

具有离散阻尼器的结构动力分析

田千里

(中国科学院力学研究所)

提要 本文论述了几种结合离散阻尼器于结构以增大其阻尼的方法。假设原结构是无阻尼的,用复数表示加在它的某些离散点上的阻尼器的刚度,推导出了一个对无阻尼结构的刚度阵作局部修改的运动方程,指出了用模态应变能法解决这个问题时的缺点,提出了用改进的直接频率响应积分法与模态组合法求解它。

一、引言

如所周知,增大阻尼是降低结构动力响应的一个关键,由之可以提高结构的抗振能力延长其疲劳寿命,但一般结构材料本身的内阻极小,结构阻尼主要来源于其接头摩擦。现代工程设计要求轻质量并尽量采用先进工艺如予应力混凝土、整体焊接、整体加工薄壁构件等使结构阻尼有明显下降的趋势,如文献〔1〕就指出螺接结构之临界阻尼比可达百分之十,而焊接结构的则最大只有百分之二。为此须要采用人工附加阻尼技术,利用高分子材料在转换态时的高阻尼将它与受力构件复合的阻尼层技术在国外被广泛应用于各领域,在国内也开始受到了重视,于初步应用中取得了良好的效果。但在结构上全面应用阻尼层技术无论从工时、重量、经济等方面看都不合算,因而应尽量把他们用在结构的某些离散点上,使用动力吸振器、隔振器、增加节点阻尼等均属于离散阻尼器的范畴。

使用动力吸振器的优点是不需要对原结构作多大修改就能取得显著的减振效果,缺点是需要一定的附加质量,而且它的吸振效果十分敏感的依赖于调制参数,后者是限制它被广泛采用的一个关键,因为无论是振源还是结构本身的参数在使用过程中都很难保证一成不变,而它们一变就会使吸振器偏离最优调制影响其吸振效果,为克服这一缺点,文献〔2〕在解决 SMS 同步气象卫星的振动时将太阳屏支持在硅橡胶衬套上作为辅助质量,将它的吸振频率选得低于结构的临界频率,结构共振时太阳屏处于静止状态,橡胶衬套承受较大变形耗散能量。解决吸振器对调制参数敏感的另一个办法是使用多个参数不同的吸振器,使它们的自然频率互相交错覆盖被压缩的结构共振频率,我们曾用这办法解决过一个悬臂结构的减震问题。

在刚性基础上安装刚性大的机器时不要求隔振器有很高的阻尼值,因为高阻尼会降低

本文于1981年8月7日收到。

低高频隔振效果。但是在柔性基础上安装带隔振器的机器时就不同了, 这时如果隔振器的阻尼值太小有时会使机器不稳定^[3]。如果在柔性基础上同时安装多台机器, 常规的隔振设计理论就不够用了, 必须综合考虑它们相互之间以及它们与基础之间的耦合作用, 这时阻尼对响应起关键性的作用。文献[4]曾指出: 结构振动时其能量耗散有百分之九十是集中于节点上, 因而增大节点阻尼是降低结构振动水平的一个重要手段。增大节点阻尼的办法一是为文献[2]所作的, 将原结构的某些刚性节点改为粘弹性节点, 一般而言这样的节点应尽可能的选择在结构的赘余自由度上, 例如纽约的外贸中心大楼楼板桁架与立柱连接处的粘弹性剪切键^[5]。另一个办法是在原来的结构上额外增加一些粘弹性节点, 例如文献[6]提出的粘弹性键, 文献[1]设计的气罐抗震阻尼器等。以上各种措施均作用于结构的某些离散点上, 因而附加重量不多, 费用不大, 但它们的阻尼值最终反映为结构的模态阻尼, 如果安排得好就可能用较小的代价取得良好的减振效果, 这就要求在设计阶段将离散阻尼器反应到结构的数学模型中去, 调整它们的位置与参数以寻求一个最佳结果, 文献[7]曾研究过支点阻尼对梁的响应幅度的影响, 调节支点刚度与阻尼找出一个在相当宽的频带范围内使梁的幅度响应达最小的优化条件。可惜, 迄今为止还没有一个能提供复杂结构设计用的这种计算方法。现有的通用有限元程序均只能分析具有比例阻尼矩阵的结构, 而人工阻尼结构的阻尼矩阵往往是非比例的, 其动力分析比较困难, 是近年来国际上颇为重视的一个课题。1980年文献[8]提出了一个将模态应变能与 NASTRAN 通用有限元程序结合起来计算约束阻尼层结构的方法, 受到了普遍的重视, 被称为目前处理这类问题的最有吸引力的方法^[9]。本文通过一个两自由度体的例题发现用这个方法计算具有大的离散阻尼的结构时会出现严重误差。解决离散阻尼结构的计算问题还可以用直接频响积分法和复特征解法, 但均各有严重缺点, 因而文献[8]、[9]均对之持否定态度, 针对这个问题我们提出了两个克服其缺点的改进方法。

二、结构的运动方程

将一个大型结构分解为 p 个子结构, 取其中任意两个子结构“ s ”与“ $s+1$ ”示于图 1。

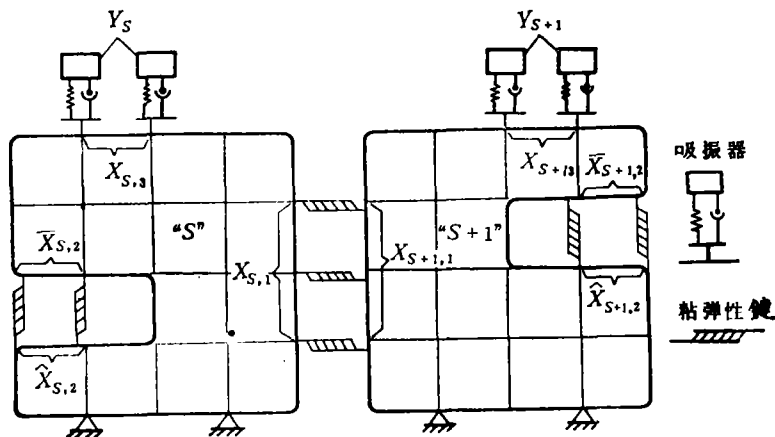


图1 子结构阻尼布置示意

定义 X^T 为在总体坐标系中, 整个系统的节点位移矢量.

$$X^T = [\dots, X_s^T, X_{s+1}^T, Y_s^T, Y_{s+1}^T, \dots] \quad (1)$$

下标 s 代表该矢量属于第 s 个子结构;

X_s 为第 s 个子结构的节点位移矢量;

Y_s 为第 s 个子结构上吸振器位移矢量,

它们分别通过投影矩阵 A_s 与 B_s 与矢量 X 相联系

$$X_s = A_s X \quad (2)$$

$$Y_s = B_s X \quad (3)$$

A_s 及 B_s 均具有 $[0 \dots, 0, I, 0 \dots 0]$ 的形式, 它们分别在对应于 X 矢量中 X_s 与 Y_s 的部位具有一个单位矩阵, 其余的元素均为零. 如图 1 所示, 任一子结构上均加有三种离散阻尼器.

1) 在子结构“ s ”与“ $s+1$ ”的公共接合面间塞入一系列粘弹性链杆, 其两端点的位移矢量为 $X_{s,1}$ 与 $X_{s+1,1}$.

2) 在子结构“ s ”的两平行部件间塞入一系列粘弹性链杆, 其两端点之位移矢量为 $\bar{X}_{s,2}$ 与 $\hat{X}_{s,2}$.

3) 在子结构“ s ”的边界上的某些反节点附加动力吸振器, 其接触点之位移矢量为 $X_{s,3}$, 与之对应的吸振器位移矢量为 Y_s .

以上各矢量分别通过与 A_s 及 B_s 相似的各自的投影矩阵与系统的矢量 X 相联系.

$$X_{s,1} = A_{s,1} X \quad (4)$$

$$X_{s+1,1} = A_{s+1,1} X \quad (5)$$

$$\bar{X}_{s,2} = \bar{A}_{s,2} X \quad (6)$$

$$\hat{X}_{s,2} = \hat{A}_{s,2} X \quad (7)$$

$$X_{s,3} = A_{s,3} X \quad (8)$$

$$A_{s,1} - A_{s+1,1} = P_{s,1} \quad (9)$$

$$\bar{A}_{s,2} - \hat{A}_{s,2} = P_{s,2} \quad (10)$$

$$A_{s,3} - B_s = P_{s,3} \quad (11)$$

定义三种阻尼器之复刚度阵

$$T_{s,r} = \left[\begin{array}{c} k_{s,r} (1 + i\eta_{s,r}) \end{array} \right]_{r=1,2,3} \quad (12)$$

$i = \sqrt{-1}$, 下标 r 代表该量属于第 r 种阻尼器, $k_{s,r}$ 为第 r 个阻尼器之链杆刚度, $\eta_{s,r}$ 为它的损耗因子.

当系统振动时, 第一种阻尼链杆之应变能为

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{2} \sum_1^p \{X_{s,1} - X_{s+1,1}\}^T T_{s,1} \{X_{s,1} - X_{s+1,1}\} \\ &= \frac{1}{2} X^T \sum_1^p [P_{s,1}^T T_{s,1} P_{s,1}] X \end{aligned} \quad (13)$$

相似地, 第二、三种阻尼链杆之应变能为

$$U_2 = \frac{1}{2} X^T \sum_1^p [P_{s,2}^T T_{s,2} P_{s,2}] X \quad (14)$$

$$U_3 = \frac{1}{2} X^T \sum_1^p [P_{s,3}^T T_{s,3} P_{s,3}] X \quad (15)$$

$$\text{令} \quad T_r = \sum_1^p P_{s,r}^T T_{s,r} P_{s,r} \quad (r = 1, 2, 3) \quad (16)$$

第 s 个子结构之刚度阵为 K_s , 其应变能为

$$U_s = \frac{1}{2} X_s^T K_s X_s \quad (17)$$

$$\text{令} \quad K_0 = \sum_1^p A_s^T K_s A_s \quad (18)$$

则系统之总应变能为

$$U = \sum_1^3 U_r + \sum_1^p U_s = \frac{1}{2} X^T \left[K_0 + \sum_1^3 T_r \right] X \quad (19)$$

当系统之基础以 \dot{X}_0 之速度运动时其总动能为

$$E = \frac{1}{2} \sum_1^p \{ \dot{X}_s + \{1\} \dot{X}_0 \}^T M_s \{ \dot{X}_s + \{1\} \dot{X}_0 \} \\ + \frac{1}{2} \sum_1^p \{ \dot{Y}_s + \{1\} \dot{X}_0 \}^T R_s \{ \dot{Y}_s + \{1\} \dot{X}_0 \} \quad (20)$$

M_s 为子结构 s 之质量矩阵

R_s 为子结构 s 上的吸振器质量组成之对角阵

$$\text{令} \quad \sum_1^p A_s^T M_s A_s + \sum_1^p B_s^T R_s B_s = M \quad (21)$$

$$\text{则} \quad E = \frac{1}{2} \{ \dot{X} + \{1\} \dot{X}_0 \}^T M \{ \dot{X} + \{1\} \dot{X}_0 \} \quad (22)$$

将 (19), (22) 代入拉格郎日运动方程得

$$M \ddot{X} + \left[K_0 + \sum_1^3 T_r \right] X = -M \{1\} \ddot{X}_0 \quad (23)$$

$$\{1\}^T = [11 \cdots 1]$$

$$\text{令} \quad T = \sum_1^3 T_r$$

再将它的实部与虚部分开

$$T = T_R + iT_I$$

$$\text{则得} \quad M \ddot{X} + [K_0 + T_R] X + iT_I X = -M \{1\} \ddot{X}_0 \quad (24)$$

本文假设离散阻尼器位于子结构的边界上, 并且互不重叠, 将它们的位移矢量按顺序排

列如下:

$$\mathbf{X}_s^T = [\mathbf{X}_{s,b}^T, \mathbf{X}_{s,i}^T] \quad (25)$$

$$\mathbf{X}_{s,b}^T = [\mathbf{X}_{s,1}^T, \bar{\mathbf{X}}_{s,2}^T, \hat{\mathbf{X}}_{s,2}^T, \mathbf{X}_{s,3}^T, \mathbf{X}_{s,R}^T] \quad (26)$$

下标“b”代表边界自由度,下标“i”代表内部自由度,下标“1,2,3”分别代表三种阻尼器,下标“R”代表未加阻尼器之节点自由度.

由(1), (9)–(11), (16), (25), (26)诸式可得

$$\mathbf{TX} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_s & -\mathbf{T}_{s,1} & -\mathbf{T}_{s,3} & \\ & & & \\ -\mathbf{T}_{s,1} & \mathbf{T}_{s+1} & & -\mathbf{T}_{s+1,3} \\ & & & \\ -\mathbf{T}_{s,3} & & \mathbf{T}_{s,3} & \\ & -\mathbf{T}_{s+1,3} & \mathbf{T}_{s+1,3} & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s,b} \\ \mathbf{X}_{s,i} \\ \mathbf{X}_{s+1,b} \\ \mathbf{X}_{s+1,i} \\ \mathbf{Y}_s \\ \mathbf{Y}_{s+1} \end{bmatrix} \quad (27)$$

$$\mathbf{T}_s \mathbf{X}_{s,b} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{s,1} & & & \\ & \mathbf{T}_{s,2} & -\mathbf{T}_{s,2} & \\ & -\mathbf{T}_{s,2} & \mathbf{T}_{s,2} & \\ & & & \mathbf{T}_{s,3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_{s,1} \\ \bar{\mathbf{X}}_{s,2} \\ \hat{\mathbf{X}}_{s,2} \\ \mathbf{X}_{s,3} \\ \mathbf{X}_{s,R} \end{bmatrix} \quad (28)$$

整个系统之总自由度数等于各子结构之自由度数 N_s 与在它们上面附加的吸振器的自由度数 $N_{s,3}$ 之和

$$N = \sum_1^p N_s + \sum_1^p N_{s,3}$$

三、运动方程之解法

式(24)为一复数矩阵方程,目前大体上有三种解法

1. 直接频率响应积分法

设基础运动为简谐运动即

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 = \bar{\bar{\mathbf{X}}}_0 e^{i\omega t}$$

则式(24)经福氏变换后为

$$[-\mathbf{M}\omega^2 + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{T}_R] + i\mathbf{T}_I] \bar{\bar{\mathbf{X}}}(\omega) = -\mathbf{M}\{1\} \bar{\bar{\mathbf{X}}}_0(\omega) \quad (30)$$

在每一个频率对位移阻抗矩阵求逆,可得

$$\bar{\bar{\mathbf{X}}}(\omega) = -\mathbf{H}(\omega) \mathbf{M}\{1\} \bar{\bar{\mathbf{X}}}_0(\omega) \quad (31)$$

其中

$$\mathbf{H}(\omega) = [-\mathbf{M}\omega^2 + [\mathbf{K}_0 + \mathbf{T}_R] + i\mathbf{T}_I]^{-1} \quad (32)$$

这个方法很简单，但要求每个频率对复数阻抗矩阵求逆，工作量太大，所以文献 [9]—[11] 均对之持否定态度。

一般我们只对包括离散阻尼作用点在内的 m 个自由度之位移感兴趣， $m \ll N$ ，我们称这 m 个自由度为有关自由度，其位移矢量为

$$\hat{X} = P\bar{X} \tag{33}$$

P 为联系 \hat{X} 与 \bar{X} 的投影矩阵，它的每一行只有在对应于 \hat{X} 的一个元素为 1，其余的元素均为零，矩阵为 $m \times N$ 阶。

令
$$-M\{\ddot{1}\}X_0(\omega) = \bar{F}(\omega) \tag{34}$$

$$[-M\omega^2 + [K_0 + T_R]]^{-1} = H_0(\omega) \tag{35}$$

则由 (30)，(33) — (35) 可得

$$\bar{X}(\omega) = -iH_0T_I\bar{X}(\omega) + H_0\bar{F}(\omega) \tag{36}$$

$$\hat{X}(\omega) = -iPH_0T_I\bar{X}(\omega) + PH_0\bar{F}(\omega) \tag{37}$$

注意到

$$T_I\bar{X}(\omega) = P^T\hat{X}(\omega) \tag{38}$$

$T_I\hat{X}(\omega)$ 为删除有关自由度以外的行与列的缩聚的 $T_I\bar{X}(\omega)$

令 $PH_0P^T = \hat{H}_0$ 为 $m \times m$ 阶缩聚的频响矩阵

则
$$\hat{X}(\omega) = [I + i\hat{H}_0\hat{T}_I]^{-1}PH_0\bar{F}(\omega) \tag{39}$$

因为 $m \ll N$ ，故通过这一变换计算量大幅度降低，还须要指出的是 H_0 代表组合结构无阻尼时之频响函数，可以由通用有限元程序如 SAP IV 等求得，如所周知阻尼对结构之自然频率影响极小，而我们只对结构自然频率附近的响应感兴趣，因而在用 SAP IV 计算出无阻尼组合结构之自然频率后，只须要在它的附近计算若干频率的结构响应，这样一来无论是复矩阵的阶数还是需要计算响应的频率数均将大大减少，因而克服了它的缺点。

2. 模态应变能法

1962 年文献 [12] 提出了近似计算阻尼夹层结构模态损耗因子 η_n 的模态应变能法， η_n 等于 n 阶振型振动时阻尼层之损耗能与结构的应变能之比，在我们这里就是

$$\eta_n = \frac{V_n^T T_I V_n}{V_n^T K V_n} \tag{40}$$

这里

$$K = K_0 + T_R$$

V_n 为无阻尼组合结构的第 n 阶振型，文献 [8] 将这方法与通用有限元程序结合起来计算了阻尼夹层梁及圆环，发现即使阻尼层材料之损耗因子达 1.0 仍然有足够之精度。

这个方法的优点是只须利用现有的通用有限元程序计算出每阶振型时各部件的应变能即可算出组合结构之振型损耗因子，因而很受欢迎。应当指出与式 (30) 中 T_I 被视为局部修改矩阵时，用摄动法作一次近似就得到了式 (40)，因而当具有较大的集中阻尼时用它计算可能会出现较大误差，通过如图 2 的例题说明了这一点。

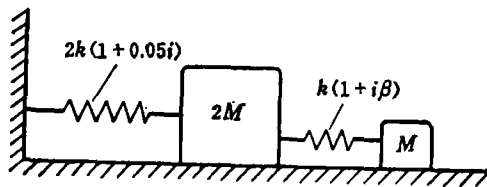


图 2 具有复刚度的二自由度体系

可算出组合结构之振型损耗因子，因而很受欢迎。应当指出与式 (30) 中 T_I 被视为局部修改矩阵时，用摄动法作一次近似就得到了式 (40)，因而当具有较大的集中阻尼时用它计算可能会出现较大误差，通过如图 2 的例题说明了这一点。

二质量如图 2，一弹簧之复刚度为

$2k(1+0.05i)$, 另一为 $k(1+\beta i)$, 当 β 取不同数值时, 我们分别用模态应变能法与精确的复特征解法计算了它的 1, 2 阶振型损耗因子 η_1, η_2 , 现将其结果列为下表

表 1 振型损耗因子随弹簧阻尼变化情况表

η_r \ β	0.2	0.4	0.6	1.0
η_1 精确解	0.100	0.150	0.133	0.186
η_1 近似解	0.100	0.167	0.233	0.370
η_2 精确解	0.150	0.288	0.433	0.752
η_2 近似解	0.167	0.283	0.416	0.683

当 $\beta=1.0$ 时, η_1 之误差达百分之百, 可见用模态应变能法时必须小心。

3. 复特征解法

复特征解法的工作量是无阻尼特征解的五到十倍^[10], 因而一般多不用它解大型结构, 本文在子结构水平上用 SAPIV 程序计算各子结构的约束与被约束模态, 以之为雷次矢量对整个系统用固定界面模态综合法进行综合, 由于模态截尾使工作量大大降低。

$$\text{令 } X_s = \begin{Bmatrix} I & 0 \\ \vec{\phi}_{s,b} & \vec{\phi}_{s,i} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} X_{s,b} \\ q_{s,i} \end{Bmatrix} = \beta_s q_s \quad (41)$$

其中 $\vec{\phi}_{s,b}$ 为子结构“s”的约束模态 $\vec{\phi}_{s,i}$ 为子结构“s”的截尾后的固定边界正则模态(被约束模态)

$$\text{令 } \beta = \begin{bmatrix} \beta_s & & & & \\ & \beta_{s+1} & & & \\ & & I & & \\ & & & I & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$q^T = [\dots, q_s^T, q_{s+1}^T, Y_s^T, Y_{s+1}^T, \dots] \quad (43)$$

$$\text{则 } X = \beta q \quad (44)$$

将(44)代入(24)再前乘以 β^T 则得

$$m \ddot{q} + [\beta^T K_0 \beta + \beta^T T \beta] q = -\beta^T M \{1\} \ddot{X}_0 \quad (45)$$

设模态截尾后保留前 n_s 阶模态, 故 β_s 为 $N_s \times n_s$ 阶矩阵, 令 $n = \sum_{s=1}^p (n_s + N_{s,3})$, 则 β 为

$N \times n$ 阶矩阵, 故经过截尾的模态综合, 系统之运动方程由 $N \times N$ 阶降为 $n \times n$ 阶, 由于一般仅需保留少数被约束模态即可得到足够精度之低频响应, 故 $n \ll N$, 因而用复特征解法求式(45)之复特征值与复特征矢量, 再由复模态叠加法计算其强迫响应, 工作量就不太大了。

注意到离散阻尼器只作用在子结构的边界点上, T 阵中对应于内部自由度之行与列均为零, 故 $\beta^T T \beta = \hat{T}$ 为一 $n \times n$ 阶缩聚方阵, 具有与式(27)中 T 阵完全相同的形式, 只是由于用截尾的模态座标代替结构的内部自由度, 所以删除了一些元素为零的行与列。式(45)左端均为对称矩阵, 故其复特征矢量仍满足正交性条件, 用 Q.R. 程序计算出式(45)左端齐次方程的正则化了的复特征矢量矩阵 V , 引入复模态座标变换 $q = VZ$

将它代入(45)式, 前乘以 \mathbf{V}^T , 则得到一组不耦合方程

$$\begin{aligned} \dot{Z}_r(t) + \omega_r^2(1 + i\eta_r)Z_r(t) &= -\mathbf{V}_r^T \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{M} \{1\} \ddot{X}_0(t) \\ &= -\sum_i \sum_j V_{r,i} \beta_{i,j} M_j \ddot{X}_0(t) \quad r = 1, 2, \dots, m. \end{aligned} \quad (46)$$

对式(46)进行福氏变换, 并令

$$\bar{P}_r(\omega) = -\sum_i \sum_j V_{r,i} \beta_{i,j} M_j \bar{X}_0(\omega) = \bar{D}_r \bar{X}_0(\omega) \quad (47)$$

$$\text{则得} \quad \bar{Z}_r(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} Z_r(t) e^{-i\omega t} dt = \bar{H}_r(\omega) \bar{P}_r(\omega) = \bar{H}_r(\omega) \bar{D}_r \bar{X}_0(\omega) \quad (48)$$

$$\bar{H}_r(\omega) = \frac{1}{\omega_r^2(1 + i\eta_r) - \omega^2} \quad (49)$$

$\omega_r^2(1 + i\eta_r)$ 为式(45)左端齐次方程之第 r 阶复特征值, $V_{r,i}$ 为矩阵 \mathbf{V} 的第 r 行第 i 列的元素

$\beta_{i,j}$ 为矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 的第 i 行第 j 列的元素

式(48)为模态座标之频响函数, 由(44)结构的第 n 个物理座标位移响应为

$$\bar{X}_n = \sum_i \beta_{n,i} \left(\sum_r V_{i,r} \bar{H}_r(\omega) \bar{P}_r(\omega) \right) \quad (50)$$

4. 随机振动响应

由式(49)可以看出 $H_r(\omega)$ 之分母具有两个根 $\omega_{1,2} = \pm \omega_r(1 + i\eta_r)^{1/2}$, 根 $-\omega_r(1 + i\eta_r)^{1/2}$ 位于复平面内实数轴之下, 故 $H_r(\omega)$ 在负频率域是不稳定的, 为了获得在 $-\infty < \omega < +\infty$ 整个频率域中均是稳定的解, 文献[12]建议用一对共轭值之和代替(46)的解, 即

$$\begin{aligned} Z_r(\omega) &= \bar{Z}_r(\omega) |_{\omega>0} + \hat{Z}_r(\omega) |_{\omega<0} \\ &= \bar{H}_r(\omega) \bar{P}_r(\omega) |_{\omega>0} + \hat{H}_r(\omega) \hat{P}_r(\omega) |_{\omega<0} \end{aligned} \quad (51)$$

下面以悬臂结构为例计算它的随机响应, 对于悬臂结构通常其最大弯矩多发生在根部, 当使用固定界面模态综合法时, 其根部弯矩可分为两部分, 一部分是由约束自由度引起的

$$\bar{M}_1(\omega) = \sum_{j=1}^n M_{j,b} X_{j,b} = \sum_{j=1}^n M_{j,b} [\bar{\mathbf{V}}_j \bar{Z} |_{\omega>0} + \hat{\mathbf{V}}_j \hat{Z} |_{\omega>0}] \quad (52)$$

这里下标 j 代表第 j 个接触自由度, 下标 b 代表它位于边界上, $\bar{\mathbf{V}}_j$ 为矩阵 \mathbf{V} 的第 j 行, $\hat{\mathbf{V}}_j$ 为它的共轭, $M_{j,b}$ 为 $X_{j,b} = 1$, 其它约束自由度均固定时结构根部之静弯矩, 可由 SAP IV 或静力试验决定之. 另一部分是结构各阶被约束模态引起的根部动态弯矩

$$M_2(\omega) = \sum_{k=1} \omega_k^2 \mathbf{h}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\beta}_k (\bar{\mathbf{V}}_k \bar{Z} + \hat{\mathbf{V}}_k \hat{Z}) \quad (53)$$

这里 \mathbf{h} 为各质点距结构根部之高度组成之矢量, $\boldsymbol{\beta}_k$ 为矩阵 $\boldsymbol{\beta}$ 中之第 k 列, $\bar{\mathbf{V}}_k$ 为矩阵 \mathbf{V} 的第 k 行. $\hat{\mathbf{V}}_k$ 为它的共轭.

$$\text{令} \quad \omega_k^2 \mathbf{h}^T \mathbf{M} \boldsymbol{\beta}_k = \mathbf{C}_k \quad (54)$$

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{M}}(\omega) &= M_1(\omega) + M_2(\omega) \\ &= \sum_n \sum_j M_{j,b} [\bar{\mathbf{V}}_{n,j} \bar{Z}_n(\omega) |_{\omega>0} + \hat{\mathbf{V}}_{n,j} \hat{Z}_n(\omega) |_{\omega<0}] \end{aligned}$$

$$+ \sum_n \sum_k C_k [\bar{V}_{n,k} \bar{Z}_n(\omega) |_{\omega>0} + \hat{V}_{n,k} \hat{Z}_n(\omega) |_{\omega<0}]$$

$$\text{令} \quad \sum_k C_k \bar{V}_{n,k} + \sum_j M_{j,b} \bar{V}_{n,j} = \bar{B}_n \quad (55)$$

$$\sum_k C_k \hat{V}_{n,k} + \sum_j M_{j,b} \hat{V}_{n,j} = \hat{B}_n \quad (56)$$

$$\text{则} \quad \bar{M}(\omega) = \sum_n \bar{B}_n \bar{Z}_n(\omega) |_{\omega>0} + \sum_n \hat{B}_n \hat{Z}_n(\omega) |_{\omega<0} \quad (57)$$

弯矩之功率谱

$$S_{\bar{M}}(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{T} \bar{M} \hat{M} \right) \quad (58)$$

均方弯矩

$$\sigma_{\bar{M}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_{\bar{M}}(\omega) d\omega \quad (59)$$

将(48)代入(57)再代入(58)(59), 令

$$\bar{B}_n \hat{B}_n \bar{D}_n \hat{D}_n = A_{m,n} + iB_{m,n} \quad (60)$$

$$\hat{B}_n \bar{B}_n \hat{D}_n \bar{D}_n = A_{m,n} - iB_{m,n} \quad (61)$$

则得

$$\sigma_{\bar{M}}^2 = \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A_{m,n} + iB_{m,n}) S_{\ddot{x}_0 \ddot{x}_0}(\omega) d\omega}{[\omega_n^2(1 - i\eta_n) - \omega^2][\omega_n^2(1 + i\eta_n) - \omega^2]} \Big|_{\omega>0} + \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(A_{m,n} - iB_{m,n}) S_{\ddot{x}_0 \ddot{x}_0}(\omega) d\omega}{[\omega_n^2(1 + i\eta_n) - \omega^2][\omega_n^2(1 - i\eta_n) - \omega^2]} \Big|_{\omega<0} \right] \quad (62)$$

当 $S_{\ddot{x}_0 \ddot{x}_0}(\omega)$ 在整个频率域内变化不大时, 由留数积分可以求得

$$\sigma_{\bar{M}}^2 = - \sum_m \sum_n \frac{[(B_{m,n} a_m - A_{m,n} b_n)(\omega_m^2 - \omega_n^2) - (\omega_n^2 \eta_m + \omega_m^2 \eta_n)(A_{m,n} a_m + B_{m,n} b_n)]}{2\omega_m(\alpha_m^2 + b_n^2)[\omega_n^4(1 + \eta_n^2) - 2\omega_m^2 \omega_n^2(1 - \eta_m \eta_n)] + \omega_n^4(1 + \eta_n^2)} \times S_{\ddot{x}_0 \ddot{x}_0} \quad (63)$$

这里

$$a_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{1 + \sqrt{1 + \eta_n^2}}$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \eta_n^2} - 1}$$

当频率 ω_m, ω_n 分离较远而 $\eta_m < 0.1, \eta_n < 0.1$ 时式(63)中交叉项可以略去, 得

$$\sigma_{\bar{M}}^2 \doteq \sum_m \frac{A_{m,m} S_{\ddot{x}_0 \ddot{x}_0}}{4\eta_m \omega_m^3} \quad (64)$$

它与文献[12]之式(2.130)吻合。

四、例 题

唐山地震后整个地区高压电气设备受到严重破坏, 很多悬臂式结构沿根折断, 一机部抗震办公室与无锡减振器厂共同设计研制了在悬臂结构底部安装的水平剪切式隔振器, 悬臂结构本身的阻尼极小只有 0.04 左右, 而隔振器的阻尼较大, 集中于结构底部。因而

具有明显的非比例阻尼, 无法利用现有的通用程序进行动力分析, 用我们的程序对其响应进行了计算, 其结果如下表。

表2 悬臂顶部一、二阶最大振幅(公分)

振 幅 β	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
一 阶	13	7	5	3.8	3.4
二 阶	1.4	0.95	0.95	0.9	0.85

在未加隔振器前结构之基频为 4.1 赫, 基频共振时顶部最大振幅为 9 公分, 加隔振器后增加了一个隔振系统的基频, 当阻尼器之损耗因子 $\beta < 0.4$ 时加隔振器虽能使结构的共振幅度降低, 但隔振系统的一阶共振却使结构顶部有过大的振幅, 所以隔振器之阻尼不能太小。

五、结 论

为了进行带离散阻尼器的结构动力分析, 本文对模态应变能法提出了异议, 建议用改进的直接频响积分法与复特征解法处理这个问题。离散阻尼归结为对结构作局部修改, 不断地调节离散阻尼的位置与参数, 即不断对结构作局部修改, 我们相信就可以找到一个使动力响应最小的优化条件。

参 考 文 献

- (1) Kunieda M. and Sakurai H., Application of the Oil Damper to Spherical Tank in Earthquake Resistant Design. Bull, J.S.M.E, 18, 122 (1975), 807—812.
- (2) Hobbs G.K., Kuyper D.J. and Brooks J.J., Response Analysis of A System with Discrete Dampers Shock and Vibration Bull, 46, Part 4, (1976), 137—152.
- (3) Rivin E.J., Trans. A.S.M.E. Jour. M.D. 101, Oct (1979), 682.
- (4) Beards C.F., Damping in Structural Joints Shock and vibration Digest 11 (9) Sep (1979), 35—41.
- (5) Mahmoodi, P., Structural Dampers, ASCE J. Struct. Div.. (1969), 1661—1672.
- (6) Johns D.G. and Nashif A.D., Damping of Structures by Viscoelastic Links. Shock and Vibration Bull. 36, Part 4, (1966), 9—16.
- (7) Beards C.F. and Bermingham P.J., The Effects of Frictional Damping on the Vibration of an Elastically Supported Beam. Symp. Nonlinear Dynam., Loughborough, England, Paper E7 (1972).
- (8) Johnson C.D., Kienholz D.A. and Rogers L.C., Finite Element Prediction of Damping in Structures with Constrained Viscoelastic Layers. Shock and Vibration Bull., 51 (1981).
- (9) Holman R.E. and Tanner J.M., Finite-Element Modeling Techniques for Constrained Layer Damping AIAA/ASME/ASCE/ASH 22th SDM Conf., (1981), 8—16.

THE DYNAMIC ANALYSIS OF A STRUCTURE HAVING DISCRETE DAMPERS

Tian Qian-li

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

Several methods for augmenting the damping of a structure by incorporating discrete dampers on it have been reviewed.

By using complex numbers to represent the rigidity of dampers, the motion equation of the system in the form of localized modification on the undamped structure was deduced.

After pointing out the drawbacks of the modal strain energy method, the author presents the improved direct frequency response method and the complex eigenvalue method.