2}n^{(1)}(\eta) + \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\tau^{(1)}(\eta) = -\alpha C_t'\cos\theta\cdot J_0(\eta) + \int_0^\infty J_{-1}\tau^{(1)}(\zeta)d\zeta + (1-\alpha)\int_0^\infty J_{-1}^*\tau^{(1)}(\zeta)d\zeta \tag{55}$$

根据(29)、(32)和(44)可以写出 $\tau^{(1)}$ 和 $n^{(1)}$ 的渐近表达式

$$\tau^{(1)}{}_{\text{渐近}} = \frac{1}{k}\left(3\eta + \frac{1}{2}C_t'\right)\cos\theta, \qquad n^{(1)}{}_{\text{渐近}} = \frac{1}{k}\left(-3\eta - \frac{1}{2}C_t'\right)\cos\theta$$

因此可以将 $\tau^{(1)}$，$n^{(1)}$ 写为

$$\tau^{(1)}(\eta) = \frac{1}{k}\left(3\eta + \frac{1}{2}C_t' + \tau^*(\eta)\right)\cos\theta \tag{56}$$

$$n^{(1)}(\eta) = \frac{1}{k}\left(-3\eta - \frac{1}{2}C_t' + n^*(\eta)\right)\cos\theta \tag{57}$$

其中 $\tau^*(\eta)$，$n^*(\eta)$ 为 $\eta\to\infty$ 时趋近于零的函数．将(56)、(57)代入(54)、(55)，经过化简可得

$$\begin{aligned}
&\alpha\gamma_w' J_0(\eta) + 3\alpha\gamma C_t\left(\frac{3}{2}J_0(\eta) - J_2(\eta)\right) + \int_0^\infty \left[\left(J_1 - \frac{J_{-1}}{2}\right)\right. \\
&\quad \left. + (1-\alpha)\left(J_1^* - \frac{J_{-1}^*}{2}\right)\right]\tau^*(\zeta)d\zeta + \sqrt{\pi}\, n^*(\eta) \\
&\quad + \int_0^\infty [J_{-1} + (1-\alpha)J_{-1}^*]n^*(\zeta)d\zeta \\
&= -(2-\alpha)\left[3J_3(\eta) - \frac{9}{2}J_1(\eta)\right]
\end{aligned} \tag{58}$$

$$\begin{aligned}
&3\alpha\gamma C_t J_0(\eta) + \frac{\sqrt{\pi}}{2}n^*(\eta) + \frac{3\sqrt{\pi}}{2}\tau^*(\eta) - \int_0^\infty J_{-1}\tau^*(\zeta)d\zeta \\
&\quad - (1-\alpha)\int_0^\infty J_{-1}^*\tau^*(\zeta)d\zeta = 3(2-\alpha)J_1(\eta)
\end{aligned} \tag{59}$$

其中代替 $\gamma_w^{(1)}$ 引入了新的待定量 $\gamma_w' = k\gamma_w^{(1)} - 6\gamma\dfrac{k}{1+2k}C_t$．用与以上相同的方法，即将 $\tau^*(\eta)$、$n^*(\eta)$ 展开为 $J_n(\eta)$ 的多项式，并用求矩法将(58)、(59)变换为线性代数方程组，可得 C_t，γ_w' 的解．我们将不同 α 值下求得的 C_t 值列于表 2．同样，碰撞频率的修正因子 γ 在本情况下取 $\gamma=\sqrt{\pi}/2.994$．

表 2　（均作了 $\gamma=\sqrt{\pi}/2.994$ 修正）

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
C_t（本文）	36.3	17.5	11.21	8.05	6.13	4.85	3.92	3.21	2.65	2.20
C_{tL}[9]	36.2	17.4	11.14	7.99	6.08	4.80	3.88	3.18	2.63	2.18
C_{tW}[8]	36.0	17.2	10.95	7.82	5.95	4.70	3.81	3.14	2.62	2.20

五、系数 C_m 的确定

为从 Knudsen 层的解中确定系数 C_m，分别考察内解与匀速流场中球的绕流解的衔接是简便的．此外，定 C_m 时动量交换过程是本质的，在定方程(1)中碰撞频率的修正因子时，应将 γ 取为 $\gamma=\sqrt{\pi}/1.996$，即与上节中的 γ 值不同，这也是对 C_m 分别求解的原因．

匀速流场的外区解，可以通过求解方程(20)、(21)，在壁面处满足边界条件(22)(其中温度梯度为 0)，在无穷远处满足匀速条件

$$\left.\begin{aligned} u_r &= U\cos\theta \\ u_\theta &= -U\sin\theta \end{aligned}\right\},\quad r\to\infty \text{ 时} \tag{60}$$

而得到

$$u_r/U\cos\theta = \left(1-\frac{a}{r}\right) + A'\left(\frac{a^3}{r^3}-\frac{a}{r}\right) \tag{61}$$

$$u_\theta/U\sin\theta = -\left(1-\frac{a}{r}\right) + A'\left(\frac{a^3}{r^3}+\frac{a}{r}\right) \tag{62}$$

其中

$$A' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+3C_m\lambda/a}\right) \tag{63}$$

由 (62) 可得做为内解在∞处边界条件的 u_θ 的渐近值为

$$u_{\theta\text{渐近}} = -\frac{3}{2}(\eta+\gamma C_m)\sin\theta\cdot K + O(K^2) \tag{64}$$

此条件实际上与前文[12]中 u_θ 的一阶渐近条件 (Re $=0$ 时) 相同，不过那里的 $A_0^{(1)} = \mathscr{A}_1 = \gamma C_m$. 与这样的外解衔接的内解已在 [12] 中求解一阶近似中得到. 在我们的情况下，将解展开为 $\phi = \phi^{(1)}K + \phi^{(2)}K^2 + \cdots$,可得到与[12]中的 $\phi^{(1)}$ 相同的方程与边界条件. 根据那里的解可将 $C_m = \mathscr{A}_1/\gamma$ 随 α 的变化列于表 3，其中碰撞频率的修正因子取为 $\gamma = \sqrt{\pi}/1.996$.

表 3 (均作了 $\gamma = \sqrt{\pi}/1.996$ 修正)

α	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
C_m (本文)	19.29	9.29	5.94	4.24	3.23	2.55	2.05	1.681	1.388	1.146
C_{mL}[9]	19.26	9.25	5.90	4.22	3.21	2.53	2.04	1.664	1.372	1.137

六、结果讨论

根据用分子运动论方程与连续介质方程匹配求解的结果，球形粒子在温度梯度场稀薄气体 ($K_n \ll 1$ 时) 中所受的热泳力由(28)式给出，其中跳跃系数 C_s, C_t, C_m 的数值由表 1, 2, 3 给出，在完全适应 ($\alpha = 1$) 的情况下，所得数值为 $C_s = 1.147$, $C_t = 2.202$, $C_m = 1.146$，与实验数据[4-6]相符较好.

本文在定 C_s, C_t 和 C_m 时，分别解了静止温度梯度场和匀速场中粒子的绕流问题. 也可以解既有温度梯度场又有匀速场的绕流问题，由于方程和边界条件的线性性质，解可以由上述两种绕流的解迭加而得到. 如粒子在这样的场中受的总力将由下式给出

$$F = 6\pi\mu aU\left(\frac{1+2C_m\lambda/a}{1+3C_m\lambda/a}\right) - 12\pi C_s(\mu^2 g/\rho)\frac{k + C_t\lambda/a}{(1+3C_m\lambda/a)(1+2k+2C_t\lambda/a)} \tag{65}$$

宏观量和分布函数也由两个分问题的解相加而得到. 上面给出的分析将问题分别求解，一方面因较简便，同时还因为在两个问题中对于碰撞频率的 γ 因子要取不同的值.

从本分析中，我们看到在一个问题中计算不同的参数时要在 B-K-W 方程的右端选择不同的碰撞频率之值，这正是 B-K-W 方程要依赖于调整碰撞频率的近似之处. 同时，我们也看到，根据问题的性质完全可以确定地给出应有的修正值并得到与实验相符较好的结果，说明这种调整碰撞频率的方法是有效的. 从数学上讲，这是正确地选择碰撞积分

的本征值，就能使相应的本征函数也得到应有的结果.

对于平板问题，Loyalka 等[9,10]用变分法得到了 C_s，C_t，C_m 对 α 的依赖关系，Ивченко 与 Яламов[11] 基于椭球模型用半空间展开法得到了 C_s，C_m 对于 α 的依赖关系. 我们将他们的结果作了同样的碰撞因子修正后在同样的 α 值下列出以与本文的结果比较（见表 1,2,3），相符是很好的. 表 2 中还列出了早期 Welander[8] 对平板问题得到的 C_t 的结果，在 $\alpha \sim 1$ 时，结果相符很好，在小的 α 值下，[8] 的误差稍大一些.

本文的结果仅限于内解的一阶近似，对于 Dwyer[13] 和曾根良夫等[14]预言的热泳力改变方向问题，不能作出判断. 对这种尚未为实验证实的二阶效应，要做进一步的实验和理论分析工作.

参　考　文　献

[1] 沈青，力学与实践，1 (1983).
[2] Waldmann, L., *Z. Naturforsch.*, **14a** (1959), 589.
[3] Brock, J. R., *Journal Colloid Sci.*, **17** (1962), 768.
[4] Talbot, L., et al., *Journal Fluid Mech.*, **101**, pt. 4 (1980), 737.
[5] Schadt, C. F., Cadle, R. D., *Journal Phys. Chem.*, **65**(1961), 1689.
[6] Schmitt, K. H., *Z. Naturforsch.*, A. **14** (1959), 870.
[7] Bhatnager, P. L., Gross, E. P., Krook, M., *Phys. Rev.*, **94** (1954), 511.
[8] Welander, P., *Arkiv för Fysik*, **7** (1954), 507.
[9] Loyalka, S. K., *Journal Chem. Phys.*, **48**(1968), 5432.
[10] Loyalka, S. K., Cipolla, J. W., *Phys. Fluids*, **14** (1971), 1656.
[11] Ивченко, И. Н., Яламов, Ю. И., *Журнал Физ. Хим.*, **45**(1971), 577.
[12] 沈青，力学学报，6 (1981)，538.
[13] Dwyer, H. A., *Phys. Fluids*, **10**(1967), 976.
[14] Sone, Y., Aoki, K., Rarefied Gas Dynamics. ed. by Potter, J. L., **1** (1977), 417.

THERMOPHORESIS OF SPHERICAL PARTICLE AND THE DEPENDENCE OF THE JUMP COEFFICIENTS ON THE ACCOMMODATION COEFFICIENT

Shen Ching

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the problem of thermophoretic force exerted on a sphere held in rarefied gas ($K_n \ll 1$) with temperature gradient is considered. In the inner region the Boltzmann-Krook-Welander equation is solved under Maxell-type boundary condition in the wall, and this solution is matched with the solution of the Stokes and Laplace equations. The slip coefficient C_m, the thermal creep coefficient C_s and the temperature jump coefficient C_t are determined from the first approximation of the inner solution. The thermophoretic force thus obtained is in good agreement with experimental data, and the values of C_m, C_s, C_t thus calculated and their dependence on the thermal accommodation coefficient α are also in good agreement with the results of solution of the planer problem obtained by using the variational and other methods.