应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

含稀疏分布杂质的复合材料中的均匀化稳恒热传导方程*

戴世强　　李家春

（中国科学院力学研究所，1981年8月31日收到）

摘　　要

本文应用双空间尺度法导出了含稀疏分布椭圆柱形杂质的复合材料柱中的均匀化稳恒热传导方程，求得了等效导热系数的具体形式，并指出，当杂质在截面单向分布时，宏观热传导是各向异性的，而当杂质柱截面按方向均匀分布时，宏观热传导是各向同性的.

一、引　　言

复合材料的物理性质经常呈现小尺度变化，描述分析起来比较困难；采用适当的均匀化步骤，对这种物理性质作等效的宏观数学描述，在工程应用中是很有实际意义的. J. B. Keller[1][2] 利用双空间尺度法对非均匀介质作了均匀化处理；丁汝[3]借此研究了含小杂质球的介质中的热传导问题；本文用这种方法推导一种含稀疏分布杂质的复合材料柱中的均匀化稳恒热传导方程，给出了等效导热系数的具体形式，所处理的模型如下：

（1） 假定有一无限长柱体，掺有稀疏分布的、与其平行的小杂质椭圆柱，杂质柱总数为 N，数密度为 n；

（2） 杂质柱的椭圆截面的半长轴均为 εa，半短轴均为 εb，a, b 与柱体的横向尺寸同量级，ε为小参数，即 $0<\varepsilon\ll 1$；

（3） 柱体的无杂质部分的导热系数为常数k_0，杂质柱的导热系数都是常数k_1；$k_0\neq k_1$；

（4） 整个柱体内有强度为$h\left(x,\ \dfrac{x}{\varepsilon},\ \varepsilon\right)$的稳恒热源，且具有稳恒的温度分布 $u\ (x,\ \varepsilon)$，$x=(x_1,\ x_2)$ 为柱内各点的横向坐标.

下面，我们首先就此模型导出一般的均匀化热传导方程，然后讨论杂质柱截面单向分布和按方向均匀分布两种特殊情形，并指出，对前者来说，宏观热传导是各向异性的，对后者来说，则是各向同性的.

二、均　匀　化　步　骤

我们按照 J. B. Keller[2] 的均匀化步骤来推导均匀化热传导方程和等效导热系数.

---

* 本工作是在美国纽约大学丁汝教授1980年来力学所讲学期间完成的，作者曾得到他的热情鼓励和指导；1981年8月，J. B. Keller 教授来力学所讲学时，对本文提出了有益的建议. 作者谨向他们致谢.

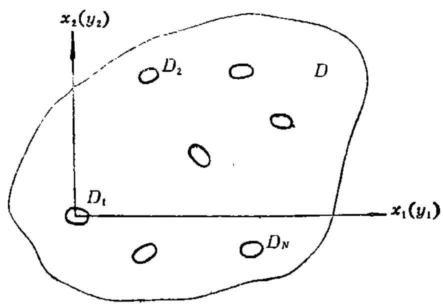

图　1

在所考虑的情形中，稳恒热传导方程为

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)=h\left(x,\ \frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right) \tag{2.1}$$

$$x=(x_1,x_2)\in D$$

其中

$$K=\begin{cases}k_1 & x\in D_j\quad(j=1,2,\cdots,N)\\ k_0 & x\in D,\ x\bar{\in} D_j\end{cases} \tag{2.2}$$

D为柱截面区域，D_j为杂质柱截面(参看图1)，(2.1)式中用了求和约定(下同)。

引进双空间尺度

$$x,\ y=\frac{x}{\varepsilon}$$

并令

$$u(x,\varepsilon)=v(x,y,\varepsilon)=v_0(x,y)+\varepsilon v_1(x,y)+\varepsilon^2 v_2(x,y)+\cdots$$

$$h\left(x,\ \frac{x}{\varepsilon},\varepsilon\right)=h(x,y,\varepsilon)=h_0(x,y)+\varepsilon h_1(x,y)+\varepsilon^2 h_2(x,y)+\cdots$$

代入(2.1)式，比较ε的同次幂，得到递推方程

$$L_1 v_0=0 \tag{2.3}$$

$$L_1 v_1=-L_2 v_0=H_1 \tag{2.4}$$

$$L_1 v_2=-L_2 v_1-L_3 v_0+h_0=H_2 \tag{2.5}$$

其中

$$L_1=\frac{\partial}{\partial y_i}\left(K\frac{\partial}{\partial y_i}\right)$$

$$L_2=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial}{\partial y_i}\right)+\frac{\partial}{\partial y_i}\left(K\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

$$L_3=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K\frac{\partial}{\partial x_i}\right)$$

显而易见，方程(2.3)的解为

$$v_0=v_0(x) \tag{2.6}$$

现在引进积分平均记号

$$\bar{f}(x)=\lim_{S_y\to\infty}\frac{1}{S_y}\iint_{S_y}f(x,y)dy \tag{2.7}$$

把(2.6)式代入(2.4)式，得

$$L_1 v_1=H_1=-\frac{\partial K}{\partial y_l}\ \frac{\partial v_0}{\partial x_l} \tag{2.8}$$

因此，方程(2.4)的可解性条件$\bar{H}_1=0$自动符合，取

$$v_1=\frac{\partial v_0}{\partial x_l}\varphi_l(x,y) \tag{2.9}$$

其中$\varphi_l(x,y)$待定。把(2.9)式代入(2.8)式，得到φ_l应满足的方程

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\left(K\frac{\partial \varphi_l}{\partial y_i}\right)=-\frac{\partial K}{\partial y_l}\qquad (l=1,\ 2) \tag{2.10}$$

把(2.6)、(2.9)式代入(2.5)式，由方程(2.5)的可解性条件 $\overline{H}_2=0$，得到首项 $v_0(x)$ 应满足的均匀化方程

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(A_{il}\frac{\partial v_0}{\partial x_l}\right)=\bar{h}_0(x) \tag{2.11}$$

其中等效导热系数 $A_{il}(i,l=1,2)$ 为

$$A_{il}=\overline{K}\delta_{il}+\overline{K\frac{\partial \varphi_l}{\partial y_i}}=k_0\delta_{il}+\overline{(k_1-k_0)\left(\delta_{il}+\frac{\partial \varphi_l}{\partial y_i}\right)} \tag{2.12}$$

这里用了(2.2)式，末项取平均时仅需在杂质柱截面上积分，δ_{il} 为 Kronecker δ。

三、各椭圆截面单向分布的情形

首先考虑各个椭圆的长轴和短轴分别平行于 y_1轴和y_2轴的简单情形，即杂质柱截面单向分布的情形。

现在的关键问题是求解方程(2.10)．根据杂质柱稀疏分布这一重要假定，可认为各椭圆柱之间无相互作用，因而可对各椭圆柱分别解方程(2.10)。取一个椭圆截面，令其中心位于坐标系 $O\text{-}y_1y_2$ 的原点，引进椭圆坐标(ξ,η)。

$$y_1=c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta,\qquad y_2=c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta \tag{3.1}$$

其中， $c=\sqrt{a^2-b^2}$．椭圆周线$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 可写成

$$\xi=\xi_1=\mathrm{ch}^{-1}\frac{a}{c} \tag{3.2}$$

导热系数K可记成

$$K=K(\xi)=(k_0-k_1)J(\xi-\xi_1)+k_1 \tag{3.3}$$

式中 J 为阶梯函数。

在椭圆坐标(3.1)下，方程(2.10)化为

$$\frac{1}{H^2}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(K\frac{\partial \varphi_l}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(K\frac{\partial \varphi_l}{\partial \eta}\right)\right]=-\frac{\partial K}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial y_l}\qquad (l=1,2) \tag{3.4}$$

其中 H 为 Lamé系数

$$H=H_\xi=H_\eta=c\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi-\cos^2\eta}$$

利用(3.1)、(3.3)式和复合函数求导数公式，方程(3.4)化为

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(K\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(K\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta}\right)=(k_1-k_0)\delta(\xi-\xi_1)c\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\eta \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}\left(K\frac{\partial \varphi_2}{\partial \xi}\right)+\frac{\partial}{\partial \eta}\left(K\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta}\right)=(k_1-k_0)\delta(\xi-\xi_1)c\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\eta \tag{3.6}$$

式中δ为Dirac δ函数．对(3.5)、(3.6)式关于ξ从ξ_1-0积分到ξ_1+0，得到φ_l的导数跳跃条件

$$\left[K\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}\right]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}=k_0\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}(\xi_1+0,\eta)-k_1\frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi}(\xi_1-0,\eta)=(k_1-k_0)\,b\cos\eta \tag{3.7}$$

$$\left[K\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}\right]_{\xi_1-0}^{\xi_1+0}=k_0\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}(\xi_1+0,\eta)-k_1\frac{\partial\varphi_2}{\partial\xi}(\xi_1-0,\eta)=(k_1-k_0)a\sin\eta \tag{3.8}$$

容易验证，这两个条件相当于一阶近似下椭圆柱界面上热流连续的条件*)．此外，对$\varphi_l(l=1,2)$还有如下条件：

$$\varphi_l(\xi_1+0,\eta)=\varphi_l(\xi_1-0,\eta) \tag{3.9}$$

$$\varphi_l(\xi,\eta)<\infty \qquad (\text{当}\xi\to\infty)\text{时} \tag{3.10}$$

$$\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_i}<\infty \qquad i=1,2,\quad \forall\xi,\eta \tag{3.11}$$

值得注意的是，在椭圆的焦点$y_1=\pm c$，$y_2=0$（即$\xi=0$，$\eta=0$或π）处，条件(3.11)必须满足，这是一种自然边界条件．在椭圆柱内部和外部，方程(3.5)、(3.6)为Laplace方程，即

$$\frac{\partial^2\varphi_l}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi_l}{\partial\eta^2}=0 \qquad (l=1,2;\xi>\xi_1\text{ 或 }\xi<\xi_1) \tag{3.12}$$

在条件(3.7)—(3.11)下，用分离变量法解方程(3.12)，得到当$\xi<\xi_1$时（即在椭圆柱内部）

$$\varphi_1=B_1c\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\eta=B_1y_1 \tag{3.13}$$

$$\varphi_2=B_2c\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\eta=B_2y_2 \tag{3.14}$$

其中

$$B_1=\frac{(k_0-k_1)b}{k_0a+k_1b},\qquad B_2=\frac{(k_0-k_1)a}{k_0b+k_1a} \tag{3.15}$$

(2.12)式可改写成

$$A_{il}=k_0\delta_{il}+n\varepsilon^2\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}\iint_{D_j}(k_1-k_0)\left(\delta_{il}+\frac{\partial\varphi_l}{\partial y_i}\right)dy \tag{3.16}$$

由于N个杂质柱的φ_l均由(3.13)、(3.14)式给出（当椭圆中心y_{1j},y_{2j}不在坐标原点时，式中的y_1,y_2改成y_1-y_{1j}，y_2-y_{2j}），把它们代入(3.16)式，得到等效导热系数

$$\left.\begin{aligned}A_{11}&=k_0+n\varepsilon^2\pi ab(a+b)\frac{k_0(k_1-k_0)}{k_0a+k_1b}\\A_{22}&=k_0+n\varepsilon^2\pi ab(a+b)\frac{k_0(k_1-k_0)}{k_0b+k_1a}\\A_{12}&=A_{21}=0\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

把(3.17)式代入(2.11)式，就得到所考虑情形下的均匀化热传导方程

$$A_{11}\frac{\partial^2v_0}{\partial x_1^2}+A_{22}\frac{\partial^2v_0}{\partial x_2^2}=h_0(x_1,x_2) \tag{3.18}$$

很明显，当$a\neq b$时，$A_{11}\neq A_{22}$，因此热传导是各向异性的，这印证了J. B. Keller[2]的一般结论．

对于杂质柱为有相同半径的圆柱的特殊情形$(a=b)$，则有

$$A_{11}=A_{22}=k_0+n\varepsilon^2\pi a^2\frac{2k_0(k_1-k_2)}{k_1+k_0} \tag{3.19}$$

亦即，这时的宏观热传导是各向同性的．

*) J. B. Keller 教授向作者指出了这一事实，谨此致谢．

四、各椭圆截面按方向均匀分布的情形

本节中，我们考虑各椭圆长轴与一固定轴（例如y_1轴）的夹角α在 0 至 2π 间均匀分布的情形．取一椭圆，其长短轴分别为 y_1'，y_2'，于是有

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}=T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},\qquad T=\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \tag{4.1}$$

令

$$\Phi=\begin{pmatrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{pmatrix},\qquad \frac{\partial K}{\partial y'}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial K}{\partial y_1'} \\ \dfrac{\partial K}{\partial y_2'} \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

于是方程(2.10)可写成矩阵形式

$$L_1'\Phi=T^{-1}\left(-\frac{\partial K}{\partial y'}\right) \tag{4.3}$$

其中

$$L_1'=\frac{\partial}{\partial y_i'}\left(K\frac{\partial}{\partial y_i'}\right),\quad T^{-1}=\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

方程（4.3）的解为

$$\Phi=L_1'^{-1}T^{-1}\left(-\frac{\partial K}{\partial y'}\right)=T^{-1}L_1'^{-1}\left(-\frac{\partial K}{\partial y'}\right) \tag{4.4}$$

利用上节结果，得

$$\Phi=T^{-1}B\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix}=T^{-1}BT\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}=M\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \tag{4.5}$$

其中

$$B=\begin{pmatrix} B_1 & 0 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}$$

因此

$$M=\{m_{il}\}=\begin{pmatrix} B_1\cos^2\alpha+B_2\sin^2\alpha & (B_1-B_2)\sin\alpha\cos\alpha \\ (B_1-B_2)\sin\alpha\cos\alpha & B_1\sin^2\alpha+B_2\cos^2\alpha \end{pmatrix} \tag{4.6}$$

(4.5) 式 可改写成

$$\varphi_l=m_{il}y_i \qquad (l=1,2) \tag{4.7}$$

把(4.7)、(4.6)式代入(3.16)式，关于 α 从 0 至 2π 取平均，得到

$$A_{il}=k_0\delta_{il}+n\varepsilon^2(k_1-k_0)\pi ab(\delta_{il}+\langle m_{il}\rangle) \tag{4.8}$$

其中

$$\langle m_{il}\rangle=\frac{1}{2}(B+B_2)\delta_{il}$$

从而得到等效导热系数为

$$A=A_{11}=A_{22}=k_0+ne^2\frac{\pi ab\,k_0\,(k_1^2-k_0^2)\,(a+b)^2}{2\,(k_0a+k_1b)\,(k_0b+k_1a)} \tag{4.9}$$

均匀化方程为

$$A\left(\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_0}{\partial x_2^2}\right)=h_0(x_1,x_2) \tag{4.10}$$

因而，在这一情况下，宏观热传导是各向同性的，这正在预料之中。

当然，上述方法可用来处理其它热传导问题．例如，最近，徐钧涛和刘曾荣[4]导出了稀疏分布椭球形杂质情形的均匀化热传导方程。

参 考 文 献

[1] Keller, J. B., Effective conductivity, dielectric constant and peameability of a dilute suspension, *Philips Res. Rept.*, 30 (1975), 83*—90*.

[2] Keller, J. B., Effective behavior of heterogeneous media, *Statistical Mechanics and Statistical Method in Theory and Application*, (ed. by V. landman) Plenum Publ. Corp., (1977), 631—644.

[3] 丁汝，摄动法及其在力学中的应用，第一册，概论，(李家春，戴世强整理)，中国科学院力学研究所，(1980).

[4] 徐钧涛，刘曾荣，不均匀介质的均匀化稳恒热传导方程，华东师范大学学报（待发表）.

Homogenized Equations for Steady Heat Conduction in Composite Materials with Dilutely-Distributed Impurities

Dai Shi-qiang Li Jia-chun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, by using the two-space method, homogenized equations for steady heat conduction in the composite material cylinders with dilutely-distributed elliptic cylinders of impurities are derived, and the explicit expressions for the corresponding effective heat conductivity of those which are concerned are obtained. It is also shown that the macroscopic heat conduction is anisotropic when the cross-sections of the impurity cylinders are unidirectionally oriented, and isotropic when the angular distribution of the cross-sections are uniform.