第2期　　　　固　体　力　学　学　报　　　　№2
1983年6月　　ACTA MECHANICA SOLIDA SINICA　　June 1983

使用任意非正交曲线坐标解变截面圆轴扭转问题的数值计算

任孝安

（中国科学院力学研究所）

1．基本方程及其数值求解　由于讨论的是轴对称问题，因此取柱坐标系中的θ坐标为任意曲线坐标系(q^1, q^2, q^3)中的q^2坐标，在轴纵剖面$Z—R$平面上取任意非正交曲线坐标q^3和q^1，则变截面圆轴扭转问题以无量纲应力函数ψ表达的求解方程[1]为：

$$C_1\frac{\partial^2\psi}{(\partial q^1)^2}+C_2\frac{\partial^2\psi}{\partial q^1\partial q^3}+C_3\frac{\partial^2\psi}{(\partial q^3)^2}+C_4\frac{\partial\psi}{\partial q^1}+C_5\frac{\partial\psi}{\partial q^3}=0 \tag{1}$$

其中

$$C_1=\frac{1}{g_{11}}\qquad C_2=-\frac{2\sin(\beta_3-\beta_1)}{\sqrt{g_{11}g_{33}}}\qquad C_3=\frac{1}{g_{33}}$$

$$C_4=\frac{1}{\sqrt{g_{11}}}\left[\frac{\partial}{\sqrt{g_{11}}\,\partial q^1}\left(\ln\frac{\sqrt{g_{33}}}{r^3\sqrt{g_{11}}\cos(\beta_3-\beta_1)}\right)-\frac{1}{\cos(\beta_3-\beta_1)}\cdot\frac{\partial(\beta_3-\beta_1)}{\sqrt{g_{33}}\,\partial q^3}+\frac{3\sin(\beta_3-\beta_1)}{r}\,\frac{\partial r}{\sqrt{g_{33}}\,\partial q^3}\right]$$

$$C_5=\frac{1}{\sqrt{g_{33}}}\left[\frac{\partial}{\sqrt{g_{33}}\,\partial q^3}\left(\ln\frac{\sqrt{g_{11}}}{r^3\sqrt{g_{33}}\cos(\beta_3-\beta_1)}\right)-\frac{1}{\cos(\beta_3-\beta_1)}\cdot\frac{\partial(\beta_3-\beta_1)}{\sqrt{g_{11}}\,\partial q^1}+\frac{3\sin(\beta_3-\beta_1)}{r}\,\frac{\partial r}{\sqrt{g_{11}}\,\partial q^1}\right]$$

式中g_{ij}是度量张量的分量，β_3和β_1分别是坐标曲线q^3、q^1和Z、R轴之间的夹角。

由于轴纵剖面上内外壁曲线本身就是等应力函数线，所以其边界条件，内外壁ψ为常数，现取内壁的无量纲应力函数ψ为0，外壁为1．关于受扭轴两端面的边界值，可取已知的相近形状轴在该截面的ψ值分布．

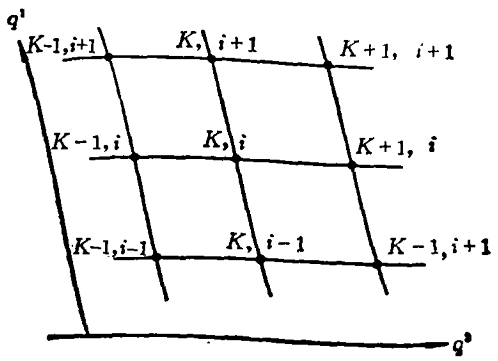

图 1

方程（1）的各项系数仅和各点的几何参数有关，与ψ值无关，所以是一个线性齐次的二阶偏微分方程．从特征方程判别式确定是椭圆型方程，因此采用图1的差分格式，利用三点不等距数值微分公式[2]，

本文于1981年4月5日收到．

将方程(1)离散，得到ψ在网格节点上的值所近似满足的线性代数方程组．本程序用线松弛迭代求解，收敛性良好．

2．关于曲线拟合 文献〔1〕提出的方法是在任意曲线坐标系中求解，其目的是适应复杂的曲线边界，因此这就对程序提出了一个曲线拟合的问题．

在求解方程(1)中，其各项系数仅和网格节点的几何参数有关，因此几何参数的计算精度直接影响到整个问题的求解准确性．

对各类几何参数，本程序采用的计算公式如下：

$$g_{ii}=\left(\frac{\partial Z}{\partial q^i}\right)^2+\left(\frac{\partial R}{\partial q^i}\right)^2 \qquad (i=1,\ 3)$$

$$\beta_3=\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{dR}{dZ}\right) \qquad \beta_1=\mathrm{tg}^{-1}\left(-\frac{dZ}{dR}\right)$$

这样，如何用一合适的解析函数近似拟合坐标曲线，在此基础上计算网格节点的各类几何参数是一突出的重要问题．例如本文实例(2)就是一个工程上实用的形状非常复杂的变截面圆轴．我们以轴的内外壁曲线及作为初值的近似等应力函数线作为q^3坐标曲线．对于这样的坐标曲线不可能用一个一般的解析函数逼近其整体，我们采用的是过三点的二次抛物线局部拟合．但是，当曲线斜率大于1时，其一阶导数值的精度很差，当曲线斜率变化比较大时，二次曲线的拟合效果也很不理想，如图2中的虚线所示（图中粗实线表示真实曲线）．

为改善上述问题，我们采用局部旋转坐标的方法，即在通过$(x_1,\ y_1)$、$(x_2,\ y_2)$、$(x_3,\ y_3)$三点用二次曲线拟合坐标曲线时，先将坐标旋转α角（图3），$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}$.

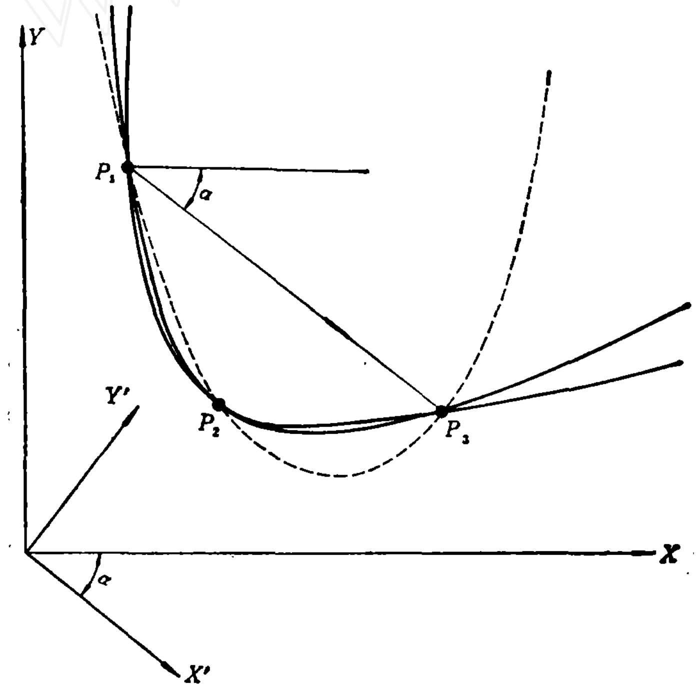

图 2

$\cdot [(y_3-y_1/(x_3-x_1)]$.

从图 3 中可以看到，原来在整体坐标系中的大挠度曲线(即斜率大的曲线)，在局部坐标系中成为小挠度曲线，提高了数值微分的精度．同时，对于斜率变化大的曲线，采用了局部坐标系中的拟合，情况也有很大改善．在图 2 中，我们用细实线表示坐标标架旋转 α 角后，在 X'-Y' 系中的拟合，对于 p_1-p_3 段，实线的拟合情况比虚线的拟合显然改进不少．

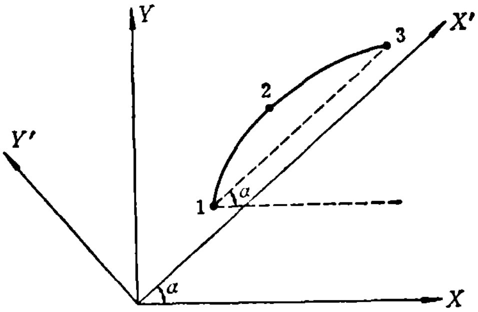

图 3

我们以这样的曲线拟合方法为基础，计算网格节点的几何参数．也就是过相邻三点在局部旋转坐标系 X'—Y' 中用二次曲线拟合，计算其中间点的数值微分，然后都转回到统一的整体坐标系 X-Y 中．

在此，我们举一个有具体数字的例子：有一曲线通过三点，其坐标值如表 1

表 1

i	1	2	3
x_i	68.22	68.96	69.22
y_i	48.90	47.02	45.26

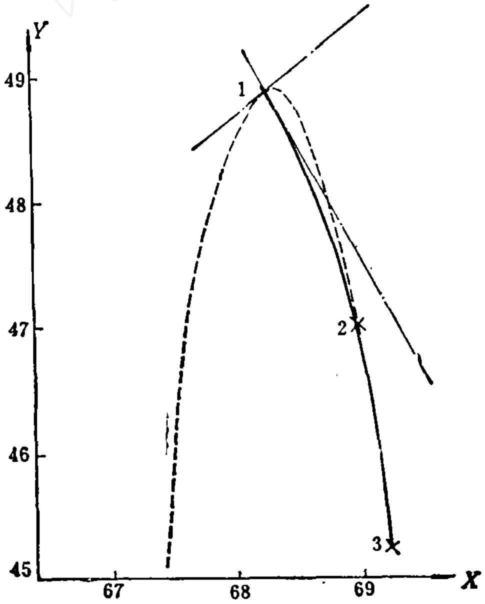

图 4

实际曲线如图 4 实线所示，第一点的斜率应为负值，但利用三点不等距数值微分公式，得到该点的一阶导数为正值：$f'(x_1)=0.5887$，此时的拟合近似曲线实际如图 4 虚线所示．

现将坐标标架旋转 α 角，$\alpha=\mathrm{tg}^{-1}\cdot\left(\frac{y_3-y_1}{x_3-x_1}\right)=-1.3027$，在旋转后的坐标系 X'-Y' 中，拟合接近真实曲线，再将坐标标架转回原处，于是

$f'(x_1)=\mathrm{tg}[\mathrm{tg}^{-1}(f'(x_1'))+\alpha]=-1.85899.$

由此充分说明旋转坐标在曲线拟合中的意义．

值得一提的是，这样的曲线拟合方法具有几何不变性，因此使程序不必作其他特殊处理就能适应图 5 那样，包括拐弯部份（如图中 $ABCD$ 及 $CDEF$ 区域）的复杂外形的变截面圆轴．

以上所讨论的曲线拟合问题，对函数曲线的拟合也同样适用（例如存在某些函数值变化剧烈的区域）．在本计算中突出的是坐标曲线，包括外形曲线的拟合，具体体现在β_3和β_1的计算中．

3．计算实例　本文的计算都是在TQ-16计算机上进行的．

1）空心圆锥体的计算　为检查方法和程序的可靠性，我们对空心圆锥体进行了计算．取其外形尺寸大致和发动机涡轮轴相近．计算结果和理论解[3]比较，无量纲化应力函数ψ值和剪应力$\tau\cdot\frac{2\pi}{M_t}$（$M_t$为扭矩）的最大相对误差都在1%以下．

2）复杂外形涡轮轴的计算　我们对工程上实用的边界形状复杂，并有小凹槽应力集中区的涡轮轴进行了计算．其纵剖面见图5．

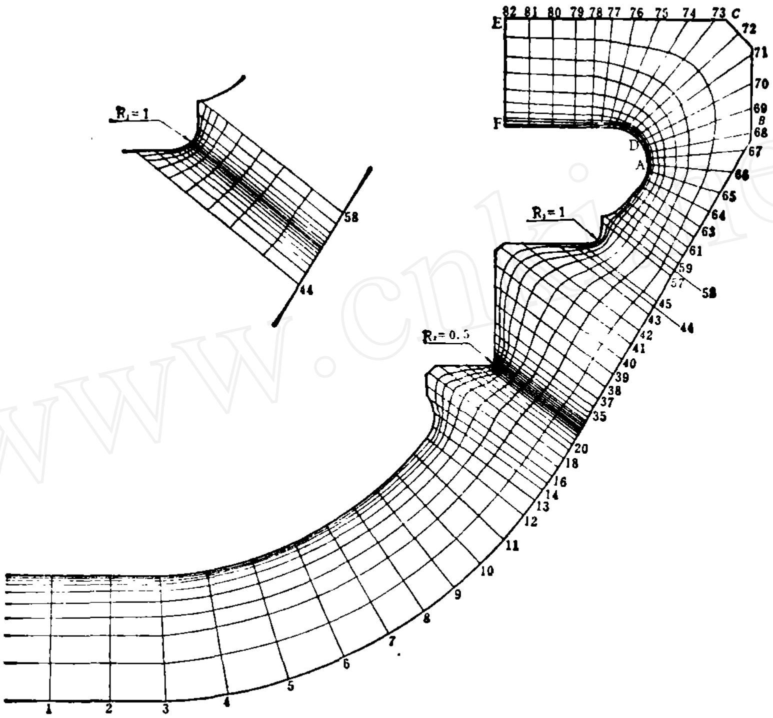

图 5

凹槽区剪应力最大值的计算结果（见表2）与光弹实验结果接近(对于$R_1=R_2=0.5$mm的情况，光弹实验结果第一凹槽最大剪应力为0.0193公斤/厘米^2）[4]．

表2中Ⅰ、Ⅱ分别为二种不同网格情况下计算的结果，在凹槽区，Ⅱ网格约比Ⅰ网格加密一倍，其他区域网格疏密相差不大．

计算所得的等应力函数线及沿轴内外壁剪应力分布分别见图5及图6．

本计算中取相同尺寸的空心圆柱轴的ψ值分布为端面边值．我们曾以按线性分布为端面边值的计算结果与其作比较（图7），比较说明，端面边值的影响衰减很快，大约经

表 2

R_1 (mm)	第一凹槽最大剪应力 τ_{max}(kg/cm²)		R_2 (mm)	第二凹槽最大剪应力 τ_{max}(kg/cm²)	
	I	II		I	II
0.4	0.18054×10^{-1}	0.1750×10^{-1}	0.5	0.1884×10^{-1}	0.1922×10^{-1}
0.5	0.1679×10^{-1}	0.1614×10^{-1}	0.5	0.1907×10^{-1}	0.1892×10^{-1}
1.0	0.12299×10^{-1}	0.12398×10^{-1}	0.5	0.19197×10^{-1}	0.1922×10^{-1}

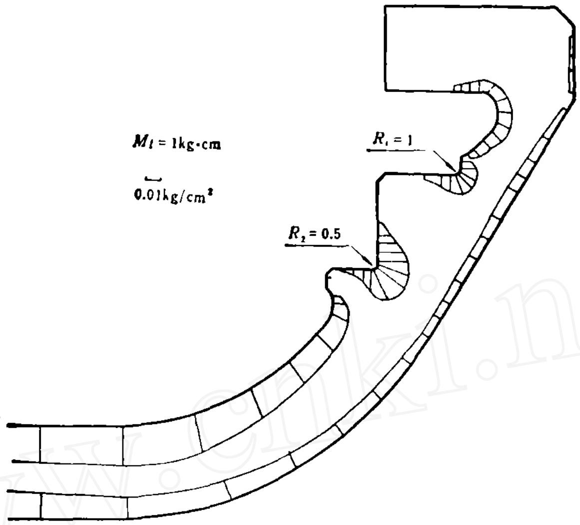

图 6

A.B　为一端边界

——　以空心圆柱轴的 ψ 分布为端面边值计算得的等应力函数线

----　以线性分布为端面边值计算得的等应力函数线

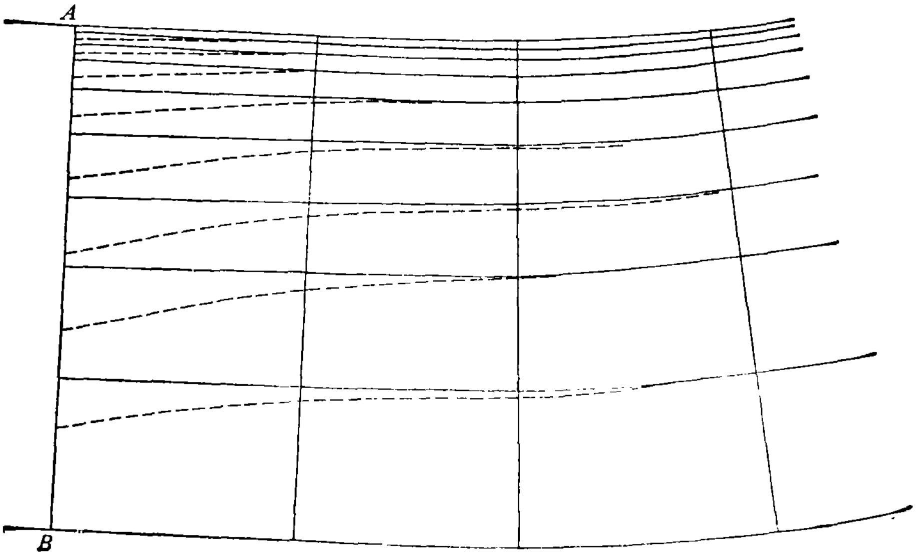

图 7

过相当于壁厚尺寸的距离后，此影响就可基本忽略了.

4. 结论

1）本程序是文献〔1〕所提出的方法的具体实现，通过它的使用，证实了该方法的一系列优越性，特别是使用任意的非正交曲线坐标，便于解决复杂曲线边界问题，大大提高了传统差分方法的适应性和灵活性.

2）本程序中采用局部旋转坐标系中的二次曲线拟合，是一个既能保证一定计算精度，同时适应性强的，有效、简便的方法，使本程序成为能适应各种复杂曲线边界的通用程序.

3）本程序使用二次曲线局部拟合坐标曲线. 应力函数 ψ 对 q^i 的各阶导数按三点不等距数值微分公式计算，这实际即是假定应力函数沿坐标曲线 q^i 的分布为二次函数. 因此，从近似精度来讲，它相当于有限元计算中的八节点等参单元. 但由于本程序所使用的方法，已直接推得在任意非正交曲线坐标系中 ψ 的求解方程，因此只需作一些简单的运算，就能得到线性代数方程的系数. 而在有限元的八节点等参元计算中形成刚度矩阵的计算量是比较大的.

4）本计算中取应力函数 ψ 为基本未知量，并且程序中采用迭代法求解，系数阵中只贮存非零元素，因此可以在内存量较小的计算机上使用. 例如：在内存为 $32K$ 的 TQ-16 机上，可同时计算 800 多个节点. 这对工程上的广泛使用是非常有利的.

5）由于采用任意的非正交曲线坐标，在程序中能简便地实现网格自动划分. 并且可以对不同区域按排不同疏密的网格，应用灵活.

(6) 计算结果除了给出节点的应力值，还给出全轴的等应力函数线，由此可以直接看出大致的应力分布及应力集中情况，有利于工程上改进设计.

本工作受到李敏华老师的指导，在此表示深切的谢意.

参 考 文 献

〔1〕 李敏华，变截面圆轴扭转问题用非正交曲线坐标的新解法，固体力学学报，2(1980).

〔2〕 吴仲华， 不等距数值微分公式和系数及其在偏微分方程数值解上的应用， 科学出版社，(1959).

〔3〕 Timoshenko S. and Goodier J. N., Theory of Elasticity, Second Edition, McGraw-Hill Co., (1951).

〔4〕 成都市水电勘测设计院，科学实验所，第二重型机械厂，四二〇厂，光弹实验报告，1977 年 7 月.

NUMERICAL CALCULATION OF TORSIONAL PROBLEM FOR CIRCULAR SHAFT WITH VARIABLE DIAMETERS USING NON-ORTHOGONAL CURVILINEAR COORDINATES

Ren Xiao-an

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)