

磁流体管道中的高超声速流动特性

鄂学全

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文在磁雷诺数 $R_m = (VL/\nu_m) \ll 1$ 和磁作用参数 $N \ll 1$ 的情况下, 讨论了连续磁场对可压导电介质在管道电极与绝缘体连接端面区高超声速流动的影响问题。用复变函数理论求解拉普拉斯方程, 得出电流密度和洛伦茨力的解析式, 并从计算中, 找到了产生环电流的足够条件。导出高超声速流的扰动方程, 得出扰动参量的积分公式, 并对扰动方程进行数值解, 揭示出与不可压介质相似的流动特性, 并讨论了在各特殊点附近的流动特性。

一、引言

研究管道中磁流体动力学流动时, 通常假设管道的长度比它的宽度大很多, 这样可以用一维理论来进行研究。但是, 根据一维理论所得到的结果, 不可能应用于电磁场参量发生急剧变化的区域, 例如, 两电极之间的入口段。因此, 阐明这些区域中的流动特性是有益的。

文献[1, 2, 3] 讨论了磁场强度向量垂直于流动平面时, 电导率为常数的不可压理想流体, 在平面管道中磁流体动力学的流动情况。文献[1] 在假定磁场在电极区为常数, 此区域之外为零的情况下, 讨论了关于靠近电极端点电磁场对非粘性不可压流体流动的影响而线性化了的问题。文献[2, 3] 在考虑电极为有限长度、磁场强度 $H(x)$ 只集中在电极区的情况下, 讨论了两电极之间的电场和电流分布问题。

实际上, 外加磁场不只是集中在电极区, 而是延伸到绝缘区, 随其长度的增大而减小到零。本文在磁雷诺数 R_m 和磁作用参数 N 很小的情况下, 讨论这种连续磁场对可压导电流体高超声速流的影响以及电流密度分布和焦耳热损耗。

二、问题的提出

在等离子体高超声速设备(如电弧加热风洞)中, 为了提高 M 数, 通常采用一种电磁加速喷管。这同磁流体发电中能量转换部件——磁流管道类似。计算其性能时, 应用一维理论, 并假定外加磁场在电极区为常量, 在绝缘区为零。然而实际上, 外加磁场强度在绝缘区并不为零, 而是逐渐减小到零。在此情况下, 一维流进入磁流管道时, 由于磁场作用产生的洛伦茨力引起非一维扰动^[1], 从而影响其性能。因此, 弄清高超声速流进入磁流管

本文于1979年1月10日收到。1981年3月9日收到第二次稿。

道电极区的流动特性是必要的. 为此, 可把这类问题看作近似于可压缩导电流体在外加磁场的平面管道中的流动问题.

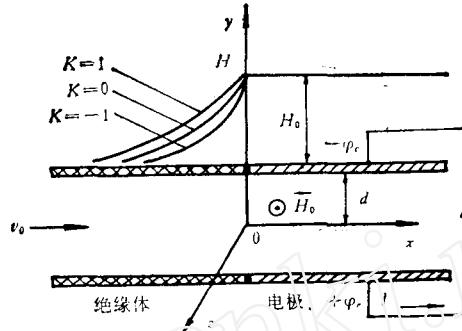


图 1 磁流管道示意图

假定管道是由两对半无限长的导体和绝缘体平板组成(图 1), 垂直于流动平面的外加磁场强度 $\mathbf{H} = \{0, 0, H(x)\}$ 为

$$H(x) = \begin{cases} H_0, & x \geq 0 \text{ (在电极区)}, \\ H_0 e^{\frac{\pi x}{a}} (1 + K - K e^{\frac{\pi x}{a}}), & x < 0 \text{ (在绝缘区)}. \end{cases}$$

其中 K 是表征磁场强度剖面特征的参数, d 为管轴至管壁的距离. 在 $Rm \ll 1$ 的假定下, 导电流体在磁场中流动时产生的电流引起的磁场变化量和涡流电场可忽略不计^[4]. 对于导电而非导热的可压缩流体, 在定常情况下, 磁流体动力学的基本方程可写为:

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{v} = -\nabla P + \mathbf{f}, \quad \left(\mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}] \right) \quad (2.2)$$

$$C_v \mathbf{v} \cdot \nabla T + p \mathbf{v} \cdot \nabla \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{j^2}{\sigma \rho} \quad (2.3)$$

$$p = \rho R T \quad (2.4)$$

$$\mathbf{j} = \sigma \left\{ -\nabla \varphi + \frac{1}{c} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] \right\} \quad (2.5)$$

其中 \mathbf{v} 是流体速度向量; p 是压力; T 是温度; C_v 是定容比热; c 是光速; σ 是导电率; φ 是电位势;

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k}.$$

将(2.5)式代入电荷守恒方程 $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$, 则得

$$\Delta \varphi = \mathbf{H} \cdot (\nabla \times \mathbf{v}) \frac{1}{c} - \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) \frac{1}{c} \quad (2.6)$$

这里 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$; \mathbf{H} 为已给定的外加磁场强度向量. 于是求解电流及 \mathbf{f} 力的问题化为求解具有相应边界条件的布昂苏方程(2.6).

令磁作用参数 $N = \frac{\sigma H_0^2 d}{\rho_0 H_0 c^2} \ll 1$, 因此流体动力学参量的扰动也很小. 在一级近似中, 速度可认为已给定为来流速度 v_0 , 先解(2.6), 求出 \mathbf{f} 后再求解方程组(2.1)–(2.5), 如此逐次近似地求解.

这样, 把整个问题化为两个较简单的问题: (1) 电动力学问题: 根据已知的流速和磁场强度确定电位和电流, 即在相应的边界条件下, 求解方程(2.6), 然后求出 \mathbf{f} , \mathbf{j} 和焦耳热量; (2) 气动力学问题: 利用 \mathbf{f} , 确定气动力学参量的扰动量, 即求解方程组(2.1)–(2.4).

三、电位方程的解

我们讨论平面管道流动问题. 因为 Rm 和 $N \ll 1$, 故磁场强度为已给定, 在一级近似中, 速度的扰动量可以忽略, 为已给定的来流速度 v_0 , 于是方程(2.6)变为:

$$\Delta \varphi = 0 \quad (3.7)$$

边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \varphi &= \mp \varphi_e \quad x \geq 0, \quad y = \pm d \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x} &= 0, \quad -\infty < x < 0, \quad y = \pm d \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y} &= -\frac{v_0 H_0}{c} e^{\frac{\pi x}{d}} (1 + k - k e^{\frac{\pi x}{d}}), \quad -\infty < x < 0, \quad y = \pm d \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

现在求解具有边界条件(3.8)的拉普拉斯方程(3.7). 根据解析函数定义, 求解方程(3.7)只要找出解析函数 $f(z) = \frac{\partial \varphi}{\partial y} + i \frac{\partial \varphi}{\partial x} = u + iv$ 并使 $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 满足边界条件(3.8)就够了. 为此必须将管道流动平面保角变换为复平面的上半平面, 其变换函数是

$$\zeta = \xi + i\eta = \exp \left[\frac{\pi x}{2d} + \frac{\pi}{2d} (y + d)i \right]$$

在此情况下, $f(z)$ 变为 $F(\zeta)$, 即 $f(z) = F(\zeta) = U + iV$, $u(x, y) = U(\xi, \eta)$, $v(x, y) = V(\xi, \eta)$. 边界条件(2.8)在复平面中变为

$$\left. \begin{aligned} V &= \frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \quad |\xi| \geq 1, \quad \eta = 0 \\ U &= \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{v_0 H_0}{c} \xi^2 (1 + k - k \xi^2), \quad -1 < \xi < 1, \quad \eta = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

利用克尔堆斯-谢多夫 (Келдыш-Седов) 定理^[5], 可求出满足边界条件(3.9)的解析函数:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \frac{1}{\pi i g(\zeta)} \left[\int_{-1}^1 \frac{U(t)g(t)}{t - \zeta} dt + i \int_{-1}^1 \frac{V(t)g(t)}{t - \zeta} dt \right] \\ &\quad + \frac{F(\infty)}{g(\zeta)} + h(\zeta) \end{aligned} \quad (3.10)$$

其中 $g(\zeta) = [(\zeta - 1)/(\zeta + 1)]^{\frac{1}{2}}$, $h(\zeta) = r_0/(\zeta^2 - 1)^{\frac{1}{2}}$, $F(\infty)$ 和 r_0 为常数. 将(3.9)代入(3.10), 并利用哥西公式, 经过推导, 得到满足边界条件的解析函数:

$$F(\zeta) = -\frac{v_0 H_0}{c \cdot g(\zeta)} \left[\zeta^2(1+k-\zeta^2)g(\zeta) - \frac{4+k}{8} + \frac{2+k}{2} \zeta - \frac{2+k}{2} \zeta^2 - k\zeta^3 + k\zeta^4 \right] + \frac{F(\infty)}{g(\zeta)} + h(\zeta) \quad (3.11)$$

式中 $\zeta = \exp\left[\frac{\pi}{2d}(z+id)\right] = -e^\alpha \sin\beta + ie^\alpha \cos\beta$, $\alpha = \pi x/2d$, $\beta = \pi y/2d$.

把 $F(\zeta)$ 分成实部和虚部, 并与 $f(z)$ 比较, 得到所需要的解析式:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial\varphi}{\partial x} &= \frac{v_0 H_0}{c} \left[(1+k)e^{2\alpha} \sin 2\beta + ke^{4\alpha} \sin 4\beta - a \left(\frac{2+k}{2} e^\alpha \cos\beta \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2+k}{2} e^{2\alpha} \sin 2\beta + ke^{3\alpha} \cos 3\beta + ke^{4\alpha} \sin 4\beta \right) \\ &\quad + b \left(\frac{4+k}{8} + \frac{2+k}{2} e^\alpha \sin\beta - \frac{2+k}{2} e^{2\alpha} \cos 2\beta \right. \\ &\quad \left. + ke^{3\alpha} \sin 3\beta \right) - ke^{4\alpha} \cos 4\beta \left. \right] + F(\infty)b + \gamma_0 b_1 \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{v_0 H_0}{c} \left[(1+k)e^{2\alpha} \cos 2\beta + ke^{4\alpha} \cos 4\beta + a \left(\frac{4+k}{8} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{2+k}{2} e^\alpha \sin\beta - \frac{2+k}{2} e^{2\alpha} \cos 2\beta + ke^{3\alpha} \sin 3\beta \right. \\ &\quad \left. - ke^{4\alpha} \cos 4\beta \right) + b \left(\frac{2+k}{2} e^\alpha \cos\beta + \frac{2+k}{2} e^{2\alpha} \sin 2\beta \right. \\ &\quad \left. + ke^{3\alpha} \cos 3\beta + ke^{4\alpha} \sin 4\beta \right) \left. \right] + F(\infty)a + \gamma_0 a_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

其中

$$a = \{e^{2\alpha} - 1 + [(e^{2\alpha} - 1)^2 + 4e^{2\alpha} \cos^2\beta]^{\frac{1}{2}}\}^{\frac{1}{2}} / [2(1 + e^\alpha \sin\beta)^2 + 2e^{2\alpha} \cos^2\beta]^{1/2}$$

$$b = -2e^\alpha \cos\beta / 2^{\frac{1}{2}} \{e^{2\alpha} - 1 + [(e^{2\alpha} - 1)^2 + 4e^{2\alpha} \cos^2\beta]^{\frac{1}{2}}\} \cdot [(1 + e^\alpha \sin\beta)^2 + e^{2\alpha} \cos^2\beta]^{1/2}$$

$$a_1 = -\sin\beta \frac{\{(e^{2\alpha} \cos 2\beta - 1)^2 + e^{4\alpha} \sin^2 2\beta\}^{\frac{1}{2}} - (e^{2\alpha} \cos 2\beta + 1)\}^{\frac{1}{2}}}{2(e^{2\alpha} \cos 2\beta + 1)^2 + 2e^{4\alpha} \sin^2 2\beta}$$

$$b_1 = \frac{-e^{2\alpha} |\sin 2\beta|}{2^{\frac{1}{2}} \{[(1 + e^{2\alpha} \cos 2\beta)^2 + e^{4\alpha} \sin^2 2\beta]^{\frac{1}{2}} - (e^{2\alpha} \cos 2\beta + 1)\}^{\frac{1}{2}} [(e^{2\alpha} \cos 2\beta + 1)^2 + e^{4\alpha} \sin^2 2\beta]^{\frac{1}{2}}}$$

$$F(\infty) = \varphi_c/d, \quad \gamma_0 = -\left(\frac{4+k}{8} + \frac{\varphi_c c}{d v_0 H_0}\right) \frac{v_0 H_0}{c}$$

把 $F(\infty)$ 和 γ_0 化为无量纲常数: $\bar{F}(\infty) = \frac{F(\infty)c}{v_0 H_0} = \frac{\varphi_c c}{v_0 H_0 d}$, 并令 $\bar{F}(\infty) = 0.5$, 则

$$\bar{\gamma}_0 = -(8+k)/8.$$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$ 的无量纲量为: $\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{c}{v_0 H_0} \frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \frac{c}{v_0 H_0} \frac{\partial\varphi}{\partial y}$. 因为我们所需要

的是位势 φ 的导数, 所以不需将 (3.12) 式积分, 因而求解电位方程的任务就完成了.

按 (2.5) 式确定的无量纲电流密度为

$$j_{x_1} = -\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial x}, \quad j_{y_1} = -\left(H_1 + \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial y}\right) \quad (3.13)$$

式中

$$H_1 = \frac{H}{H_0} = \begin{cases} 1, & \alpha > 0 \\ e^{2\alpha}(1 + k - ke^{2\alpha}), & \alpha < 0 \end{cases}$$

总电流密度 $j_1 = (j_{x_1}^2 + j_{y_1}^2)^{1/2}$. 同样可求出力.

$$\mathbf{f}_1 = \frac{1}{c} [\mathbf{j}_1 \times \mathbf{H}_1], \quad f_{x_1} = j_{y_1} H_1, \quad f_{y_1} = -j_{x_1} H_1 \quad (3.14)$$

四、扰动方程及其解

由于磁场作用在电极区初始段的导电流体中产生 x 和 y 向的电流密度分量, 故以流速为 v_0 求出的 \mathbf{f} 力也具有两个分量 f_x 和 f_y , 从而使来流的流体动力学参量发生二维扰动. 现在就讨论这一平面定常流动问题. 令 \mathbf{v}' 、 p' 和 ρ' 为速度、压力和密度的扰动量, 则 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}'$, $p = p_0 + p'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$. 速度分量为 $u = v_0 + u'$, $v = v'$, $w = w' = 0$. 将这些量代入(2.1)–(2.3)并以无量纲形式表示, 则得

$$(1 + \rho'_i) \left[(1 + u'_i) \frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + v'_i \frac{\partial u'_i}{\partial y_1} \right] = -\frac{1}{M_0^2} (1 + \rho'_i)^{r-1} \vartheta'_i \frac{\partial \rho'_i}{\partial x_1} - \frac{1}{\gamma M_0^2} (1 + \rho'_i) \frac{\partial \vartheta'_i}{\partial x_1} + N f_{x_1} \quad (4.15a)$$

$$(1 + \rho'_i) \left[(1 + u'_i) \frac{\partial v'_i}{\partial x_1} + v'_i \frac{\partial v'_i}{\partial y_1} \right] = -\frac{1}{M_0^2} (1 + \rho'_i)^{r-1} \vartheta'_i \frac{\partial \rho'_i}{\partial y_1} + \frac{1}{\gamma M_0^2} (1 + \rho'_i) r \frac{\partial \vartheta'_i}{\partial y_1} + N f_{y_1} \quad (4.15b)$$

$$(1 + \rho'_i) \left[\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} + \frac{\partial v'_i}{\partial y_1} \right] + (1 + u'_i) \frac{\partial \rho'_i}{\partial x} + v'_i \frac{\partial \rho'_i}{\partial y_1} = 0 \quad (4.16)$$

$$(1 + \rho'_i) r \left[(1 + u'_i) \frac{\partial \vartheta'_i}{\partial x_1} + v'_i \frac{\partial \vartheta'_i}{\partial y_1} \right] = \gamma(\gamma - 1) M_0^2 N j_1^2 \quad (4.17)$$

式中 $x_1 = x/d$, $y_1 = y/d$; $u'_i = u'/v_0$, $v'_i = v'/v_0$; $\rho'_i = p'/p_0$, $\rho'_i = \rho'/\rho_0$; $\vartheta'_i = \vartheta'/\vartheta_0$; $N = \frac{\sigma H_0^2 d}{\rho_0 v_0 c^2}$ 为磁作用参数; $M_0 = [\rho_0 v_0^2 / (p_0 \gamma)]^{1/2}$ 为马赫数; $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ 为比热比. 导出

这些方程时利用了 $p = p(\rho, \vartheta)$ 及完全气体的假定: $\vartheta = \frac{p_0}{\rho_0} \vartheta = \vartheta_0(1 + \vartheta'_i)$.

设管道中的气流是高超声速流, 且 $N \ll 1$, $N M_0^2 \sim 1$. 这是比较实际的, 如 $N = 0.1$ 时, M_0 略大于 3. 假定 $u'_i \gtrsim v'_i$, $u'_i \ll 1$, f_{x_1} 及 $f_{y_1} \sim 1$, $j_1^2 \sim 1$. 从(4.16)得 $\rho'_i \sim u'_i \ll 1$, 由(4.17)得 $\vartheta'_i \sim 1$. 最后由(4.15)得出 u'_i 、 $v'_i \sim N$. 保留 N 和数量为 1 的项, 使方程线性化, (4.15)–(4.17)方程变为

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x_1} = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \vartheta'_i}{\partial x_1} + N f_{x_1} \quad (4.18a)$$

$$\frac{\partial v'_1}{\partial x_1} = -\frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{\partial \vartheta'_1}{\partial y_1} + N f_y \quad (4.18b)$$

$$\frac{\partial \rho'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u'_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v'_1}{\partial y_1} = 0 \quad (4.19)$$

$$\frac{\partial \vartheta'_1}{\partial x_1} = \gamma(\gamma - 1) M^2 N j_1^2 \quad (4.20)$$

在一般情况下, (4.18)–(4.20) 可用积分公式表示:

$$\left. \begin{aligned} u'_1 &= -\frac{1}{\gamma M_0^2} \vartheta'_1 + N \int_{-\infty}^{x_1} f_{x_1} dx'_1 \\ v'_1 &= -\frac{1}{\gamma M_0^2} \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial \vartheta'_1}{\partial y_1} dx'_1 + N \int_{-\infty}^{x_1} j_{y_1} dx'_1 \\ \rho'_1 &= -u'_1 - \int_{-\infty}^{x_1} \frac{\partial v'_1}{\partial y_1} dx'_1 \\ \vartheta'_1 &= \gamma(\gamma - 1) M_0^2 N \int_{-\infty}^{x_1} j_1^2(x'_1, y_1) dx'_1 \end{aligned} \right\} \quad (4.21)$$

如果将(4.21)沿 y_1 方向积分, 那么可得出各扰动量沿截面分布的平均值 \bar{u}'_1 , \bar{v}'_1 , $\bar{\rho}'_1$ 和 $\bar{\vartheta}'_1$.

由于 $x_1 \rightarrow -\infty$ 时, $\vartheta'_1 = 0$. 故差值 $\Delta \bar{\vartheta}'_1 = \bar{\vartheta}'_1$, 可用(4.21)中的第 4 式表示. 考虑到 $\rho'_1 \ll 1$, 而 $\vartheta'_1 \sim 1$. 按(4.21)式, 则得 $\bar{\rho}'_1 = \bar{\vartheta}'_1$. 由此得出压力扰动量同熵参量 ϑ'_1 的关系: 压降 $\Delta \bar{\rho}'_1 = \Delta \bar{\vartheta}'_1$, 其平均值 $\Delta \bar{\rho}'_1 = \Delta \bar{\vartheta}'_1$, 且 $\Delta \bar{\rho}'_1 = \Delta \bar{\vartheta}'_1$. 这里 $\bar{\rho}'_1 = \rho'_1 / \gamma(\gamma - 1) \cdot M_0^2 N$, $\bar{\vartheta}'_1 = \vartheta'_1 / \gamma(\gamma - 1) M_0^2 N$.

实际上, 当 $x_1 \geq 1.3$ 时, j_1 与 y_1 无关, 而 $x_1 \rightarrow -4$ 时, j_1 减小到零. 因此 ϑ'_1 可表示为

$$\vartheta'_1 = \gamma(\gamma - 1) M_0^2 N \left[\int_{-4}^{1.3} j_1^2 dx_1 + j_{1\infty}^2 (x_1 - 1.3) \right]$$

其中 $j_{1\infty} = 1.5$ (见计算结果). 当 $x_1 = -4$ (理论是 $x \rightarrow -\infty$) 时 $\vartheta'_1 \rightarrow 0$. 因 $\vartheta'_1 = \Delta \vartheta'_1$, 则有扰动压差关系式:

$$\Delta \bar{\rho}'_1 = \int_{-4}^{1.3} j_1^2(x_1, y_1) dx_1 + j_{1\infty}^2 (x_1 - 1.3) \quad (4.22)$$

如 $k = 1$ 时, 压差值为

$$\Delta \bar{\rho}'_1(x_1, 1) = 6.42 + 2.25(x_1 - 1.3), \quad \text{在管壁上}$$

$$\Delta \bar{\rho}'_1(x_1, 0) = 3.08 + 2.25(x_1 - 1.3), \quad \text{在管轴上}$$

我们感兴趣的是确定 ϑ'_1 和 u'_1 之值, 以期说明电极与绝缘壁连接端面区的流动特性. 为此将方程(4.18)–(4.20)化成以下形式:

$$\frac{\partial \bar{\vartheta}'_1}{\partial x_1} = j_1^2, \quad \frac{\partial \bar{u}'_1}{\partial x_1} = -(\gamma - 1) j_1^2 + f_{x_1} \quad (4.23)$$

式中 $\bar{u}'_1 = u'_1 / N$. 对(4.23)用龙格-库塔法进行了数值解.

五、计算结果及讨论

对电流密度、焦耳热耗、洛伦茨力、扰动速度、压力及其分布进行了计算, 其结果以曲

线图给出。

1. 电流密度沿管道分布的一般特性 在本文讨论的情况下, 导电液体在磁场中运动时, 产生的电流, 从上向下流动。在两电极间区 ($x_1 > 0$): j_{x_1} 分量在管壁和管轴上均为零; 电流密度 j_1 随 x_1 的增大很快变为均匀而与 y_1 无关的常数, 即电流线趋于直线 (见图 2), 例如, $k = 0$ 时, $x_1 \sim 0.6$, $(j_{x_1}/j_{y_1})_{\max} \sim 0.02$; $x_1 = \frac{4}{\pi}$ 时, 则 $j_1 = 1.5$ ($j_1 \rightarrow \infty$, $j_1 \rightarrow 1.5$)。电流密度在 $x_1 = \frac{4}{\pi}$ 的截面上的变化约为 0.13%, 而在管轴上 $j_1 = 1.49$ (对于所有的 k 值)。

电流密度, 除电极两端点外, 均为有限值。在端点上的电流密度无穷大, 但在这些点的任意邻域内具有积分特性, 即总电流、总焦耳热量均为有限值。

在绝缘区 ($x_1 < 0$): j_{x_1} 在管轴上等于零, 而 j_y 在管壁上等于零, 这就是说, 所有的电流线与管壁相切。电流密度随 x_1 减小而减小到零; 在 $x_1 = 0$ 的相近截面上, 电流密度随 y_1 的增大从零增大到 1, 而在远离 $x_1 = 0$ 的截面上随 y_1 的增大而减小 (见图 3)。

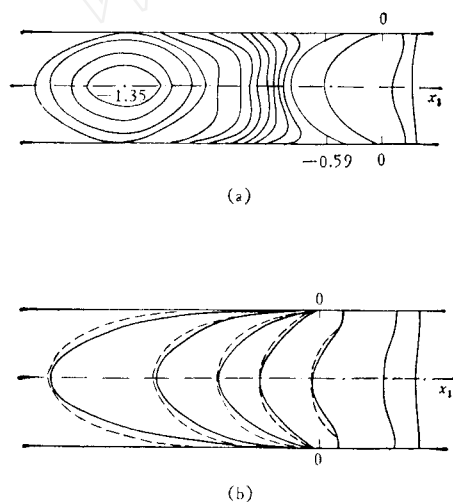


图 2 电流线分布
(a) $k = 1$ (b) $---k = -1$, $—k = 0$

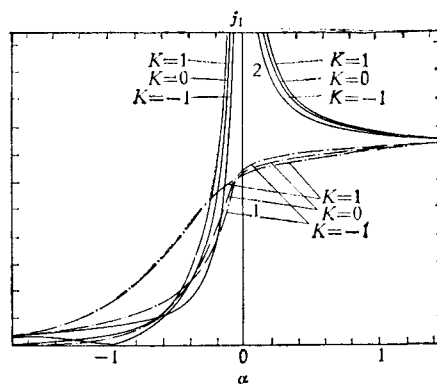


图 3 电流密度沿管道纵向分布 ($\alpha = \frac{\pi x}{2d}$)

在管壁上 $j_1 = |j_{x_1}| (\alpha < 0)$
在管轴上 $j_1 = |j_{y_1}| (\alpha < 0)$ $j_1 = j_{y_1} (\alpha > 0)$

2. 磁场 (k) 对电流密度分布的影响 在 $x_1 > 0$ 的区域, $k = -1$ 的电流密度曲线位于 $k = 1$ 的下面, 而 $k = 0$ 的位于它们之中; 在管轴, 则相反 (图 3)。这就是说, $k = 1$ 的电流密度 j_1 随 y_1 的增大比 $k = 0$ 和 $k = -1$ 的 j_1 增长得快, 而 $k = -1$ 的 j_1 在 y_1 方向上变化得比较慢。

在 $x_1 < 0$ 的区域, 管壁上的电流密度曲线相交于一点 $(-0.36, 1)$; 在 $-0.36 < x_1 < 0$ 区间, 有 $(j_1)_{k=1} > (j_1)_{k=0} > (j_1)_{k=-1}$, 但在 $-0.59 < x_1 < -0.36$ 区间相反; 当 $x_1 < -0.59$ 时 $k = 1$ 的 j_1 位于 $(j_1)_{k=-1}$ 和 $(j_1)_{k=0}$ 之间。 $k = 1$ 的电流密度 j_1 随 x 减小而逐渐减小, 在 $x_1 = -0.59$ 点上等于零, 离开此点往远去开始增大, 直到 $x_1 = -0.76$ 时达到最大值 0.06, 然后随 $x_1 \rightarrow -\infty$ 减小到零。因此管壁上的电流在 $-0.59 < x_1 < 0$ 区间的流向与

在 $-\infty < x_1 < -0.59$ 区间的流向相反. $x_1 = -0.59$ 的点叫马鞍点(见图 3). 由此可看出, $k = 1$ 时, 在 $x_1 = -0.59$ 左边有环电流产生, 环的中心在管轴的 $x_1 = -1.35$ 点上(见图 2). 在这个特殊点的邻域内电流密度下降. 终止于 $x_1 < 0$ 的管壁马鞍点上的电流线(分隔线)把环电流区与封闭于两电极的电流区分开.

必须指出, 在 $x_1 < 0$ 区, 除 $k = 1$ 外均无环电流. 焦耳热分布完全类似于电流密度分布. 环电流区产生热耗. 这是无益的.

3. 洛伦茨力分布 由公式(3.14)确定的 f_1 力垂直于电流和磁场, 并与流体流向相反, 因此洛伦茨力是阻碍流体运动的. 从力的表达式可看出: 在 $x_1 > 0$ 的区域, 力同电流密度分布一样; 在 $x_1 < 0$ 的区域, 力 f_1 沿管道方向的分布与电流密度分布相似. 而力在管道横向上的分布与精确到某一乘积因子的电流密度分布相重合.

值得注意的是, 当 $k = 1$ 时存在着环电流区. 在此区域, 力指向环心. $k = 0, -1$ 时, 没有这种特点.

4. 压力分布特点 热耗导致表征熵的参量 ϑ 的增加和压力下降. 当 x_1 取很大负值时, 压力在管道横向上的变化较小(见图 4). 例如, 当 $k = 1, x_1 = -11$ 时, 管道横向上压力的相对变化为 0.2. 靠近绝缘管壁 ($x_1 < 0$), 出现指向管轴的横向力, 于是产生稀疏区. 在环电流中心和马鞍点的邻域内压力扰动减小, 并在这些点上减小到零. 由于指向中心点的力的作用, 环电流区就成为压缩区.

压力扰动随 k 的增大而增强. 在电极端点下游的压力随 x_1 增大而增大. 当 x_1 很大 ($x_1 \geq 1.3$) 时, 压力线性增长, 且有 $\bar{p}_i(x_1, 0) = 3.08 + 2.25(x_1 - 1.3)$.

须指出, 在 $x_1 > 0$ 的区域(与 $x_1 < 0$ 区域不同) 近壁处的压力大于管中心的压力.

5. 气流的流动特点 图 5 和图 6 给出扰动速度的分布. \bar{u}_i 随 k 增大而增大, 并且随 x_1 的增大而增大(无环电流时), 即滞止逐渐增强.

在电极端点邻域内, 由于焦耳热损耗和制动力 (f_1) 增大, 发生强滞止, 即速度扰动量急剧增大, 于是发生气体压缩. 当 k 减小时, 由于此区内热耗减小, 压缩变得较弱. 通过此区域之后, 气体重又膨胀.

在电极区 ($x_1 > 0$), 纵向速度扰动量, 在从管轴到管壁的横向上, 因电流密度增大而增大. 当 $x_1 = 1.3$ 时, 由于压力和洛伦茨力沿 x_1 的线性增大, \bar{u}_i 开始沿 x_1 线性增大.

最后还必须指出, 在环电流区, 由于横向力作用, 发生气体向中心的压缩 ($y_1 > 0$ 时,

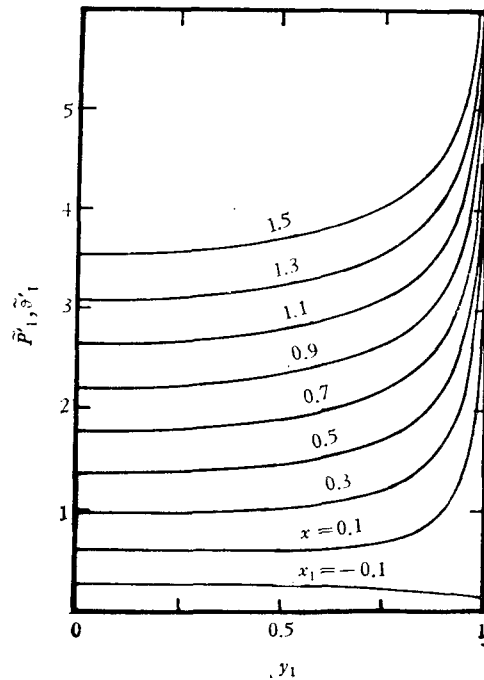
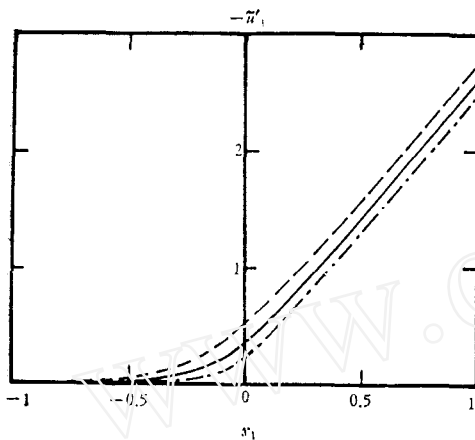
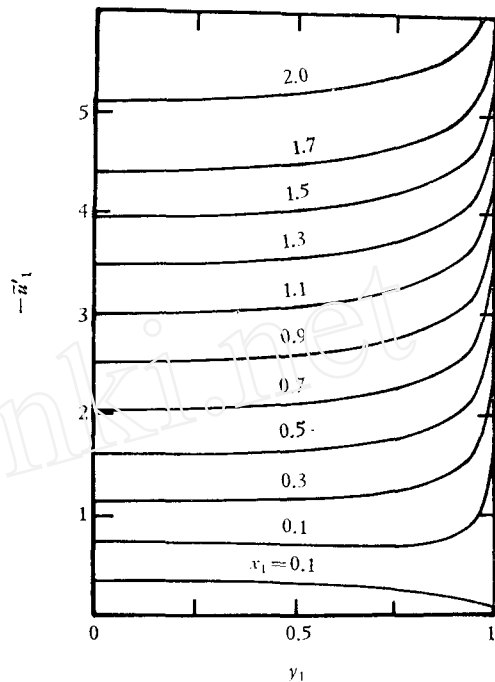


图 4 \bar{p}_i 和 \bar{u}_i 的横向分布

图5 扰动速度的轴向分布 ($v_1 = 0$)— $k = 0$, ---- $k = 1$, - · - $k = -1$ 图6 $k = 1$ 时的扰动速度的横向分布

$v'_1 < 0$); 在中心点之前 ($x_1 < -1.35$) 气流加速 ($u'_1 > 0$); 中心点之后, 气流阻滞 ($u'_1 < 0$). 在马鞍点邻域内, 气流滞止较弱; 在分隔线邻域, 气流急剧滞止。

六、结 论

由上述讨论, 可归纳为以下几点结论:

1. 讨论与磁场衰变速度 ($x_1 < 0$ 时) 相关的电流密度分布特性, 找出了产生环电流的足够条件。这就是, 在绝缘体之间的区域, 如果磁场强度的减小比 $k \geq 1$ 的变化还慢的话, 那么在气流中, 总存在着环电流, 产生焦耳热耗。

2. 数值求解 $N \ll 1$, $NM^2 \sim 1$ 的扰动方程的结果表明, 其速度分布等与 $M^2 \sim 1$ 的情况有质的区别, 在环电流区, 高超声速流动特性与不可压流体的运动特性相似。在流场特殊点邻域内的流动特性是, 气流受到阻滞、呈压缩状态。

3. 在磁流体管道中, 绝缘体区域的磁场强度的衰减速度对超声速流动将有很大的影响, 其衰减愈快影响愈小, 愈慢影响愈大。

4. 电流分隔线把磁流管道分为两个区域, 上游区和下游区。在这两区的流动特性有显著的差别。

本文分析了磁流管道进口段, 即电极端面区的高超声速流动特性, 说明了外加磁场如何影响磁流管道的性能。这为磁场的设置提供了理论依据。

参 考 文 献

- [1] Sutton, G. W. and Carlson, A. W., End Effects in Inviscid Flow in a Magnetohydrodynamic Channel, *J. Fluid Mech.*, **11**, pt. 1 (1961), 121—132.
- [2] Ватажин А. Б., К решению некоторых краевых задач магнитогидродинамики, *ИММ*, т. **25**, вып. 5 (1961).
- [3] Ватажин А. Б., Магнитогидродинамическое течение в плоском канале с конечным электродами, *Известия Академии Наук СССР, ОТН Механика и Машиностроение*, 1 (1962).
- [4] Брагский С. И., К магнитной гидродинамике слабо проводящих жидкостей, *Журнал экспериментальной и теоретической физики*, вып. 5(11), 1959.
- [5] Лаврентьев М. А., Методы теории функций комплексного переменного, *Физматгиз*, 1958, стр. 284—289.

HYPERSONIC FLOW BEHAVIOR IN MAGNETOHYDRODYNAMIC CHANNEL

E Xuequan

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

For small magnetic Reynolds number R_m and small magnetic interaction parameter N , the effects of a continuous magnetic field on the hypersonic flow of an inviscid, compressible electrical conducting fluid are considered at the entrance region of the channel. The analytical expressions of electric current density and Lorentz force on the flow are obtained by solving the Laplace equation with the help of the complex variable function theory. The conditions causing circular electric current are found by the calculation. The perturbation equations and the integral formulas of the perturbation parameters are derived. The digital solutions of the perturbation equations show that the hypersonic flow has flow behavior analogous to an incompressible fluid. The characteristic of the flow near the specific points are discussed.