

# 均质旋转流体绕圆柱流动的实验研究

柳 绮 年 贾 复

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文报道了对均质旋转流体绕圆柱流动的实验, 实验中测量了表征流动形态的阻流系数(定义见正文)与 Rossby 数及柱相对高度等参数的关系。观察到的流动沿旋转轴方向的变化看来是一有趣而值得进一步探讨的课题。

## 一、引 言

在柯氏 (Coriolis) 力占主导地位的旋转流体系统中, 流体的缓慢运动呈现出强烈的二维性, 在沿转轴 ( $z$  轴) 方向诸流动元的变化较之在垂直于此轴的平面内的变化小得多。当表征惯性力与柯氏力之比的 Rossby 数  $\epsilon$  趋于零的极限情况下, Proudman 和 Taylor 于本世纪初先后在理论上指出有  $\partial \mathbf{u} / \partial z = 0$  的结果; 随后 Taylor<sup>[1]</sup> 在装有液体的快速旋转盘中缓慢拖动一高度不及水深的圆柱, 在圆柱顶上的流体清楚地显示出是与固体圆柱本身一起运动, 从而在实验上证实了上述 Taylor-Proudman 定理, 后人亦将这种现象称为 Taylor 柱。

由于在行星大气、地球海洋等旋转流体系统中 Taylor 柱显见得是地形影响抽象化的典型问题, 具有基本性意义。特别是自从 Hide<sup>[2]</sup> 提出观察到的木星大红斑 (Great Red Spot) 是木星大气中的 Taylor 柱以及许多海洋研究者提出大洋涡旋部分地是由于地形对旋转流体影响而形成的设想以来, 对于 Taylor 柱问题的实验及理论研究再度活跃起来。对于有限 Rossby 数、有限地形高、层结等因素条件下的 Taylor 柱均进行了不少分析的、数值的及实验的研究, 前人的工作几乎都承认和验证了经典的 Taylor 柱存在。在分析的及数值的研究工作方面, 最近 Bannon 在文献 [3] 中作了扼要的综述, 并对正压流体系统用浅水方程进行数值模拟, 其结果再现了实验上观察到的某些流型, 如: 流型的上下游不对称和随着 Rossby 数的减小流体从不受阻塞地爬越地形到地形局部地以致完全地堵塞流动形成 Taylor 柱的过程。在实验方面, Hide、Ibbson 及 Lighthill<sup>[4]</sup> 考察了圆球的 Taylor 柱沿  $z$  轴轴向的变化, 即在远场, Taylor 柱不象理想的经典 Taylor 柱那样垂直地无穷延伸, 而是沿柱高方向 ( $z$  轴) 向流动的下流倾斜, 其长度约为  $1/\epsilon$  量级。他们在圆柱体的 Taylor 柱的粗略考察中观察到一些不稳定现象。Davis<sup>[5]</sup> 进一步考察了在分层流体中圆球 Taylor 柱问题, 发现其向流动下游倾斜更大并且长度大大缩短。

鉴于 Taylor 柱现象是一仍有许多物理过程不清楚的复杂问题, 本文试图对于圆柱造

成的 Taylor 柱现象(由于圆柱绕流有更为复杂的情况, [4] 文仅简单提及)进行较为细致的观察, 讨论了用流线显示技术表明旋转流体系统中流体爬越或绕过(采用堵塞系数  $B$  作为标准)圆柱的特性随 Rossby 数及圆柱相对高度的变化关系. 对于前者得到  $B$  与 Rossby 数大约为对数关系; 对于后者,  $B$  与相对柱高大约为线性关系. 实验中还观察到在小而有限 Rossby 数下, 流动具有明显的沿  $z$  方向的变化, 并对某一典型的 Rossby 数及相对高给出  $B$  沿  $z$  轴的变化情况. 在实验中观察到流动的三维性是饶有兴趣的, 本文试图对此给出一个物理的描述, 但更全面地研究 Taylor 柱问题尚需作进一步的实验及理论工作. 最后对于[6]中讨论过的陆架地形绕流问题, 给出了类似的三维性的示例.

## 二、问题的叙述、实验装置及步骤

相对于一绕其  $z$  轴以常角速度  $\Omega = \Omega(0, 0, \Omega)$  旋转的坐标系, 不可压缩均质流体定常运动的基本方程为

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} + 2\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

其中  $p$  为压力被密度除的所谓动压力(包括了重力及离心力造成的压力在内),  $\mathbf{u}$  为速度向量,  $\nu$  为流体粘性系数.

对于运动方程(1)两端取旋度记涡量为

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

则有涡量形式的基本方程

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} - \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = 2\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \quad (3)$$

以圆柱直径  $a$  为特征长度, 以流动系统的平均速度  $U$  为特征速度, 使诸流动元及基本方程无量纲化后有涡量基本方程为

$$\varepsilon \{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\boldsymbol{\omega} - (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}\} - E \nabla^2 \boldsymbol{\omega} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \quad (4)$$

方程(4)中诸量均为以  $a$  及  $U$  无量纲化后的量,

$$\varepsilon \text{ 为 Rossby 数: } \varepsilon = \frac{U}{2\Omega a} = \frac{R_0}{2}$$

$$E \text{ 为 Ekman 数: } E = \frac{\nu}{2\Omega a^2}$$

当  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $E \rightarrow 0$  从(4)则有 Taylor-Proudman 定理

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} = 0$$

并为著名的 Taylor 实验所证明. 然而, 除了上述极限情况下, 流动呈现漂亮的二维特性以外, 一般出现许多复杂的流动过程. 例如当 Rossby 数虽小但不趋于零或者为有限值时, 或者地形相对高度改变时, 经典意义下的所谓 Taylor 柱并不总能形成, 可以想像流动会呈现包括从完全爬越到完全绕过物体以及有爬有绕的许多中间状态在内的一个“谱”, 另一方面, 流动的二维性亦会在一般的情况下“退化”, 呈现出不同程度沿  $z$  轴的变化——即

流动具有三维特性。

本实验是在力学所旋转实验台上进行的,该转台的结构及性能曾在文献[6]中介绍。实验采用直径 60cm、高 25cm 的柱形容器。为了显示流动形态,采用了 Baker<sup>[7]</sup> 酚蓝技术。在蒸馏水中按重量计 0.1% 浓度配置溴代麝香草酚蓝溶液作工作液体,并在其中滴定一定浓度的 NaOH 和 HCl,使溶液的 pH 值约为 5.3,显桔黄色呈弱酸性。当以直流电压(低于 2.5V)加于两电极间时,溶液中游离的 H 离子在负极得到电荷变成氢气析出,而负极附近的溶液中留下过剩的 OH 离子,使溶液显示深蓝色。为便于观察所要求的流型,可将负极的金属丝做成全部或局部裸露、水平或垂直布置。本实验中用直径 0.25mm、具有 2mm 间隔裸露的、水平置放的金属丝作负极,与其平行的另一根金属丝作正极,通电时负极显示出一条条清晰的蓝色流线。用 135 型相机加中黄滤色镜可拍摄反差良好的实验流型。

用源汇法驱动流体相对于容器运动,沿旋转轴引入一内径为 0.4cm 的圆管至工作液体中作为源管,适当调节管端至底面之距离(约为 1/2 水深处)可以尽量减小流动的垂直梯度。通过源管注入容器的流量由液体浮子流量计控制并监视,误差约为 5%。

实验采用的圆柱直径  $a$ , 旋转角速度  $\Omega$ , 源流流量  $Q$ , 平均水平速度  $U$ , Rossby 数  $R_0 (=2\epsilon)$  及 Ekman 数  $E$  列表如下:

$\Omega$ (1/s)	$a$ (cm)	$Q$ (cm <sup>3</sup> /s)	$U$ (cm/s)	$R_0$	$E$
0.21	3.6	0.5	0.13	$1.73 \times 10^{-1}$	$1.84 \times 10^{-3}$
0.42	3.6	0.5	$3.3 \times 10^{-2}$	$2.17 \times 10^{-2}$	$9.20 \times 10^{-4}$
0.837	3.6	0.5	$8.3 \times 10^{-3}$	$2.74 \times 10^{-3}$	$4.60 \times 10^{-4}$
1.25	3.6	0.5	$3.7 \times 10^{-3}$	$8.2 \times 10^{-4}$	$3.19 \times 10^{-4}$

实验时首先启动转台,使其以一定角速度  $\Omega$  (反时针方向)转动,同时(或稍后)开启源流,使流动系统达到定常状态(一般约需一个半小时),然后开启流场显示装置并拍摄流态图片。

### 三、实验结果及其物理讨论

#### 1. 基本流场

我们采用源汇流作为驱动流体作相对于容器运动的机制,与常规源汇法略有不同的是,把源流置于中心而不是紧贴器壁,以期获得更为均匀的流场。在未置入圆柱模型时的基本流场是,在直径 40cm 的圆内及 20cm 的圆外的环形区域内,水平速度大致与半径成线性关系,而其垂直速度梯度不大,因此以下所述实验结果应视为在常水平速度梯度的剪切流下的旋转流体圆柱绕流。Bannon<sup>[3]</sup> 的数值实验表明,平面剪切来流与均匀来流的绕流特征没有本质的不同,不过本实验作为具有弱水平速度梯度的绕流结果研究对于均匀来流情况的关系,仍是一个问题。

为规定系统的 Rossby 数,选择模型直径  $a$  及系统角速度  $\Omega$  为特征量. 考虑到源汇驱动机制是由于局部注入的流体在重力作用下散布开来,而角动量守恒的要求使流体逐渐带动相对于容器作顺时针转动,所以对于流动系统的特征速度重要的相关物理量应包括  $\Omega, L, Q$  和  $g$ . 这里  $L$  为容器半径,  $Q$  为源流体积流量,  $g$  为重力加速度. 由量纲关系可形成系统的特征速度为  $U \sim Qg/\Omega^2 L^3$ , 这与 Veronis 在 [8] 中的选择相同, 并和实验测得的水平线速度值量级一致. 对于  $\Omega = 0.42 \text{ 1/s}$ ,  $L = 30\text{cm}$ ,  $Q = 0.5\text{cm}^3/\text{s}$  时,  $U$  实测平均值约为  $0.5\text{mm/s}$ . 由此确定系统的 Rossby 数  $\varepsilon = \frac{1}{2} R_0 = \frac{U}{2QL}$ .

## 2. 不同 $\varepsilon$ 数下的流型

对于不同的  $\varepsilon$ , 特别是对于在很大范围内变化的不同  $\varepsilon$ , 流动呈现出彼此很不相同的形态, 只有在极小  $\varepsilon$  值的情况下, 才有经典的 Taylor 柱型流动形成, 如照片 1 中流线完全绕过柱体的情况. 对于一般的  $\varepsilon$ , 流动既受到物体存在的阻滞(在旋转系统中阻塞的意义与惯性系中不同)又不能完全阻塞形成相对于物体滞止不动的 Taylor 柱, 而是呈现出爬越与绕过物体的复合形态, 这也是有限 Rossby 数流动的特征, 照片 2 表示流线部分地爬上柱体的情形. 为了半定量地区分各种流型, 根据圆柱这种物体的几何特征定义阻塞系数  $B$  为

$$B = \left(1 - \frac{n}{N}\right) \times 100\%$$

其中  $n$  与  $N$  分别为当在来流中等距离显示流线(充分密集)时, 其中越过圆柱流线条数及按圆柱直径应包含的流线条数. 实验得到的  $B$  与  $\varepsilon$  关系示于图 1. 由图 1 可得到  $B$  与  $R_0$  的关系为

$$B = f(\log R_0)$$

$f$  可粗略地视为一次或二次代数曲线. 对于不同的  $h_r$ , 类似的关系仍然成立, 但形成 Taylor 柱(即完全堵塞  $B = 1$  的情况)的

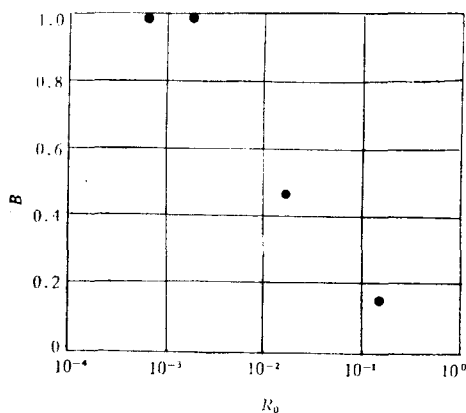


图 1  $B$  与  $R_0$  之关系

Rossby 数会随  $h_r$  的增大而增大.

## 3. 不同 $h_r$ 的流型

对于柱体而言, 柱体高度与水深之比  $h_r = \frac{H_{柱高}}{H_{水深}}$ , 可作为表征地形变化强弱的参数.

在同一 Rossby 数下,  $h_r$  的增大会引起流动阻塞作用 ( $B$ ) 的增大. 在  $R_0 = 2.17 \times 10^{-2}$  下,  $h_r = 0.286, 0.429, 0.657$  和  $0.8$  四种情况的实验结果示于图 2. 图 2 表明两者存在粗略地单调上升的线性关系, 即  $B = G(h_r)$ , 或  $B = kh_r$ , 本实验中  $k$  约为  $0.575$ . 文献 [3] 中对于不同的地形及基于浅水方程的数值模拟中在  $\varepsilon = 10^{-1}$  时得到类似的单调对应关系.

对于 2 节及本节中所观察到的不同流型的“谱”, 主要是由于 Rossby 数的有限性及物高有限性, 使方程 (4) 中惯性项及物型绕流边界条件非线性作用的结果, 因为在文献 [3] 中

的数值实验曾再现了与上述实验类似的某些流型特征, 尽管两者所用物型不同。

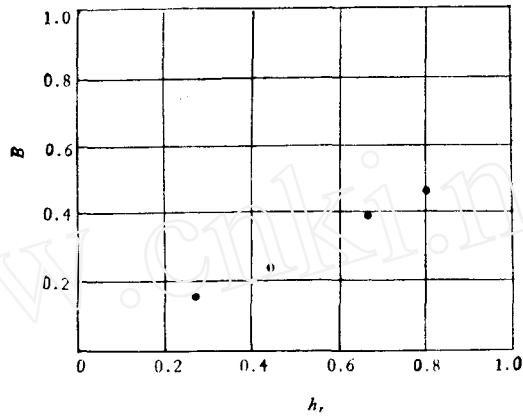


图 2  $B$  与  $h_r$  之关系  
( $R_0 = 2.17 \times 10^{-2}$ )

#### 4. 关于三维性

几乎所有小 Rossby 数下均质旋转流体绕物体的数值模拟中均假设了流动的二维性, 这在极小 Rossby 数下是合理的, 已如前述, Hide 等<sup>[4]</sup>在对圆柱实验时, 未对 Taylor 柱的轴向变化进行较细致地考察. 我们在不太小的 Rossby 数  $R_0 = 2.17 \times 10^{-2}$ ,  $h_r = 0.429$  时, 沿不同深度上考察了流动的轴向变化, 结果示于图 3.

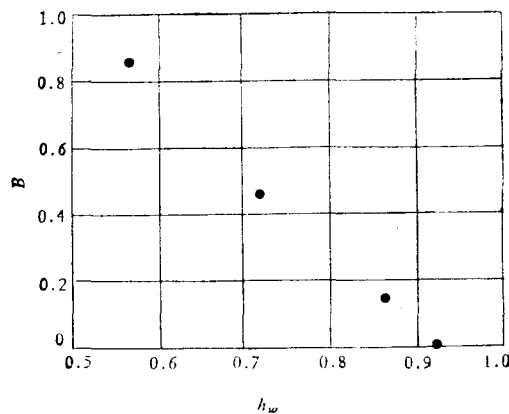
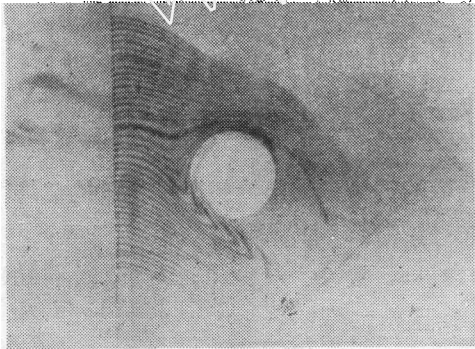


图 3  $B$  与  $h_w$  之关系  
( $R_0 = 2.17 \times 10^{-2}$ ,  $h_r = 0.429$ )

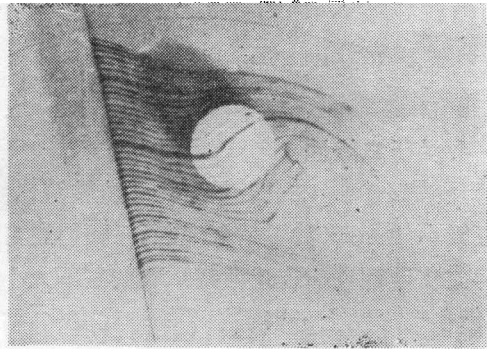
本实验结果表明, 存在着远比 Lighthill<sup>[4]</sup> 估计要强的三维效应, 这是有些令人惊异的. 这种二维性的退化可能既有惯性项的作用, 也有方程(4)中 Ekman 数所表征的粘性项的作用. 而粘性作用既涉及通常的物体侧面及上端面边界层, 亦可能还涉及由于 Taylor 柱现象造成的水平剪切层的非线性演化. 总之这是一个值得进一步研究的问题.

为了显示流动三维性, 把染色阴极线垂直布置, 以便观察垂直流面的形态, 得到照片 3a、3b、3c 诸结果. 我们设想这代表了不同条件下圆柱顶部附近流体的三种基本的流动形态. 第一种(照片 3a) 为二维保持较好的形态, 即经典的 Taylor 柱, 这在很小的 Rossby

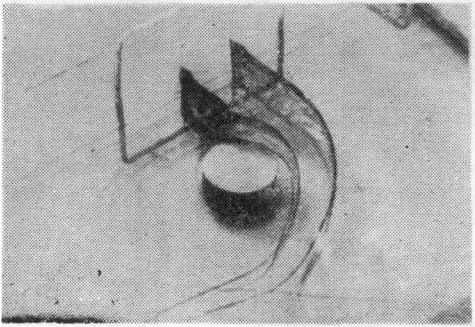
数或较大的  $h$  时出现;第二种流型(照片 3b)为沿圆柱侧表面的流面紧贴圆柱顶部端面并在该处折转形成折叠曲面,而在折转涡层区域以外流动又基本保持二维地爬越圆柱,这可能是在较大 Rossby 数下的流动形态,这时的 Taylor 柱被压缩到一个很小的紧贴柱体端面的涡层区之内,此时不可能形成有一定高度的滞止流体柱;第三种流型为介于上述的中间状态,呈现如照片 3c 示的相对于柱体半倾倒的流面.因而“Taylor 柱”只在很有限的高度内形成,流动沿轴有明显的变化.这与图 3 不同测量高度上不同的阻塞系数特性相对应.对于上述这些观察到的现象,我们还不能断言其中物理过程,还需进一步探讨.在文献[6]中对“陆架”地形绕流的实验中,也得到与上述类似的结果,当“陆架”地形相对高度较大并在小 Rossby 数下,观察到如[6]中图示流型,西边界流线几乎全部沿地形等高线;而对于相对高度较小远离地形上端处,观察到的流线几乎大部“爬越”“陆架”地形,又一次



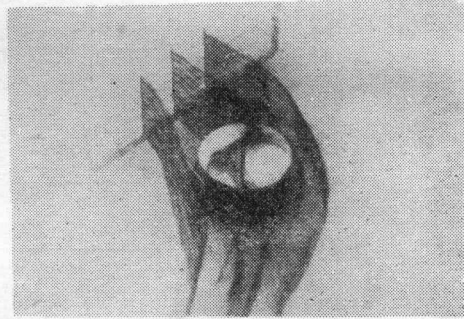
照片 1 完全堵塞的流型



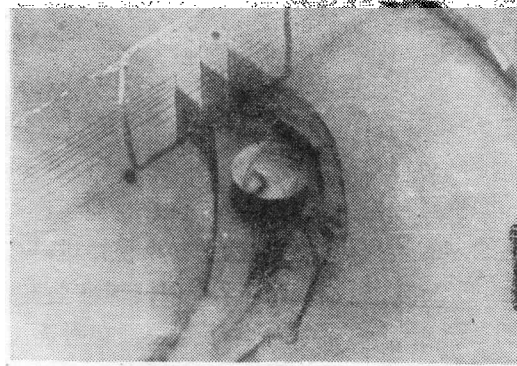
照片 2 部分堵塞的流型



照片 3a 完全绕过圆柱的流型



照片 3b 完全越上圆柱的流型



照片 3c 半倾倒圆柱的流型

呈现流动的三维性(见照片4),可以认为“陆架”弱化为微小的地形起伏,不能构成西边界而使环流在该处强化。



照片4 爬越“陆架”的流动

### 参 考 文 献

- [ 1 ] Taylor, G. I., *Proc. Roy. Soc.*, A104 (1923), 213—218.
- [ 2 ] Hide, R., *Nature*, 190 (1961), 895—896.
- [ 3 ] Bannon, P. R., *J. Fluid Mech.*, 101 (1980), 261—306.
- [ 4 ] Hide, R., Ibbtson, A., Lighthill, J., *J. Fluid Mech.*, 36 (1968), 251—271.
- [ 5 ] Davis, P. A., *J. Fluid Mech.*, 54 (1972), 691—717.
- [ 6 ] 柳绮年等, *力学学报*, 6(1981), 611—618.
- [ 7 ] Barker, D. J., *J. Fluid Mech.*, 26 (1966), 573—575.
- [ 8 ] Kuo, H. H., Veronis, G., *J. Fluid Mech.*, 45 (1971), 441—464.

## EXPERIMENTAL STUDIES OF THE FLOW PAST A CIRCULAR CYLINDER IN HOMOGENEOUS ROTATING FLUID

Liu Yinian Jia Fu

(*Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences*)

### Abstract

The flow past an isolated topography in rotating system is a subject of significance to many geophysical problems and is under intensive investigation. Experiments about the flow past a circular cylinder in homogeneous rotating fluid are described in this paper. The measurements are given of the dependence of the block coefficient (which characterizes the flow pattern in some respect) of Rossby number, relative height of cylinder etc.. The observed variations of flow properties along the rotating axis seem interesting and worth further exploring.