

# 星系密度波的线性增长\*

唐泽眉

(中国科学院力学研究所, 1980年5月23日收到)

## 摘 要

本文以线性密度波局部渐近解为初值, 求解二维非定常流体力学方程组和泊松方程, 研究星系密度波的线性增长. 数值计算结果表明, 线性密度波将在几千万年时间内增长到与基态同量级, 形成在中心区域具有棒形结构的螺旋图样. 螺旋结构的图样速度及扰动密度的增长率随空间位置及时间变化. 讨论了准稳螺旋结构假设的近似性.

## 一、引 言

近年来星系螺旋结构的密度波理论受到了广泛的重视. 密度波理论认为, 螺旋结构是准稳的, 具有整体不变的图样速度. 林家翘等用适当增长模式的线性密度波渐近解来解释密度波的长期维持问题<sup>[1]</sup>. Pannatoni and Lau<sup>[2]</sup>在以图样速度 $\Omega$ 旋转的坐标系中对盘状星系中的不稳定螺旋模式进行了计算, 得出了和渐近解一致的结果. 另一方面, 数值实验的工作发现<sup>[3,4]</sup>螺旋波的图样是不准稳的. 定性分析的方法估计、证明了<sup>[5,6]</sup>存在着密度波的非线性不稳定性, 密度波增长很快、很难维持<sup>[7]</sup>.

线性密度波能否有适当的增长率, 恰好使星系螺旋结构既准稳又能补偿耗散机制而长期维持? 其不稳定性是非线性效应的影响, 还是线性密度波本身就增长很快? 这是值得研究的问题.

我们将从固定坐标系中的二维非定常流体力学方程组和全局的引力计算式出发, 以线性密度波局部渐近解为初值, 数值地研究其线性发展. 在我们计算的条件下所得结果说明, 线性密度波是不准稳的, 在几千万年时间内扰动密度就增长到与基态密度同量级.

## 二、基本方程和解法

### 1. 基本方程

在固定圆柱坐标系中, 考虑加在轴对称基态上的小扰动, 得到下列线性化方程组<sup>[8]</sup>:

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial t} + \Omega \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_0 u_1) + \frac{\partial}{\partial \theta} (\sigma_0 v_1) \right] = 0 \quad (2.1)$$

\* 钱伟长推荐.

$$\frac{\partial u_1}{\partial r} + \Omega \frac{\partial u_1}{\partial \theta} - 2\Omega v_1 = -\frac{a^2}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial r} - \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial t} + \Omega \frac{\partial v_1}{\partial \theta} + \frac{K^2}{2\Omega} u = -\frac{1}{r} \left( \frac{a^2}{\sigma_0} \frac{\partial \sigma_1}{\partial \theta} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \right) \quad (2.3)$$

$$\Delta \varphi_1(r, \theta, z) = 4\pi G \sigma_1(r, \theta) \delta(z) \quad (2.4)$$

其中 
$$K^2 = (2\Omega)^2 \left( 1 + \frac{r}{2\Omega} \frac{d\Omega}{dr} \right)$$

式中符号均为通常含义；下标 0 相应于基态，下标 1 相应于扰动态。基态模型选用 Schmidt<sup>[9]</sup>模型，恒星弥散速度  $a$  按  $Q = \frac{Ka}{\pi G \sigma_0} = 1$  计算。

## 2. 计算初值的选取

设存在一种扰动螺旋引力场：

$$\varphi_1 = -A \cos \left( \frac{2\eta}{\sin i} + \eta_0 \right) \quad (2.5)$$

其中螺旋坐标  $\eta = \ln \left( \frac{r}{r_0} \right) \cos i + (\theta - \Omega_p t) \sin i$ ；初值  $\eta_0 = -10^\circ$ ； $i$  为紧卷螺旋线的倾角

按线性密度波局部渐近解计算初值<sup>[8]</sup>，其线性扰动密度为：

$$\sigma_1 = -\frac{ikF_r \sigma_0}{K^2(1-v^2) + k^2 r^2} \quad (2.6)$$

径向及切向扰动速度分别为：

$$u_1 = -\frac{\sigma_1 m (\Omega_p - \Omega)}{\sigma_0 k} \quad (2.7)$$

$$v_1 = \frac{i u_1 K^2}{2\Omega^2 m \left( \frac{\Omega_p}{\Omega} - 1 \right)} \quad (2.8)$$

其中  $F_r = -\frac{\partial \varphi_1}{\partial r}$ ， $k$  为扰动密度波波数， $v = m(\Omega_p - \Omega)/K$ ， $\Omega_p$  为图样速度。

我们将采用 (2.6) — (2.8) 式计算所得  $\sigma_1$ ， $u_1$ ， $v_1$  值作为计算中  $t=0$  时的初值。

## 3. 边界条件

计算在半径  $r$  为 3.0 到 25.0 kpc 范围内进行。由于在星系盘中心观测不到密度波，波在内 Lindblad 共振环处被反射或被吸收，我们取内边界条件为： $u_1(r_1, \theta) = 0$ ； $r_1 = 3.0$  kpc。

$r_2$  为 25.0 kpc 的外边界，位在共转圈之外。整体的增长模式将向外传送角动量，减少系统平衡态的总能量。根据分析，引力矩和曳行短波结构将给出角动量的向外传输。因此，我们要求在半径 25.0 kpc 处，所取的模型渐近于曳行短波，即  $\sigma_1(r_2, \theta) = \sigma_{1\text{渐}}(r_2, \theta)$ ； $r_2 = 25.0$  kpc。其中  $\sigma_{1\text{渐}}(r_2, \theta)$  为按局部渐近解在  $r_2$  处所求得的曳形短波扰动密度。

## 4. 求解计算：

在  $3\text{kpc} \leq r \leq 25\text{kpc}$ ， $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$  范围内求解方程组 (2.1) — (2.4)。用牛顿引力的计算

式代替泊松方程。根据某时刻  $t_0$  的密度分布求得  $t_0$  时刻的引力场。然后将此引力值代入方程组 (2.1) — (2.3)，用守恒型差分方程<sup>[7]</sup>求解，求得  $t_1 = t_0 + \Delta t$  时刻的  $\sigma_1, u_1, v_1$  值。不断重复上述过程进行计算。

计算中径向步长为 0.5kpc，切向步长为  $10^\circ$ ，时间步长按 Ccanrant 条件，即

$$\Delta t \leq \frac{|\Delta r_{\min}|}{|a_{\max} + v_{\max}|}$$

选取。计算结果没有出现不稳定现象。

### 三、计算结果

图1 给出螺旋结构图样的演化过程，可以看出螺旋图样略有缠卷，中间将逐渐形成棒状扰动。

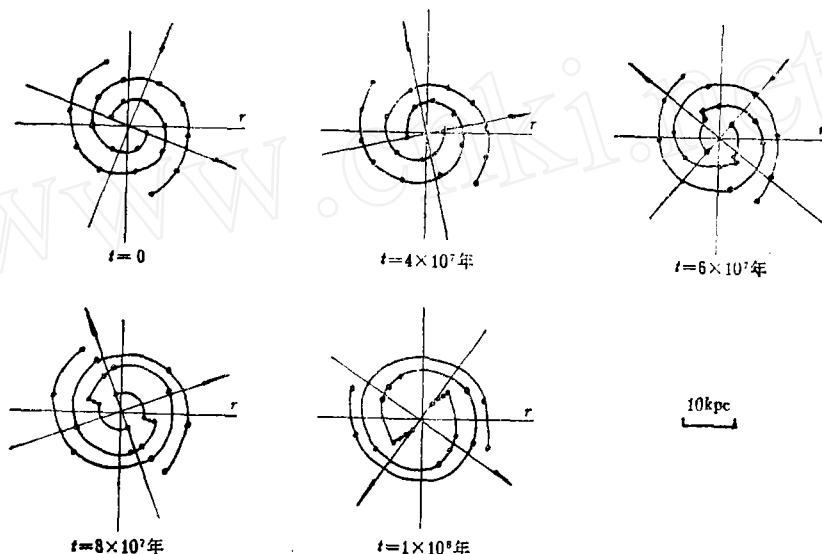


图1. 螺旋图样的演化

图2 给出半径  $r$  为 4, 6, 10kpc 处的扰动密度剖面。图 2 表明，在星系中心部份扰动密度的振幅随时间增长很快，在距初始时间  $8 \times 10^7$  年后，在半径 4—5kpc 范围内，扰动密度将增长到与基态同量级，因此必须考虑非线性效应。中心部份扰动密度的迅速增长，将逐渐影响到外部区域，使外部区域的扰动密度也增长。

图3 为图样速度  $\Omega$ ，及扰动密度的增长率  $\gamma$  沿半径的分布和随时间的演化图。结果说明星系螺旋结构没有一个整体的、固定不变的图样速度  $\Omega$ ，及增长率  $\gamma$ ，它们都将随半径和时间的变化而变化。由于切向步长为  $10^\circ$ ，误差较大。误差范围如图所示。

### 四、讨论

密度波理论认为螺旋结构具有整体不变的图样速度，螺旋结构是准稳的，并求出了渐近解。文[2]采用准稳假定，并认为扰动密度波是  $m$  为 2 的谐波，将二维不定常流体力学方程组简化为一维定常方程，和泊松方程联立用数值计算求解。这种线性密度波的数值计算，得

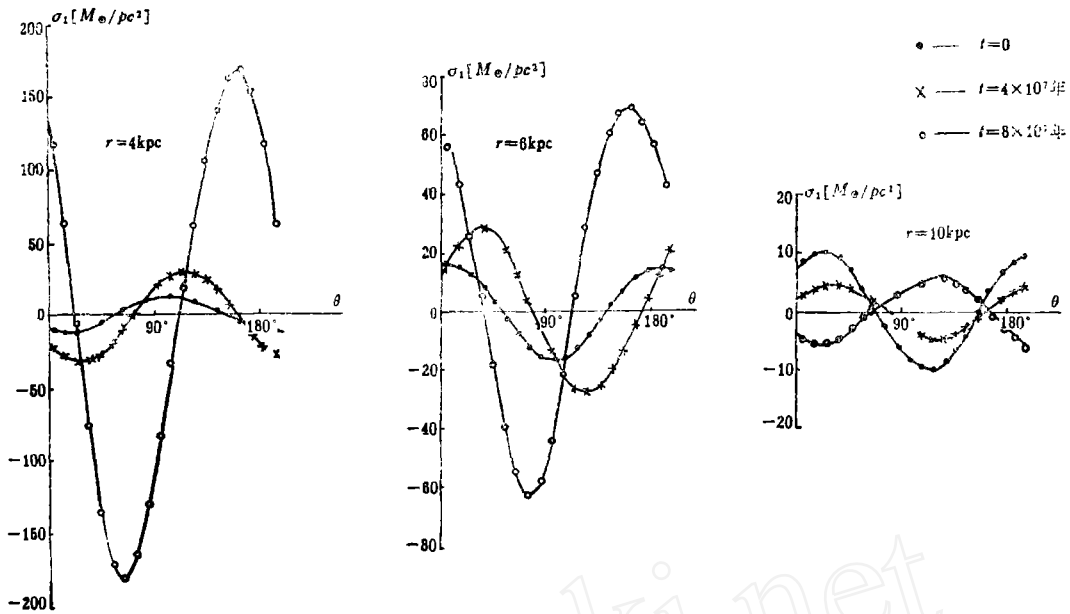


图2 扰动密度的演化

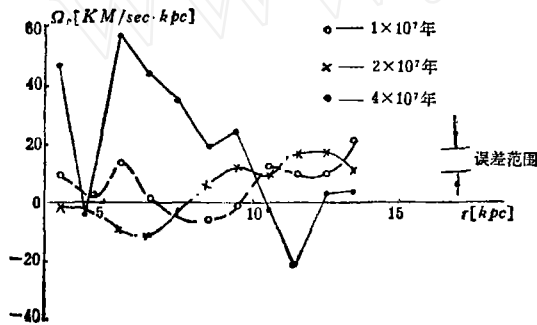


图3a 图样速度的演化

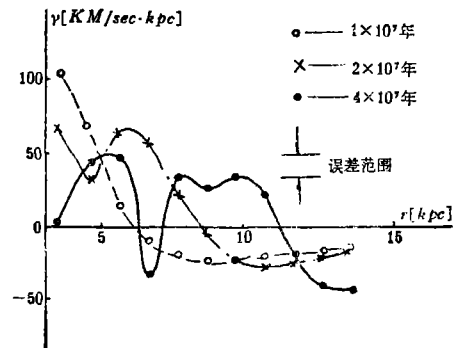


图3b 增长率的演化

出了和渐近解一致的结果。我们没有采用准稳及谐波假定，直接将二维不定常流体力学方程组和全局的引力方程联立数值计算。计算结果表明：图样速度  $\Omega_r$  及增长率  $\gamma$  随空间变化，也随时间变化，线性密度波增长很快，在  $6-8 \times 10^7$  年之后，中心将产生棒状扰动密度分布，在  $8 \times 10^7$  年时，中心区域的扰动密度将增长到与基态同量级。计算结果还表明，在每个确定时刻，星系将维持整体螺旋结构图样，螺旋结构宏图存在。观测所见到的螺旋结构也是一个确定时刻的图样，但和渐近解不同，螺旋结构并不是以整体不变的、固定的图样速度  $\Omega_r$  旋转，而且线性密度波不稳定，它的增长率比文 [ 2 ] 的结果要快得多。螺旋结构的图样不断演化，在  $10^7$  年的时间内并不准稳。

我们所得到的上述结果和秦元勋等的非线性计算结果<sup>[7]</sup>基本一致。所以密度波的快增长模式在线性近似时也存在，但非线性增长更快些。文 [ 7 ] 的计算结果表明，在星系中心区域，距初始时刻  $4 \times 10^7$  年时，扰动密度增长到与基态同量级。而我们的线性计算得出较低的扰动密度增长率，相应于上述时间是  $8 \times 10^7$  年，这时在星系中心区域开始形成棒状扰动密度分布。这说明线性密度波增长很快，是不稳定的，非线性效应将使它增长更快，因此必

须考虑非线性效应的影响。

Lindblad<sup>[10]</sup>等人主张银河系中心的质量分布可能有卵形畸变, Ostriker and Peebles<sup>[11]</sup>关于扁平星系稳定问题的研究说明基态模型中当总能量的很大一部份是在旋转动能中时, 将有棒状不稳定性占优势。计算结果说明, 在我们的具体条件下存在着这种棒状扰动的质量分布: 螺旋结构和棒旋结构是星系演化到某一阶段时相应的扰动密度波, 它们都不是准稳的。它们的演化过程, 可能反映了基态引力场的特征。

致谢: 感谢胡文瑞同志的指导和帮助。

### 参 考 文 献

- [1] Lin, C. C. and Y. Y. Lau, *Studies in Applied Mathematics*, 60 (1979), 97.
- [2] Pannatoni, R. F. and Y. Y. Lau, *Proc. Natl. Acad. Sci., USA*, 76(1979), 1, 4, Astronomy.
- [3] Miller, R. H. and K. H. Prendergast, *Astrophys. J.*, 151(1968), 699.
- [4] 解伯民、巢纪平, 科学通报, 23 (1978), 3, 158.
- [5] 胡文瑞, 科学通报, 22(1977), 79.
- [6] 秦元勋等, 1977年全国天体物理会议论文集, 科学出版社(1981).
- [7] 秦元勋等, 科学通报, 24(1979), 606.
- [8] 林家翘, 《星系螺旋结构理论》, 胡文瑞, 韩念国译, 科学出版社(1977).
- [9] Schmidt, M., in *Galactic Structure*, (1965), 513.
- [10] Lindblad, B., *Handb. Physik*, 53(1959), 21.
- [11] Ostriker, J. P. and P. J. E. Peebles, *Astrophys. J.*, 186 (1973), 467.

## The Linear Growth of the Density Wave in Galaxies

Tang Ze-mei

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

### Abstract

The aim of this article is to study the linear growth of the density wave in galaxies by means of numerically resolving unsteady, two-dimensional hydrodynamic equation coupled with Poisson equation under the condition that the local asymptotic solution of linear density wave is given as initial value. The results show that the perturbed peak density of linear density wave grows to the same order as the basic state density during merely tens of million years, the spiral pattern emerging which has barred structure in its inner region. The angular velocity of the spiral pattern and the growth rate of perturbed density vary gradually with changes in spatial place and time. The approximate property of quasistationary spiral structure hypothesis is discussed in this paper.