

# 粘性流体力学的数值解法

中国科学院力学研究所 卞荫贵

计算流体力学的兴起推动了流体力学各个分支领域的蓬勃发展,对比较困难但实用上很需要的粘性流体力学的数值计算几乎从60年代就已经开始。70年代高速粘性流体力学的计算工作也大量涌现出来。过去不敢问津的疑难课题,如三维流,分离流,湍流等现在都有一定程度的突破。处理粘性流大体上可以分为两类。一类是用纳维-斯托克斯方程(以下简称N-S方程)求解全流场。如是湍流则用相应的时间平均的雷诺方程。另一类是把流场分为无粘流与粘性流两部分,用边界层理论研究粘性流,但这往往需要考虑无粘流与粘性流的相互作用。

本文侧重介绍低速粘性流中的一些问题。粘性流的基本方程是N-S方程,以二维为例,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v$$

这个方程的特点是既有一阶导数的对流项,又有二阶导数的扩散项(即粘性项),而且对流项是非线性的。如果为了检验或发展某种计算方法,直接采用复杂的N-S方程显然是不明智的。所以人们常常设计一个具有同样基本特性的模型方程。通常用的是Burgers方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

它具备了原方程的基本特性,有非线性的对流项以及二阶导数的扩散项。但比原方程简单得多。不少作者利用这个模型方程研究计算方法的特征以及比较各种方法。这诚然是很有意义的工作。然而美中不足的是,这个方程难于与实际流动联系起来。现在如果把N-S方程的压力项消去,得出二维涡方程[见方程(2.1)]

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \cdot \nabla \xi = \nu \nabla^2 \xi$$

我们可以把它看做是Burgers方程的二维形式。但不同的是,这个方程具有实际意义,因为它描写实际的流动。如果再选择一个有代表性的研究对象作为模型课题,用以探讨粘性流数值计算中所遇到的一些问题是有一定意义的。这是本文的主要意图。

## 一、边界层数值解法

边界层的解法经历了几个重要阶段,自从普朗特成功地把N-S方程进行了大幅度的简化,

建立了卓有成效的边界层方程以来,发展了好几种特有解法。首先由布劳休斯利用相似变量给出了经典的平板绕流相似性解。1921年卡门和波尔豪森提出了应用极为广泛的积分方法。不久又出现了用级数展开的方法进行求解,主要有霍华斯等人的工作。在考虑边界层高阶效应时,利用渐近展开的摄动法求解,如Van Dyke等人的工作。然而到了60年代,由于电子计算机的出现,掀起了对边界层进行数值模拟的高潮。各种数值解法中以有限差分法为主。Blottner & Flugge-Lotz (1963) (1) 最早比较成功地用差分方法解不可压缩层流边界层方程。Patanker & Spalding (1967) (2), 还有其他作者,用差分方法求解二维湍流边界层。Cebeci & Smith (1974) (3) 在他们的书中收集了当时有关湍流边界层的研究资料,并且用Keller的差分格式发展了所谓C-S方法。至于边界层中湍流模式问题,从60年代已经开始进行了大量的数值试验,而且在美国斯坦福大学于1968年举行的湍流边界层计算的专题上,提出了20多种计算方法,见Kline(1968)(4)。一些常用的差分格式以二阶的隐式格式用得较多,也比较成熟。目前注意力转到如何更有效地,即比求解块状三对角矩阵更为有效,利用近代向量计算机,进行边界层的计算。另外在追求精度,利用高阶格式求解边界层方程也有进展。

### § 1 边界层方程及主要有限差分法

定常可压缩理想气体以及二维 ( $j=0$ ) 或轴对称 ( $j=1$ ) 的层流边界层方程组具有下列形式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\rho ur^i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho vr^i) &= 0 \\ \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}(\mu \frac{\partial u}{\partial y}) \\ \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho v \frac{\partial h}{\partial y} &= u \frac{dp}{dx} + \frac{\partial}{\partial y}(k \frac{\partial T}{\partial y}) + \mu(\frac{\partial u}{\partial y})^2 \\ p &= \rho RT \end{aligned}$$

通过坐标变换可以将可压缩轴对称边界层方程变成二维不可压缩的边界层方程。为了便于叙述各种数值计算方法,我们直接从下列二维不可压缩边界层方程出发:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1.1}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \tag{1.2}$$

$u_e$ 为边界层外缘速度,其它均为常用的符号。边界条件有

$$\left. \begin{aligned} x=0, u(0, y) &= U(y) \\ y=0, u(x, 0) &= v(x, 0) = 0 \\ y \rightarrow \infty, u(x, \infty) &\rightarrow u_e(x) \end{aligned} \right\} \tag{1.3}$$

上述方程是以原始变量 $u, v$ 表达的方程,然而不少分析计算工作采用以流函数表示的方程,变换如下:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= \int_0^x u_e dx \\ \eta &= \frac{y u_e}{\sqrt{2\nu\xi}} \\ \psi &= \sqrt{2\nu\xi} f(\xi, \eta) \end{aligned} \right\} \tag{1.4}$$

代入方程 (1.1) 和 (1.2) 得

$$\left. \begin{aligned} f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) &= 2\xi(f_\xi' f' - f_\xi f'') \\ \beta &= \frac{2\xi}{u_0} \frac{du_0}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

$f', f'', f'''$  均为对  $\eta$  的导数, 相应的边界条件为

$$f(\xi, 0) = f'(\xi, 0) = 0, \quad f'(\xi, \infty) \rightarrow 1 \quad (1.6)$$

在相似性解的条件下,  $f(\xi, \eta)$  与  $\xi$  无关, (1.5) 变成熟知的 Falkner-Skan 方程

$$f''' + ff'' + \beta(1-f'^2) = 0 \quad (1.7)$$

(1.5) 可以改写成两个方程

$$\left. \begin{aligned} f' &= u \\ u'' + fu' + \beta(1-u^2) &= 2\xi(uu_\xi - u'f_\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

或改写成三个方程

$$\left. \begin{aligned} f' &= u, \quad u' = w \\ w' + fw + \beta(1-u^2) &= 2\xi(uu_\xi - wf_\xi) \end{aligned} \right\} \quad (1.9)$$

(1.8) 和 (1.9) 的边界条件是一样的, 即

$$f(\xi, 0) = u(\xi, 0) = 0, \quad u(\xi, \infty) \rightarrow 1 \quad (1.10)$$

Blottner (1975) [5] 对各种差分解法做了比较详细的总结。现在用于求解边界层的格式主要是二阶精度的隐式格式, 兹介绍下面常用的几种, 并且为了便于书写, 取用下列几个差分算符:

$$[\xi = (i-1)\Delta\xi; \eta = (j-1)\Delta\eta; i=1, 2, \dots, I; j=1, 2, \dots, J]$$

$$\left. \begin{aligned} D^+_{\xi} u_{i,j} &= (u_{i+1,j} - u_{i,j}) / \Delta\xi && \text{前向差分} \\ D^-_{\xi} u_{i,j} &= (u_{i,j} - u_{i-1,j}) / \Delta\xi && \text{后向差分} \\ D^0_{\xi} u_{i,j} &= (u_{i+1,j} - u_{i-1,j}) / (2\Delta\xi) \\ &= \frac{1}{2} (D^+_{\xi} + D^-_{\xi}) u_{i,j} && \text{中心差分} \\ D^2_{\xi} u_{i,j} &= (u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) / \Delta\xi^2 \\ &= D^+_{\xi} D^-_{\xi} u_{i,j} && \text{二阶中心差分} \\ A^+_{\xi} u_{i,j} &= (u_{i+1,j} + u_{i,j}) / 2 && \text{在 } i + \frac{1}{2} \text{ 点上取值} \\ A^-_{\xi} u_{i,j} &= (u_{i,j} + u_{i-1,j}) / 2 && \text{在 } i - \frac{1}{2} \text{ 点上取值} \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

与此类似的还有  $D^+_{\eta}, D^-_{\eta}, D^0_{\eta}, D^2_{\eta}, A^+_{\eta}, A^-_{\eta}$ 。

1. 六点隐式格式 将方程进行离散化时需要考虑方程中非线性的处理。令  $u = \bar{u} + \Delta u$ , 其中  $\bar{u}$  代表前一次的迭代值或代表前一个截面上的值, 作为已知的量。忽略  $\Delta u$  的二阶以上的项

$$\left. \begin{aligned} u^2 &= -\bar{u}^2 + 2\bar{u}\Delta u \\ uv &= -\bar{u}\bar{v} + \bar{u}\Delta v + \bar{v}\Delta u \end{aligned} \right\} \quad (1.12)$$

现将方程 (1.8) 进行差分而后按上式线性化,

$$\left. \begin{aligned} D_{\eta}^{-} (A_{\xi}^{+} f_{i,j}) &= A_{\eta}^{-} (A_{\xi}^{+} u_{i,j}) \\ D_{\eta}^{2} (A_{\xi}^{+} u_{i,j}) + (A_{\xi}^{+} f_{i,j}) D_{\eta}^{0} (A_{\xi}^{+} \beta_i) (1 - u_{i,j} u_{i+1,j}) \\ &= 2 (A_{\xi}^{+} \xi_i) [(A_{\xi}^{+} u_{i,j}) (D_{\xi}^{+} u_{i,j}) \\ &\quad - (D_{\xi}^{+} f_{i,j}) D_{\eta}^{0} (A_{\xi}^{+} u_{i,j})] \end{aligned} \right\} \quad (1.13)$$

当把上面两式分开来求解时, 在给定初值情况下, 先从第一式求  $f$ , 再由第二式解出  $u$ .  $u$  式经整理后得到三对角线的线性差分方程

$$a_i u_{i+1,j-1} + b_j u_{i+1,j} + c_j u_{i+1,j+1} = d_j \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{其中} \quad a_i &= \frac{1}{2\Delta\eta^2} - \frac{1}{4\Delta\eta} (A_{\xi}^{+} f_{i,j}) - \frac{1}{2\Delta\eta} (A_{\xi}^{+} \xi_i) (D_{\xi}^{+} f_{i,j}) \\ b_j &= \frac{1}{\Delta\eta^2} - (A_{\xi}^{+} \beta_i) u_{i,j} - \frac{2}{\Delta\xi} (A_{\xi}^{+} \xi_i) u_{i,j} \\ c_j &= \frac{1}{\Delta\eta^2} - a_j \\ d_j &= -\frac{1}{2} [1 + (A_{\xi}^{+} f_{i,j}) + 2(A_{\xi}^{+} \xi_i) (D_{\xi}^{+} f_{i,j})] D_{\eta}^2 u_{i,j} \\ &\quad - A_{\xi}^{+} \beta_i - \frac{2}{\Delta\xi} (A_{\xi}^{+} \xi_i) u_{i,j}^2 \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

2. Keller 的差分格式 这是将原方程改成几个一阶偏微分方程组, 如方程 (1.9), 再将离散化了的差分方程按 (1.12) 进行线性化而后求解. 所有一阶导数均用两点中心差分. 这个格式对任何不等距网格均有二阶精度. 现将 (1.9) 前两式在  $(i+1, j-\frac{1}{2})$  点上取值, 最后一式在  $(i+\frac{1}{2}, i-\frac{1}{2})$  点取值, 所以

$$D_{\eta}^{-} f_{i+1,j} = A_{\eta}^{-} u_{i+1,j} \quad (1.16a)$$

$$D_{\eta}^{-} u_{i+1,j} = A_{\eta}^{-} w_{i+1,j} \quad (1.16b)$$

$$\begin{aligned} D_{\xi}^{-} (A_{\xi}^{+} w_{i,j}) + A_{\eta}^{-} [A_{\xi}^{+} (fw)_{i,j}] + (A_{\xi}^{+} \beta_i) [1 - A_{\eta}^{-} (A_{\xi}^{+} u_{i,j}^2)] \\ = 2(A_{\xi}^{+} \xi_i) A_{\eta}^{-} [(A_{\xi}^{+} u_{i,j}) - (A_{\xi}^{+} w_{i,j}) (D_{\xi}^{+} f_{i,j})] \end{aligned} \quad (1.16c)$$

其中非线性项的处理如下:

$$A_{\eta}^{-} [A_{\xi}^{+} (fw)_{i,j}] = \frac{1}{2} A_{\eta}^{-} [-(\bar{f} \bar{w})_{i+1,j} +$$

$$(\bar{f} w)_{i+1,j} + (\bar{w} f)_{i+1,j} + (fw)_{i,j}]$$

$$A_{\eta}^{-} (A_{\xi}^{+} u_{i,j}^2)$$

$$= \frac{1}{2} A_{\eta}^{-} (\bar{u}_{i+1,j}^2 + 2\bar{u}_{i+1,j} \bar{u}_{i+1,j} + u_{i,j}^2)$$

最后将三个线性化差分方程在  $i+1$  截面上联立求解, 方程形式如下:

$$\begin{aligned} a_j f_{i+1,j} + \bar{a}_j f_{i+1,j-1} + b_j u_{i+1,j} + \bar{b}_j u_{i+1,j-1} \\ + c_j w_{i+1,j} + \bar{c}_j w_{i+1,j-1} = S_j \end{aligned} \quad (1.17)$$

其中  $a_j, \bar{a}_j$  等系数均是已知参量的函数. 连同边界条件 (1.10) 上式还可以写成类似于 (1.14) 的形式, 即

$$A_j Z_{i-1} + B_j Z_i + C_j Z_{i+1} = D_j \quad (1.18)$$

其中向量  $Z_j = (f_j, u_j, w_j)_{i+1}$ ,  $A_j, B_j, C_j$  为  $3 \times 3$  矩阵. 因此, 最后求解这个块状三对角线矩阵方程, 详见 [3].

3. Spalding 的解法 在求解二维层流和湍流边界层的另外一个重要方法是由 Spalding 等人多年来建立起来的. 主要将边界层方程通过 Von Mises 变换改成便于求解的形式, 即从  $x, y$  坐标换成  $x, \psi$  坐标, 再令  $\omega = \psi/\psi_e$ , 其中  $\psi_e$  为边界层外缘流线. 这样, 在  $x, \omega$  平面求解

的区域为一矩形,  $0 \leq x < L$ ,  $0 \leq \omega \leq 1$ , 见 Spalding (1977)(6).

## § 2 高阶精度格式

研究三维层流和湍流边界层需要有很大改进, 而提高精度则是很必要的. 多年来已有几种高阶差分格式提供使用, 其中有 Kreiss 格式, 见 Orszag & Israeli (1974)(7) 或 Hirsh (1975)(8). 有埃尔米特 (Hermit) 即所谓 Mehrstellen 格式, 见 Krause (1979)(9). 还有样条插值方法等. 高阶格式既可以高精度也可以满足一般精度要求而节省计算时间. 选取高阶格式最好能控制节点数而不增加机器的存储容量. 对边界层问题来说, 高阶格式只是对  $\eta$  方向的,  $\xi$  方向无此必要.

现将变量  $u$  按泰勒级数展开. 同时用  $F$ ,  $S$  分别代表它的一阶和二阶导数, 也同样展开成泰勒级数,  $h$  为步长, 于是有

$$D^0 u_i = F_i + \frac{1}{3!} h^2 u^{(3)} + \frac{1}{5!} h^4 u^{(5)} + \frac{1}{7!} h^6 u^{(7)} + \dots \quad (a)$$

$$D^0 F_i = S_i + \frac{1}{3!} h^2 u^{(4)} + \frac{1}{5!} h^4 u^{(6)} + \frac{1}{7!} h^6 u^{(8)} + \dots \quad (b)$$

$$D^0 S_i = u^{(3)} + \frac{1}{3!} h^2 u^{(5)} + \frac{1}{5!} h^4 u^{(7)} + \dots \quad (c)$$

$$D^2 u_i = S_i + \frac{2}{4!} h^2 u^{(4)} + \frac{2}{6!} h^4 u^{(6)} + \frac{2}{8!} h^6 u^{(8)} + \dots \quad (d)$$

$$D^2 F_i = u^{(3)} + \frac{2}{4!} h^2 u^{(5)} + \frac{2}{6!} h^4 u^{(7)} + \dots \quad (e)$$

$$D^2 S_i = u^{(4)} + \frac{2}{4!} h^2 u^{(6)} + \frac{2}{6!} h^4 u^{(8)} \quad (f)$$

其中差分算符  $D^0, D^2$  见 (1.11), 即  $D^0 u_i = (u_{i+1} - u_{i-1}) / (2h)$ ,  $D^2 u_i = (u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}) / h^2$ . 通常二阶精度的差商是将  $u^{(3)}$  以上各项都略去, 所以有

$$F_i = D^0 u_i + O(h^2), \quad S_i = D^2 u_i + O(h^2).$$

为了提高差分精度比如说到四阶, 可将  $u^{(3)}, u^{(4)}$  消去而忽略  $u^{(5)}$  以上各项. 例如从 (a) 和 (e) 消去  $u^{(3)}$  以及从 (d) 和 (f) 消去  $u^{(4)}$  分别求得

$$\left(1 + \frac{1}{6} h^2 D^2\right) F_i = D^0 u_i + O(h^4) \quad (1.19)$$

$$\left(1 + \frac{1}{12} h^2 D^2\right) S_i = D^2 u_i + O(h^4) \quad (1.20)$$

上两式在三个节点上建立了一阶导数  $F$  与  $u$  以及二阶导数  $S$  与  $u$  的线性关系式. 由于是三对角线矩阵方程, 求解较为方便. 变量共有三个,  $u, F$  及  $S$ . 除了上述两个方程外, 还有一个  $u$  应满足的基本方程. 这就是 Kreiss 提出的具有四阶精度比较简洁的差分格式.

埃尔米特高阶差分也可从泰勒展开式中求得. 下面给出二阶导数  $S$  用三个节点上的  $u$  和  $F$  表示出来的形式, 截断误差为  $O(h^4)$ . 从上面的 (b) 和 (d) 消去  $u^{(4)}$  即得

$$S_i = 2D^2 u_i - D^0 F_i + \frac{1}{360} h^4 u^{(6)} + \frac{1}{10080} h^6 u^{(8)} \quad (1.21)$$

从 (c), (e) 及 (1.19) 消去  $u^{(3)}$  及  $u^{(5)}$  得

$$S_{i+1} - S_{i-1} = 7hD^2F_i - \frac{30}{h}D^0u_i + \frac{30}{h}F_i + \frac{1}{315}h^5u^{(7)}$$

从 (b), (d) 及 (1.20) 消去  $u^{(4)}$  及  $u^{(6)}$ , 并利用 (1.21) 得

$$S_{i+1} + S_{i-1} = 10D^0F_i - 8D^2u_i + \frac{1}{45}h^4u^{(6)} + \frac{1}{840}h^6u^{(8)}$$

从而求得

$$S_{i-1} = \frac{1}{2h^2} (7u_{i+1} + 16u_i - 23u_{i-1}) \quad (1.22)$$

$$- \frac{1}{h} (F_{i+1} + 8F_i + 6F_{i-1}) + O(h^4)$$

$$S_{i+1} = \frac{1}{2h^2} (-23u_{i+1} + 16u_i + 7u_{i-1}) \quad (1.23)$$

$$+ \frac{1}{h} (6F_{i+1} + 8F_i + F_{i-1}) + O(h^4)$$

上面 (1.21) — (1.23) 给出在三个节点上用  $u$  和  $F$  表示的二阶导数  $S$  的公式。

以 Burgers 方程

$$u_t + uu_x = \nu u_{xx} \quad (1.24)$$

为例, 利用 (1.19) 和 (1.20) 得出求  $u$ ,  $F$  和  $S$  的三个差分方程

$$(u_i^{n+1} - u_i^n) / \Delta t + u_i^n F_i^n = \nu S_i^n \quad (1.25a)$$

$$\frac{1}{6} (F_{i+1}^n + 4F_i^n + F_{i-1}^n) = (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) / (2\Delta x) \quad (1.25b)$$

$$\frac{1}{12} (S_{i+1}^n + 10S_i^n + S_{i-1}^n) = (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) / \Delta x^2 \quad (1.25c)$$

已知  $n$  层中  $u$  的分布, 从 (1.25b), (1.25c) 求得  $F_i$  和  $S_i$ , 代入 (1.25a) 求  $u_i^{n+1}$ 。由于这是显式方法, 三个方程可以分开来求解, 但  $\Delta t$ ,  $\Delta x$  的选取要满足稳定性的要求。若改用隐式形式, 三个方程需要联立求解。

## 二、N-S 方程的数值解

N-S 方程的数值求解最早从低速开始的。20 余年来已经发展得比较成熟, 但也暴露了一些根本性的问题。

### § 3 用涡量、流函数的解法

用涡量  $\zeta$  及流函数  $\psi$  代替原始变量  $u, v, p$  是求解不可压缩 N-S 方程最简单的方法, 对二维或三维轴对称都适用。对二维来说, 基本方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{1}{R} \nabla^2 \xi \quad (2.1a)$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (2.1b)$$

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (2.1c)$$

用 $\xi$ - $\psi$ 变量时的边界条件处理不如用原始变量方便。后者壁面上条件是 $u, v=0$ , 而前者均用流函数表示, 在壁面上,  $\psi_w=0, \frac{\partial \psi}{\partial n}=0$ , 因此, (2.1b) 的条件过多, 而 (2.1a) 的条件不足, 因为 $\xi$ 在边界上是未知的。通过 $\xi$ 与 $\psi$ 的关系可以给出几种形式的边界条件, 见Roache (1974) [10]。

一阶精度的有

$$\xi_w = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial n^2} = -\frac{2}{h^2} \psi_{w-1} \quad (2.2a)$$

二阶精度的有

$$\xi_w = -\frac{3}{h^2} \psi_{w-1} - \frac{1}{2} \xi_{w-1} \quad (\text{Woods}) \quad (2.2b)$$

$$\xi_w = -\frac{1}{2h^2} (8\psi_{w-1} - \psi_{w-2}) \quad (\text{Jenson}) \quad (2.2c)$$

对定常问题有两类解法。一类是与时间相关的渐近解法, 也适用于非定常问题。其中对 $\xi$ 方程 (2.1a) 又有三种差分形式:

1. 时间前向差分的显式格式

$$D_t^+ \xi_{i,j}^n = -(u_{i,j}^n D_x^0 + v_{i,j}^n D_y^0) \xi_{i,j}^n + \frac{1}{R} (D_x^2 + D_y^2) \xi_{i,j}^n \quad (2.3)$$

显式差分的时间步长 $\Delta t$ 必须满足下列稳定性条件(见[10]第65页):

$$\Delta t \leq \frac{1}{\frac{2}{R} \left( \frac{1}{\Delta x^2} + \frac{1}{\Delta y^2} \right) + \frac{|u|}{\Delta x} + \frac{|v|}{\Delta y}} \quad (2.4)$$

给定初始值, 或者在 $n$ 时间层已经算出各参量, 则用 (2.3) 即可求得 $n+1$ 层的涡量 $\xi^{n+1}$ 。再通过 (2.1b) 求 $\psi^{n+1}$ , (2.1c) 求 $u^{n+1}, v^{n+1}$ 。最后用 (2.2) 求边界上的涡量 $\xi_w^{n+1}$ 。

2. 时间后向差分的隐式格式

$$D_t^- \xi_{i,j}^{n+1} = -(u_{i,j}^n D_x^0 + v_{i,j}^n D_y^0) \xi_{i,j}^{n+1} + \frac{1}{R} (D_x^2 + D_y^2) \xi_{i,j}^{n+1} \quad (2.5)$$

隐式差分的时间步长 $\Delta t$ 可以取得较大, 但因上式为五对角矩阵方程, 而且需要与 $\psi$ 方程联立求解, 不够方便。所以人们考虑到另一种较好的求解途径。

3. 交替方向隐式差分(ADI) 分两步计算:

$$\begin{aligned} \left( \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} - \xi_{i,j}^n \right) / \frac{\Delta t}{2} = & - \left( u_{i,j}^n D_x^0 \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i,j}^n D_y^0 \xi_{i,j}^n \right) \\ & + \frac{1}{R} \left( D_x^2 \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + D_y^2 \xi_{i,j}^n \right) \end{aligned} \quad (2.6a)$$

$$\left( \xi_{i,j}^{n+1} - \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} \right) / \frac{\Delta t}{2} = - \left( u_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} D_x^0 \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + v_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} D_y^0 \xi_{i,j}^{n+1} \right) + \frac{1}{R} \left( D_x^2 \xi_{i,j}^{n+\frac{1}{2}} + D_y^2 \xi_{i,j}^{n+1} \right) \quad (26b)$$

在每一时间层, 上两式均为三对角矩阵。一般将 $\xi$ 方程与 $\psi$ 方程分开求解。但每一步均需要同时计算 $\psi, u, v$ 等参数值。

从(2.1)可以看出, 压力需要另用下列公式来求:

$$\Delta^2 p = -\text{div}(u \cdot \nabla u) = -2 \left[ \left( \frac{\partial^2 \psi}{\partial x \partial y} \right)^2 + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} \frac{\partial \psi^2}{\partial y^2} \right] \quad (2.7)$$

也可以用总压的表达式进行计算, 令 $P$ 代表总压,  $P = p + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= -\xi \frac{\partial \psi}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial P}{\partial y} &= -\xi \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{1}{R} \frac{\partial \xi}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

总压的参考值一般取固壁上某一点的值。

另一类解法是与时间无关的逐次松弛法。涡量方程(2.12)的定常形式

$$L(\xi) = \frac{1}{R} \nabla^2 \xi + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) = 0$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi$$

用 $L_h, \nabla_h^2$ 代表相应的差分算符。则解法过程如下

$$\nabla_h^2 \psi^{(m+1)} = -\xi^{(m)}$$

$$\psi^{(m+1)} = \omega_1 \psi^{(m+1)} + (1 - \omega_1) \psi^{(m)}$$

$$L_h \xi^{(m+1)} = 0$$

$$\xi^{(m+1)} = \omega_2 \xi^{(m+1)} + (1 - \omega_2) \xi^{(m)}$$

解 $\xi$ 时包括先求解区域内各点的 $\xi$ 值而后求解边界上的值两部分。最近Rigal(1981)<sup>(11)</sup>用此方法求解二维方块空腔时, 对不同情况进行了数值实验, 如改变边界条件和采用不同雷诺数等, 发现取 $\omega_1 = \omega_2$ , 而且它们的数值在0.4到0.9之间, 计算结果较好。

虽然用涡量、流函数为变量求解N-S方程比较简单, 但有缺陷。此法只适用于二维或三维轴对称问题, 因为只有在这种情况下才有流函数。一般的三维问题就不适用。另外, 边界上的涡量不能和区域内部各点同时计算, 特别是边界形状稍微复杂一点时处理起来比较麻烦。

#### § 4 计算回流的模型课题——二维方块空腔问题

分离流的研究, 特别是层流分离流的研究近年来有了很大进展。然而分离流回流区内的流场结构, 旋涡的形成规律仍然是很不清楚的。二维空腔提供了极其理想的模型课题, 它的边界几何形状简单, 求解的要求具体。如果仍用以 $\psi, \xi$ 为变量的方程组(2.1), 可供使用的数值解法也有多种。利用这个模型课题, 不独可以研究回流中主涡和二次涡形成条件, 也可以用它检验各种计算方法的优缺点。这就是为什么近来还有不少用数值方法研究这个课题的原因。



Burggraf (1966) [12] 曾经深入地研究空腔问题, 并将求解 N-S 方程的数值结果与早期的理论分析进行定性比较。数值计算只是局限于  $R$  数为 400, 但已经得出方块空腔中出现三个旋涡的现象, 即一个主涡和两个二次涡, 见图 1。

根据 Batchelor (1956) [13] 的理论预测, 当  $R$  数接近于无穷大的极限时, 回流区中旋涡存在一个均匀涡量的涡核, Burggraf 的计算结果表明, 主涡具有这样的趋势, 即核心区为均匀涡量的无粘流。而二次涡则主要是粘性流动, 可能由于  $R=400$  还不够高的原因。

Nallasamy (1977) [14] 进一步做了细致的数值计算,  $R$  数扩大到 50,000。在较低的  $R$  数, 比如从 100 开始, 空腔中产生三个涡。上游的二次涡 (左下角) 在  $R=500$  为最大, 而当  $R=5000$  时即消失。下游二次涡 (右下角) 比上游的稍小, 但随着  $R$  数的增加而持续存在的  $R$  数范围较宽, 上游二次涡在  $R=500$  时开始缩小, 下游二次涡仍继续增大, 直到  $R=30,000$  才消失。另外还研究主涡中心位置随  $R$  数的变化。对方块空腔来说, 在较低  $R$  数情况下, 主涡中心在中心线上距底面约  $3/4$  的地方。随着  $R$  数的增加, 主涡中心向下游移动, 最后趋向于空腔的几何中心。

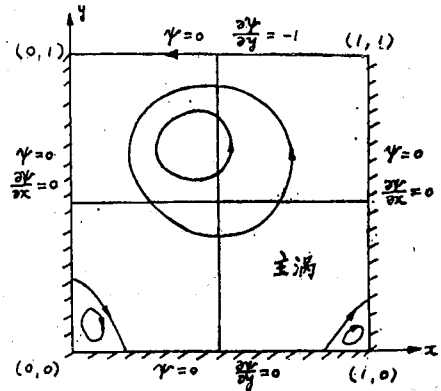


图 1 方块空腔示意图

在数值求解  $\zeta$  方程时存在如下几个问题:

1. 对流项用中心差分引起的振荡  $\zeta$  方程中的扩散项均用中心差分。只是处理对流项碰到困难。早期多数作者用二阶精度的中心差分格式, 然而当  $R$  数稍高时得不到稳定解, 发生振荡现象。但对发生振荡的原因没有较好的分析。Roache 对线性模型方程给出很有启发的剖析 (见 [10] 第 161 页)。用一维定常的 Burgers 方程为例,

$$u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 \leq x \leq 1, u > 0) \quad (2.9)$$

边界条件为  $\zeta(0) = 0, \zeta(1) = 1$ 。这个简单的方程具有精确解

$$\zeta = (1 - e^{Rx}) / (1 - e^R), \quad R = u/\nu \quad (2.10)$$

这里  $R$  等同于真实流体单位长度的雷诺数。当  $R \ll 1$  时, 扩散起主导作用, 即  $\partial^2 \zeta / \partial x^2 \rightarrow 0$ , 所以精确解接近于一直线,  $\zeta \approx x$ 。但当  $R \gg 1$  时,  $\partial \zeta / \partial x \rightarrow 0$ , 所以  $\zeta \rightarrow 0$  而不能满足  $\zeta(1) = 1$  的边界条件, 在  $\zeta = 1$  边界附近才有粘性效应。因此这个方程及其解的性质是很清楚的。现在用差分近似, 不同差分格式给出不同后果。

对流项用中心差分的方程是 ( $\Delta x = h, x = ih, i = 0, 1, 2, \dots, N$ )

$$\frac{Rh}{2} (\zeta_{i+1} - \zeta_{i-1}) = \zeta_{i+1} - 2\zeta_i + \zeta_{i-1}$$

其解析解为

$$\zeta_i = \left[ 1 - \left( \frac{1 + \frac{Rh}{2}}{1 - \frac{Rh}{2}} \right)^i \right] / \left[ 1 - \left( \frac{1 + \frac{Rh}{2}}{1 - \frac{Rh}{2}} \right)^N \right] \quad (2.11)$$

对流项用迎风差分的方程是

$$Rh (\xi_i - \xi_{i-1}) = \xi_{i+1} - 2\xi_i + \xi_{i-1}$$

其解析解为

$$\xi_i = [1 + (1 + Rh)^i] / [1 - (1 + Rh)^N] \quad (2.12)$$

$Rh = uh/\nu$  是网格雷诺数。当  $Rh \ll 1$  时, 近似解 (2.11), (2.12) 和精确解很接近, 见图2。当  $Rh$  渐渐增加时, 近似解的误差越来越大。特别是当  $Rh > 2$  时, 从 (2.11) 可以清楚地看出, 中心差分的解显然有振荡。设  $N$  为偶数, 则 (2.11) 可写成

$$\xi_i = [(-1)^i \left( \frac{\frac{Rh}{2} + 1}{\frac{Rh}{2} - 1} \right)^i - 1] / \left[ \left( \frac{\frac{Rh}{2} + 1}{\frac{Rh}{2} - 1} \right)^N - 1 \right]$$

$i$  为奇数时,  $\xi_i$  取负值。 $i$  为偶数时,  $\xi_i$  取正值, 参见图3。

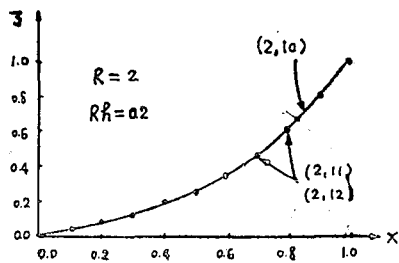


图2

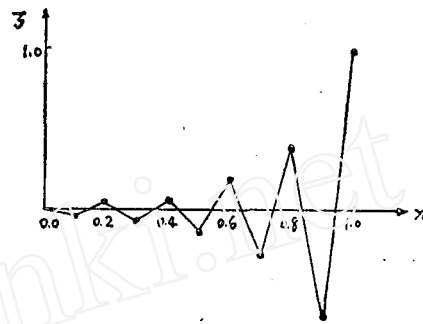


图3

由于 (2.11) 是解析解, 不需要迭代也不存在稳定性问题, 所以对流项用中心差分引起的振荡, 不是因为采用某种数值计算的迭代不收敛或稳定性问题, 而是这种差分近似方程本身的特征。

2. 迎风差分格式的粘性 对流项改用一阶精度的迎风格式可以克服上述的振荡现象, 从此出现了一些高  $R$  数的计算结果。然而迎风格式较大的截断误差带来了新的问题, 产生了虚假的扩散效应, 即增加了粘性效应。特别是当  $R$  数比较高, 物理粘性比较小的时候, 虚假的扩散效应起着重要作用。Bozeman & Dalton (1973) (15) 以及 Davis 等人 (1976) (16) 对各种差分格式做了比较, 现简单介绍如下:

对流项  $u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$  也可以写成散度形式  $-\frac{\partial}{\partial x} (u\xi) + \frac{\partial}{\partial y} (v\xi)$ 。

中心差分:

$$u \cdot \nabla \xi = (u_{i,j} D_x^0 + v_{i,j} D_y^0) \xi_{i,j} \quad (A)$$

$$\nabla \cdot u \xi = D_x^0 (u\xi)_{i,j} + D_y^0 (v\xi)_{i,j} \quad (B)$$

迎风差分

$$u \cdot \nabla \xi = \frac{1}{2} \{ (u_{i,j} - |u_{i,j}|) D_x^+ + (u_{i,j} + |u_{i,j}|) D_x^- + (v_{i,j} - |v_{i,j}|) D_y^+ + (v_{i,j} + |v_{i,j}|) D_y^- \} \xi_{i,j} \quad (C)$$

$$u \cdot \nabla \xi = \frac{1}{4} \{ [(u_{i,j} - |u_{i,j}|) + (u_{i+1,j} - |u_{i+1,j}|)] D_x^+ \xi_{i,j} + [(u_{i,j} - |u_{i,j}|) - (u_{i+1,j} - |u_{i+1,j}|)] D_x^- \xi_{i,j} + [(v_{i,j} - |v_{i,j}|) + (v_{i,j+1} - |v_{i,j+1}|)] D_y^+ \xi_{i,j} + [(v_{i,j} - |v_{i,j}|) - (v_{i,j+1} - |v_{i,j+1}|)] D_y^- \xi_{i,j} \}$$

$$\begin{aligned}
 & + (u_{i,i} - |u_{i,i}|) + (u_{i-1,i} + |u_{i-1,i}|) \} D_x^- \xi_{i,j} + [(v_{i,j} - |v_{i,j}|) \\
 & + (v_{i,j+1} - |v_{i,j+1}|) \} D_y^+ \xi_{i,j} + [(v_{i,j} + |v_{i,j}|) \\
 & + (v_{i,j-1} + |v_{i,j-1}|) \} D_y^- \xi_{i,j} \quad (D)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot u \xi = & \frac{1}{2} \{ D_x^- [(u_{i,j} + |u_{i,j}|) + (u_{i+1,j} + |u_{i+1,j}|)] \xi_{i,j} \\
 & + D_x^+ [(u_{i,j} - |u_{i,j}|) + (u_{i-1,j} + |u_{i-1,j}|)] \xi_{i,j} + D_y^- [(v_{i,j} \\
 & + |v_{i,j}|) + (v_{i,j+1} + |v_{i,j+1}|)] \xi_{i,j} + D_y^+ [(v_{i,j} - |v_{i,j}|) \\
 & + (v_{i,j-1} - |v_{i,j-1}|)] \xi_{i,j} \} \quad (E)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \nabla \cdot u \xi = & \frac{1}{2u_{i,j}} [(u_{i,j} - |u_{i,j}|) D_x^+ (u\xi)_{i,j} \\
 & + (u_{i,j} + |u_{i,j}|) D_x^- (u\xi)_{i,j}] + \frac{1}{2V_{i,j}} [(v_{i,j} - |v_{i,j}|) D_y^+ (v\xi)_{i,j} \\
 & + (v_{i,j} + |v_{i,j}|) D_y^- (v\xi)_{i,j}] \quad (F)
 \end{aligned}$$

以上六个差分格式的截断误差分别为

$$E_A = -\frac{h^2}{6} (u \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + v \frac{\partial^3 \xi}{\partial y^3})$$

$$E_B = -\frac{h^2}{6} [\frac{\partial^3}{\partial x^3} (u\xi) + \frac{\partial^3}{\partial y^3} (v\xi)]$$

$$E_C = \frac{h}{2} |u| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} - \frac{h^3}{6} |u| \frac{\partial^3 \xi}{\partial x^3} + \text{相应的 } y \text{ 项}$$

$$E_D = \frac{h}{2} |u| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{h}{2u} |u| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \text{相应的 } y \text{ 项}$$

$$E_E = \frac{h}{2} |u| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{h}{2u} |u| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \text{相应的 } y \text{ 项}$$

$$E_F = \frac{h}{2} |u| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{h}{u} |u| \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \text{相应的 } y \text{ 项}$$

数值试验表明, (1) 当  $R=100$  时, 中心差分与迎风差分的结果差别不大; (2) 当  $R \geq 400$  时, 中心差分的计算不收敛; (3) 当  $R=1000$  时, 用迎风格式计算的结果与用中心差分计算  $R=400$  的结果相接近, 这说明迎风差分的格式粘性的影响。用格式 (C) 为例, 格式粘性 & 物理粘性项分别为  $\frac{h}{2} |u| \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ ,  $\frac{1}{R} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}$ 。如果定义有效  $R$  数为  $R^*$ , 则它们之间的关系是

$$\frac{h}{2} |u| + \frac{1}{R} = \frac{1}{R^*}, \text{ 即 } R^* = R / (1 + \frac{h}{2} |u| R)$$

取  $R=1000$ ,  $h=1/40$ ,  $|u|=1/10$ ,  $R^*=400$ 。另外在同样的  $R$  数, 如果用不同的迎风格式, 也有可能得出不一样的结果。Bozeman 等人<sup>[15]</sup> 计算  $R=1000$  时, 用迎风格式 (F) 得出一个主涡, 而用迎风格式 (E) 时得到两个主涡, 参见图 4。这说明在选择这些可供使用的格式, 而且可以求得计算结果时, 要注意对结果是否正确需要仔细分析。

3. 高雷诺数的限制 用差分方法求解 N-S 方程时受到  $R$  数的限制。当  $R$  数比较大, 但比较转换到湍流的临界雷诺数为小时, 差分法计算会出现振荡或不收敛。本来粘性项可以起着

阻尼振荡或稳定作用。当 $R$ 数变大时,这种作用也就减弱了。再则由于高 $R$ 数下的边界层很薄,如果网格不够细,粘性效应就分辨不出来。 $R$ 数与网格间距 $h$ 之间的关系可以作粗略估计。设边界层厚度为 $\delta$ ,用平板公式, $\delta \sim \sqrt{xL/R}$ , $R = UL/\nu$ , $\delta \sim \alpha_1 h$ , $x \sim \alpha_2 h$ ,所以有 $Rh = O(1)$ 因此, $R$ 数愈高要求网格愈细。目前,对这个空腔问题的数值分析工作已有不少,取用 $R$ 数只是在 $10^2 - 10^4$ 的范围。Benjamin (1979) (17)用不等距网格使得壁面附近高粘性层以及二次涡区域附近有较密的网格点,算到 $R = 10,000$ 。

上面谈到的两个主要因素,即格式粘性影响以及高雷诺的限制,是用差分方法求解所碰到的困难。如何在高雷诺数下求得有用的并且有足够精度的解还有一些问题需要进一步探讨。

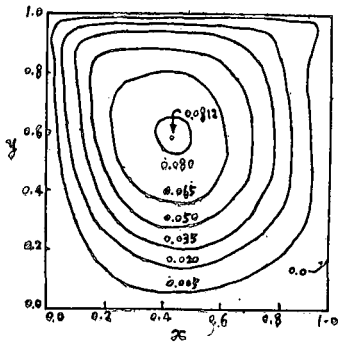


图4a  $R=1000, h=1/50$

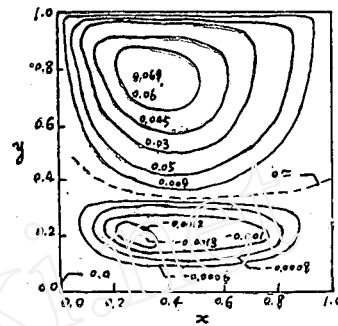


图4b  $R=1000, h=1/30$

### § 5 N-S 方程的其他解法

除了差分方法而外,有限元法应用于低速粘性流体力学的例子越来越多。对处理边界形状比较复杂的课题,有限元法具有一定的优越性,但对高雷诺数流动的模拟,与差分方法一样仍存在一定的困难,请参阅这次第1届全国计算流体力学学术会议上的一篇综述报告(18)。另外,用谱方法(Spectral method)求解N-S方程,近几年已有不少应用。在高雷诺数下,谱方法无论在所费机时及计算精度方面均比有限差分方法优越。对于不太规则的复杂边界形状的课题,谱方法结合有限元理论可能成为求解N-S方程的新的有力工具。目前的应用还只是在不可压缩流方面的课题。谱方法的主要文献见Gottlieb & Orszag (1977)(19)的专题报道。除此以外,利用高雷诺数粘性流体力学的特点,结合理论分析和数值计算,发展了所谓涡方法(Vortex method)。兹简略介绍如下:

前面讨论差分方法求解时,已经碰到一些困难,如高雷诺数的限制以及格式粘性影响等。人们开始着眼于其他求解的途径。在高雷诺数的流动中,旋涡往往集中在靠近壁面的边界层,钝体后部的涡街以及从机翼尖缘脱落的涡面等,在这些粘性层以外的广大区域为无粘流场。涡方法就是以离散涡代替连续旋涡分布进行数值模拟。方法包括三个主要部分。第一步先不考虑粘性影响,也不管离散涡是怎样产生的。设已知 $N$ 个离散涡,用无旋有势流计算流场的速度分布。涡的运动取决于当地的速度,其轨迹用拉格朗日坐标描述,因而不受网格的限制。其次,考虑涡的扩散效应。在这个问题上,Chorin(20,21)用随机选取法(random choice method)处理扩散过程。因此涡的运动轨迹由对流和扩散两部分来确定。最后再处理壁面附近的粘性效应以满足壁面上无滑流的边界条件。

现在仍从(2.1)出发,第一步先不考虑粘性影响,让 $R \rightarrow \infty$ ,所以有

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y} = 0$$

$$\nabla^2 \psi = -\xi \quad (2.13)$$

此式说明涡量守恒,  $\xi = \xi^0 = \xi^0(x, y, 0)$ 。如果已知涡的初始分布, 用无粘流理论计算流场中的速度分布, 从而用拉格朗日坐标跟踪涡的运动。Chorin<sup>[21]</sup>引进涡团 (Vortex blob) 的概念, 它与通常的点涡不一样。后者没有内部结构, 只占平面上一个几何点, 而涡团有一定的尺寸, 用  $\sigma$  表示。设离散涡的总数为  $N$ , 则

$$\xi = \sum_{j=1}^N \xi_j, \quad \psi = \sum_{j=1}^N \psi_j, \quad \nabla^2 \psi_j = -\xi_j \quad (2.14)$$

涡团的位置用  $(x_i, y_i)$  表示, 则

$$\left. \begin{aligned} \psi_i &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \log r_i & |r_i| \geq \sigma \\ &= \frac{\Gamma_i}{2\pi} \frac{r_i}{\sigma} & |r_i| < \sigma \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

$$r_i = \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}, \quad \Gamma_i = \int \xi_i dx dy$$

其团对流运动的速度

$$\left. \begin{aligned} u_i &= \frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{y_i - y_j}{r_{ij}} \\ v_i &= \frac{dy_i}{dt} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \sum_{j \neq i}^N \frac{\Gamma_j}{2\pi} \frac{x_i - x_j}{r_{ij}} \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

$$r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$$

这是一组常微分方程, 设  $t = n\Delta t$  时刻涡的位置  $(x^n, y^n)$  为已知,  $t + \Delta t$  时刻的新位置是:

$$\left. \begin{aligned} \overline{x_i^{n+1}} &= x_i^n + \Delta t u_i^n \\ \overline{y_i^{n+1}} &= y_i^n + \Delta t v_i^n \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

$u_i^n, v_i^n$  代表 (2.16) 的右端项,  $x_i^{n+1}, y_i^{n+1}$  为中间值。最后位置有待第二步的计算。

第二步考虑涡团的扩散影响, 求解涡量的扩散方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{1}{R} \nabla^2 \xi \quad (2.18)$$

这是熟知的热传导方程。以一维为例, 如果在  $t=0$  的  $x$  轴上, 已知温度分布或涡量分布为  $f(x)$ , 其主解是

$$\xi(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) P d\xi$$

$$P = \sqrt{\frac{R}{4\pi t}} \exp\left[-\frac{R}{4t} (x - \xi)^2\right] \quad (2.19)$$

因此对于一个点涡来说, 涡量扩散就是正态分布函数  $P$ 。Chorin 用随机选取法模拟此正态分布。所以涡团扩散的移动位置用随机参数  $\xi, \eta$  表示,

$$\begin{aligned} x_i^{n+1} &= x_i^{n+1} + \xi = x_i^n + \Delta t u_i^n + \xi \\ y_i^{n+1} &= y_i^{n+1} + \eta = y_i^n + \Delta t v_i^n + \eta \end{aligned} \quad (2.20)$$

以上两步相当于用时间分裂法 (time splitting) 求解涡量方程 (2.1a), 第一步是确定性的解, 第二步是统计性的解。最后还要处理壁面附近的粘性效应。由于前两步的解在壁面上只满足无粘流的边界条件, 即法向速度为零, 而切向速度一般不等于零。这正是壁面附近产生旋涡的原因。在新产生离散涡所组成的涡面两侧, 其切向速度有间断, 正好以此满足壁面上切向速度为零的边界条件。至此, 完成了用涡方法近似求解基本方程组 (2.1) 的过程。

这种随机涡方法正在探索中, 可供参考的工作还不多, 有 [20—24], 其中 Leonard (1980) (23) 是近期对一般涡方法的综述报告。

### § 6 可压缩 N-S 方程

可压缩流的 N-S 方程和低速的 N-S 方程在数学性质是一样的。为了检验或发展计算方法, 利用低速 N-S 方程更为方便些。可是由于实用的需要, 可压缩流 N-S 方程的数值解法发展很快, 也有了 20 多年的历史。在航空航天方面已经研究的课题包括: 1. 内部流: 如空腔问题, 激波管中非定常流动, 喷管和渠道流等; 2. 物体外部绕流: 圆柱、圆球及机翼绕流等; 3. 底部流, 台阶流等; 4. 绕拐角流; 5. 激波与边界层相互作用。

1975 年, Peyret & Viviani (25) 发表一篇较好的综述性报道, 详细地介绍了从 1965 年到 1974 年期间用于求解可压缩流 N-S 方程的各种差分方法。国内也有不少单位和个人开展了对上述课题的研究。1980 年全国计算力学会议论文集提供不少有关这方面的国内资料。

可压缩 N-S 方程要比不可压缩的复杂很多。在数值求解时, 基本方程几乎普遍采用守恒形式。以用直角坐标表示的二维形式为例,

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} = 0$$

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + \sigma_x \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ (e + \sigma_x)u + \tau_{xy}v - k \frac{\partial e}{\partial x} \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho uv + \tau_{xy} \\ \rho v^2 + \sigma_y \\ (e + \sigma_y)v + \tau_{xy}u - k \frac{\partial e}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\sigma_x = p - \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\sigma_y = p - \lambda \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \varepsilon = \frac{e}{\rho} - \frac{1}{2} (u^2 + v^2)$$

70年代早期以前用的显式格式，并已求解高雷诺数下的许多课题，如激波与边界层相互作用等课题。用下述模型方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

MacCormack 的两步显式格式是

$$\begin{aligned} \overline{u_i^{n+1}} &= u_i^n - \Delta t u_i^n D_x^- u_i^n + \Delta t \nu D_x^2 u_i^n \\ \underline{u_i^{n+1}} &= \frac{1}{2} [u_i^n + \overline{u_i^{n+1}} - \Delta t \overline{u_i^{n+1}} D_x^+ \overline{u_i^{n+1}} + \Delta t \nu D_x^2 \overline{u_i^{n+1}}] \end{aligned}$$

第一步从已知  $t = n\Delta t$  的值，计算  $t = (n+1)\Delta t$  的预估值，对流项用后向差分（或前向差分）。二阶导数用中心差分。第二步校正第一步的预估值。对流项用相反的一侧差分。这个格式是二阶精度的，但时间步长不能取得太大，以满足稳定性要求。所以显式差分比较费时。在此基础上近年来发展了隐式格式，见 Beam & Warming<sup>[26]</sup> 以及取显式和隐式之所长又发展了显-隐混合格式，见 C.P. Li<sup>[27]</sup> 和 Shang<sup>[28]</sup>。这种新的混合格式使得计算时间比之早期的显式格式要缩短一两个量级。

### 参考文献

- [1] Blottner, F. G., AIAA J., 8, 2 (1970): 193-205.
- [2] Patanker & Spalding, Heat and Mass Transfer in Boundary Layers (1967).
- [3] Cebeci & Smith, Analysis of Turbulent Boundary Layer (1974).
- [4] Kline, The Computation of Turbulent Boundary Layer (1968).
- [5] Blottner, AGARD LS-73 (1975).
- [6] Spalding, D. B., GENMIX—A general computer program for 2-dimensional parabolic phenomena (1977).
- [7] Orszag & Israeli, Ann. Rev. Fl. Mech., 6 (1974).
- [8] Hirsh, R. S., J. Comp. Phys., 19, 1 (1975): 90-109.
- [9] Krause, E., Computers & Fluids, 4, 2 (1976).
- [10] Roache, P. J., Computational Fluid Dynamics (1972).
- [11] Rigal, A., J. Comp. Phys., 43, 1 (1981).
- [12] Burggraf, J. F. M., 24 (1966): 113-151.
- [13] Batchelor, J. F. M., 1 (1956): 388.
- [14] Nallasamy, J. F. M., 79, 2 (1977): 391-414.
- [15] Bozeman & Dalton, J. Comp. Phys., 12, 3 (1973): 348-363.
- [16] Davis, G., et al, Computers & Fluids, 4, 1 (1976): 29-43.
- [17] Benjamin, J. Comp. Phys., 33, 3 (1979).
- [18] 李榕萱, 有限元素法在流体力学中的应用 (1981).
- [19] Cottlieb & Qrszag, Numerical Analysis of Spectral Method (1977).
- [20] Chorin, Lecture Notes in Phys., V. 19 (1972).
- [21] —, J. F. M., 57, 4 (1973): 785-796.
- [22] —, J. Comp. Phys., 27, 3 (1978): 428-442.
- [23] Leonard, A., J. Comp. Phys., 37, 3 (1980): 289-335.
- [24] 滕振寰, 北京大学报告 (1981).
- [25] Peyret & Viviani, AGARD AG 212 (1975).
- [26] Beam & Warming, AIAA J., 16, 4 (1978).
- [27] Li, C. P., Lecture Notes in Phys., V. 59 (1976).
- [28] Shang, AIAA 3rd Comput. Fluid Dyn. Conference (1977).

## Numerical Methods for Viscous Fluid Mechanics

Bian Yin-gui

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)