第13卷 第2期
1983年5月25日
力学进展
ADVANCES IN MECHANICS
Vol. 13 No.2
May 25, 1983

论流体运动稳定性理论的两种方法

中国科学院力学研究所 徐硕昌

流体运动稳定问题是流体力学理论中的一个重要课题。它以研究层流如何转变为湍流为主要目的。近一个世纪以来，理论和实验已取得很大进展，但距离最后解决问题还很远。Lin[1] 和Chandrasekhar[2] 总结了早期用简正模法研究的结果。最近，Joseph[3]，Drazin和Reid[4] 作了进一步综述，特别总结了近年来非线性稳定理论的进展。Swinney[5] 所编《流体运动不稳定和湍流的发生》对这一研究领域最新结果作了全面评述。

流体运动稳定性的研究归结为偏微分方程的求解和定性分析。主要有两种方法：简正模法（normal mode approach）和整体方法（global approach），包括能量法和 Ляпунов直接方法。

将流体运动稳定理论和常微分方程稳定理论的方法作一比较可知：简正模法相应于一次近似方法，但用简正模法处理流体运动稳定问题必须具体求解相应的本征值问题才能得到稳定条件。在文献〔1,2〕中所讲述的问题都是如此.能否类似一次近似方法，不必具体求解本征值问题，应用Hurwitz定理就能判定本征值的符号？在作者[6—10]的一系列工作中，应用伴随变分方法处理本征值问题恰可达到这一目的。而且为稳定性问题直接近似计算提供了变分基础，我们将简正模法和伴随变分法相结合而成的方法称为一次近似变分直接方法。

Zubov[11]和Movchan[12]最先将 Ляпунов 直接方法推广到处理偏微分方程的稳定问题。以后，在弹性结构稳定理论中得到广泛的应用[13,14].在1979年 IUTAM 召开的一次“连续系统的不稳定”讨论会上，报告的论文几乎都是固体力学方面问题，只有少数几篇涉及流体运动稳定问题[14]。Knops和Wilkes[15,16] 对Ляпунов直接方法在连续系统稳定理论的应用作了全面综述。主要针对固体力学方面的应用。Joseph[3] 的专著主要论述了能量法对一些流体运动稳定问题的具体应用。

一次近似直接方法只适用于线性稳定问题，Ляпунов 直接方法既能处理线性问题又能处理非线性问题，遗憾的是寻求Ляпунов泛函没有普遍法则.Leipholz[13]认为，稳定理论所使用的量和概念取决于研究目的和兴趣，严格地讲没有统一的理论。对连续介质运动稳定问题如何应用 Ляпунов 方法要进行总结很困难，除了叙述每个具体问题如何按变分不等式去构造 Ляпунов 泛函外，提不出一般的构造方法。不象常微分方程稳定理论那样有一套系统构造 Ляпунов 函数的理论，例如常系数或周期系数的常微分方程组就有一套构造的系统方法。

本文目的是：首先概述应用“一次近似变分直接方法”的基本思路和具体应用；其次试图概述将 Ляпунов 方法推广应用于连续系统的几种途径和应用的几个实例；第三，评述这两

种方法的优缺点.

一、流体运动稳定性的基本概念

Ⅰ. **稳定性的物理含义** 流体力学基本方程的每一解式决定的流体运动状态能否在自然界实现，取决于这个流体运动状态对小扰动的反应，如果小扰动随时间衰减时流体状态能维持下去，就称这种流体运动状态是稳定的；反之，如果小扰动随时间发展，就称为不稳定。

Ⅱ. **数学定义** 按照常微分方程解的稳定性的 Ляпунов 提法给出.

假设流体所占据空间区域为τ，则流体的密度$\rho(\vec{x},t)$，压力$P(\vec{x},t)$，速度$v_i(\vec{x},t)$等都是在集合$T\times\tau=\{(t,\vec{x}):t\geqslant t_0>0,\vec{x}\in\tau\}$上有定义且连续可微的函数. 设所有这样的函数$\varphi(\vec{x},t)$构成函数空间为$L$.

按照物理问题的要求，选定空间L的距离（范），诸如

$$\|u_i(\vec{x},t)-U_i(\vec{x},t)\| =\max_{\vec{x}\in\tau}|U_i(\vec{x},t)-U_i(\vec{x},t,)|$$

$$\text{或}\int_\tau \frac{1}{2}\rho(\vec{u}-\vec{U})^2 d\vec{x},\qquad \text{或}\int_\tau\left[\left\{\nabla(\vec{u}-\vec{U})\right\}^2+(\vec{u}-\vec{U})^2\right]d\vec{x}$$

等.

假设速度$U_i(\vec{x},t)$和压力$P(\vec{x},t)$等是某一层流的基本解，可以为定常，也可以为非定常. 基本流的稳定按给定的距离定义.

定义1 对任意给定的$\varepsilon>O$，存在某个正数$\delta(\varepsilon)$，如果$\|u_i(\vec{x},0)-U_i(\vec{x},0)\|<\delta$，$\|p(\vec{x},)0-P(\vec{x},0)\|<\delta$等对所有$t\geqslant t_0$有下列各式成立：

$\|u_i(\vec{x},t)-U_i(\vec{x},t)\|<\varepsilon$，　$\|p(\vec{x},t)-P(\vec{x},t)\|<\varepsilon$ 等，则称基本流动是稳定的。

定义2 如果当$t\to\infty$时 $\|u_i(\vec{x},t)-U_i(\vec{x},t)\|\to0$，$\|p(\vec{x},t)-P(\vec{x},t)\|\to\infty$等，则称基本流动状态是渐近稳定的.

上述定义保证了在整个时间过程中扰动终始是小的。从偏微分方程定解角度看，就表示初始条件的微小变化，在整个过程中解的变化也是微小的。

定义3 如果存在某$\varepsilon>0$和初始时刻t_0，存在某确定扰动运动状态$u_i^\circ(\vec{x},t)$，$p^\circ(\vec{x},t)$，虽然满足$\|u_i^\circ(\vec{x},t_0)-U_i(\vec{x},t_0)\|<\delta$，$\|p^\circ(\vec{x},t_0)-P(\vec{x},t_0,)\|<\delta$，但总存在某个时刻$t_1>t_0$使得

$$\|u_i^\circ(\vec{x},t)-U_i(\vec{x},t)\|>\varepsilon$$

或

$$\|p^\circ(\vec{x},t)-P(\vec{x},t)\|>\varepsilon$$

则这个基本流动状态称为不稳定.

Ⅲ. **按Ляпунов稳定性定义的特点**[17]

1. Ляпунов 稳定概念是一种局部概念，它涉及被考虑状态附近的特性，因此，初始扰动范围较小，也就是δ值较小，对应于物理上小扰动情形。特别是对渐近稳定性，要求的δ值就更小。

2. 时间是无限长的。如果只考虑有限时间，则相应地有有限时间的稳定理论。

3. 初始扰动的大小与初始时刻t_0的选择无关。

4. 初始扰动之后无其他外扰，初始扰动来源不必考虑。

5. 基本流动状态与扰动运动状态服从同一基本方程组，而且二者在同一时刻进行比较。

线性与弱非线性稳定理论都是按上述定义给出。对应的初始扰动可任意时所定义的稳定，称为全局稳定。

Ⅳ. Ляпунов 稳定概念在解决实际问题中的局限性　从数学方面看，按 Ляпунов 提法建立的常微分方程稳定理论是很严格的。在工程实际问题中，离散系统的稳定问题按 Ляпунов 稳定概念得到最合理的解决。但对某些实际问题，这一理论仍旧无能为力。例如图1所示小球的平衡状态按 Ляпунов 局部稳定定义是不稳定的，但它实际上是稳定的；又如图2所示小球的平衡状态按Ляпунов 局部稳定定义是稳定的，可是实际上对大扰动是不稳定的。

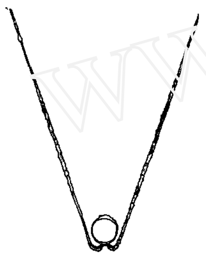

图1

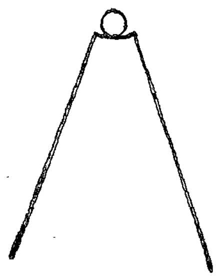

图2

再如欧拉杆的稳定，其受载的上端是自由端，下端是固定端。随着载荷P的增加会出现很复杂的情形。对于杆的垂直平衡状态存在一个临界载荷P_c'，当$P<P_c'$时，杆的垂直平衡状态才能稳定；当$P>P_c'$时，杆的性状要由大挠度方程描述。此时杆要维持一种小弯曲状态的平衡，还存在另一个临界载荷P_c''，当$P<P_c''$时杆存在稳定的小弯曲平衡状态。$P<P_c'$可应用线性稳定理论处理；$P<P_c''$可应用弱非线性稳定理论处理。当P大到一定程度时，杆会绞结成麻花，这些杆的性能和变形出现突变状态，连续系统的大扰动稳定理论也无能为力。

以处理小扰动为对象的局部稳定理论，就是对离散系统而言，也会出现极大的数学困难。例如最简单的常系数常微分方程组情形，当出现特征根实部为零的临界情形，处理起来就很困难。处理偏微分方程组的临界情形就更加困难。所以尽管从50年代就开始非线性流体运动稳定理论的研究，目前绝大部分研究还都属弱非线性范畴。

流体运动稳定理论的发展，在数学严谨性方面常微分方程稳定理论是标准；在实用性方面，弹塑性动力稳定理论和陀螺稳定理论是榜样。非线性流体流动稳定理论的发展必须放弃数学的严谨性，目标向实用性方面发展，否则将裹足难行。

二、一次近似变分直接方法

Ⅰ．简正模方法概述 按照小扰动假设，在基本流$\vec{U}(\vec{x})$上叠加上流动的小扰动．在流体力学基本方程组中忽略二阶以上小量得到描述一阶量的线性小扰动方程组．

由于这些线性小扰动方程组只含时间t的导数而不显含时间，所以可以期望有和指数函$e^{i\lambda t}$数成比例的解．在扰动边界条件是齐次情形下，就导得以λ作特征值的一组本征值问题．如果如此得到的本征函数系是完全的，则一般解就可用这些特解的和式表示[2,10]．对于自伴情形已有严格证明，这就是按正交完备函数系展开的理论．一般情形只能算是自伴情形的外推和基于物理事实的约定．非自伴情形只有个别情形证明了本征函数系的完备性[20,21]．

简正模法通过直接求解本征值问题来决定本征值的符号，一般情形$\lambda=\lambda_c+i\lambda_i$是复数．如能证明所有本征值的虚部$\mathrm{Im}\lambda_i>0$，则基本流是稳定的；如果至少有一个本征值$\mathrm{Im}\lambda_i^{\circ}<0$，则基本流是不稳定的．

直接求解本征值问题是很复杂的，我们应用伴随变分方法来处理本征值问题可以不必具体求解本征值问题而能决定本征值的符号，我们称为"一次近似变分直接方法"．

以下我们通过处理"旋转液体星的稳定"这个经典问题来阐明这个方法的具体步骤[9]．

Ⅱ．用"一次近似直接变分方法"解题的步骤

1．导出平衡解 液体星平衡状态满足

$$\rho_0\nabla\left\{B_0+\frac{1}{2}|\vec{\Omega}_0\times\vec{x}|^2\right\}=\nabla P_0 \tag{2-1}$$

$$B_0=G\iiint_V\frac{\rho_0(\vec{x}')}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}' \tag{2-2}$$

$$\text{在}S\text{上，}P_0=0 \tag{2-3}$$

其中ρ_0，P_0，B_0分别为液体星的密度，压力和引力势，$\vec{x}$为矢径，G为万有引力常数，$\vec{\Omega}_0$为角速度．

2．导出小扰动方程和本征值问题 假设$\vec{\xi}(\vec{x},t)$为扰动位移矢量，则以$\vec{\xi}$为变元的小扰动方程为

$$\rho_0\frac{\partial^2\vec{\xi}}{\partial t^2}+2\rho_0\vec{\Omega}_0\times\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}-\mu\nabla^2\left(\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}\right)=-\nabla\widetilde{P}-\nabla\cdot(\rho_0\vec{\xi})\frac{\nabla\rho_0}{\rho_0}$$
$$+\rho_0\nabla_{\vec{x}}\left\{\iiint_V G\rho_0(\vec{x}')(\vec{\xi}\cdot\nabla)_{\vec{x}'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}\right\} \tag{2-4}$$

$$\nabla\cdot\left(\frac{\partial\vec{\xi}}{\partial t}\right)=0 \tag{2-5}$$

在边界S上满足

$$\left(\widetilde{P}+(\vec{\xi}\cdot\nabla\rho_0\right)\cdot n_i-\mu\left(\frac{\partial^2\xi_i}{\partial x_j\partial t}+\frac{\partial^2\xi_j}{\partial x_i\partial t}\right)=0 \tag{2—6}$$

假设 $\vec{\xi}(\vec{x},t)=\vec{\xi}(\vec{x})e^{\sigma t}$ （2—7）

代入（2-4）—（2-6）导得本征值问题A：

$$\begin{cases} \rho_0\sigma^2\vec{\xi}+\sigma(2\rho_0\vec{\Omega}_0\times\vec{\xi}-\mu\nabla^2\vec{\xi})=-\nabla\widetilde{P}(\vec{\xi})-\dfrac{(\vec{\xi}\cdot\nabla)\rho_0}{\rho_0} \\ +\rho_0\nabla_{\vec{x}}\left\{\iiint_V G\rho_0(\vec{x}')(\vec{\xi}\cdot\nabla)_{\vec{x}'}\dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}'\right\} & (2\text{-}8) \\ \nabla\cdot\vec{\xi}=0 & (2\text{-}9) \\ \text{在}S\text{上，}[\widetilde{P}(\vec{\xi})+(\vec{\xi}\cdot\nabla)P_0)\cdot n_i-\sigma\mu\left[\dfrac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right]\cdot n_i=0 & (2-10) \end{cases}$$

3．求伴随本征值问题A⁺ 伴随本征值问题求法和常微分方程中伴随算子求法类似，应用分部积分过程即得[22]。设

$$L(u)=0,\quad \vec{x}\in\tau \tag{2-11}$$

是一组齐次微分算子方程．作$L(u)$和另一函数U的内积，应用分部积分即导得相应伴随微分方程

$$<L(u),U>=<u,L^*(v)>+\int_S\left[F(v)G(u)-F(u)G^*(v)\right]dS \tag{2-12}$$

其中F，G也是微分算子，是在分部积分过程中自然形成的．$F(v)$包含第一次分部积分时得到的v项向$G(u)$包含对应的项．

算子L^*称为L的伴随算子，$L^*=L$就称为自伴算子．规定$F(u)$的一类称为本质边界条件，而规定$G(u)$的那一类称为自然边界条件．

利用上述原理可以求得本征值问题A的伴随本征值问题．以$\vec{\eta}$乘方程（2-8），对τ积分然后分部积分直至$\vec{\xi}$上的微分消失为止．由此得到伴随本征值问题A*

$$\begin{cases} \rho_0\sigma^2\vec{\eta}-\sigma[2\rho_0\vec{\Omega}_0\times\vec{\eta}+\mu\nabla^2\vec{\eta}]=-\nabla\widetilde{P}(\vec{\eta})-\dfrac{(\vec{\eta}\cdot\nabla)\rho_0}{\rho_0}\nabla\rho_0 \\ +\rho_0\nabla_{\vec{x}}\left\{\iiint_V G\rho_0(\vec{x}')(\vec{\eta}\cdot\nabla)_{\vec{x}'}\dfrac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}'\right\} & (2-13) \\ \nabla\cdot\vec{\eta}=0 & (2\text{–}14) \\ \text{在}S\text{上，}\left[\widetilde{P}(\vec{\eta})+(\vec{\eta}\cdot\nabla)\rho_0\right]\cdot n_i-\sigma\omega\left[\dfrac{\partial\eta_i}{\partial x_j}+\dfrac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right]\cdot n_i=0 & (2-15) \end{cases}$$

(2—15)

4. 导出变分方程和证明变分原理　变分方程为

$$\sigma(\vec{\xi},\vec{\eta})=\frac{1}{I(\vec{\xi},\vec{\eta})}\left\{-\left[\psi(\vec{\xi},\vec{\eta})+\frac{\Phi(\vec{\xi},\vec{\eta})}{2}\right]\right.$$

$$\left.\pm\sqrt{\left[\psi(\vec{\xi},\vec{\eta})+\frac{\Phi(\vec{\xi},\vec{\eta})}{2}\right]^2-I(\vec{\xi},\vec{\eta})\cdot\delta^2U(\vec{\xi},\vec{\eta})}\right\} \qquad (2\text{-}16)$$

其　中

$$\left.\begin{aligned}
I(\vec{\xi},\vec{\eta})&=\iiint_V\rho_0\vec{\xi}^*\cdot\vec{\eta}\,d\vec{x}\\
\Psi(\vec{\xi},\vec{\eta})&=\iiint_V\rho_0(\vec{\Omega}_0\times\vec{\xi})\cdot\vec{\eta}\,d\vec{x}\\
\Phi(\vec{\xi},\vec{\eta})&=\iiint_V\frac{\mu}{2}\left(\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right)\cdot\left(\frac{\partial\eta_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\eta_j}{\partial x_i}\right)d\vec{x}\\
\partial^2U(\vec{\xi},\vec{\eta})&=\iiint_\tau\vec{\eta}\cdot T\vec{\xi}\,d\vec{x}\\
&=-\iint_S\frac{dP_0}{dn}\eta_n\cdot\xi_n\,dS+\iiint_V\frac{\frac{d\rho_0}{dU}\frac{dP_0}{dU}(\vec{\xi}\cdot\nabla)U(\vec{\eta}\cdot\nabla)U}{\rho_0}d\vec{x}\\
&-\iiint_V\iiint_V G\rho_0(\vec{x})\rho_0(\vec{x}')(\vec{\eta}\cdot\nabla)_{\vec{x}}(\vec{\xi}\cdot\nabla)_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}'d\vec{x}
\end{aligned}\right\}\qquad(2\text{-}17)$$

这样，本征值问题A和A^+就变为泛函$\sigma(\vec{\xi},\vec{\eta})$的变分问题。证明变分原理就是证明本征值问题A和$A^+$的求解和泛函$\sigma(\vec{\xi},\vec{\eta})$取极值是等价的。证明参看文[9]。

5. 导出本征值积分关系式　在变分方程（2－16）中，以$\vec{\xi}^*$代替$\vec{\eta}$得到本征值积分关系式

$$\sigma=\frac{1}{I}\left\{-(\Psi+\frac{\Phi}{2})\pm\sqrt{(\Psi+\frac{\Phi}{2})^2-I\cdot\delta^2W}\right\} \qquad (2\text{-}18)$$

其　中

$$I=I(\vec{\xi},\vec{\xi}^*)=\iiint_V\rho_0\vec{\xi}\cdot\vec{\xi}^*d\vec{x} \qquad (2\text{-}19)$$

$$\Psi=\Psi(\vec{\xi},\vec{\xi}^{*})=\iiint_V \rho_0\ (\vec{\Omega}_0\times\vec{\xi})\cdot\vec{\xi}^{*}d\vec{x} \tag{2-20}$$

$$\Phi=\Phi(\vec{\xi},\vec{\xi}^{*})=\iiint_V \frac{\mu}{2}\left|\frac{\partial\xi_i}{\partial x_j}+\frac{\partial\xi_j}{\partial x_i}\right|^2 d\vec{x} \tag{2-21}$$

$$\delta^2U=\delta^2U(\vec{\xi},\vec{\xi}^{*})=\iiint_V \vec{\xi}^{*}\cdot T\,\vec{\xi}d\vec{x}$$

$$=-\iint_S \frac{\partial p_0}{\partial n}(\vec{\eta}\cdot\vec{\xi})^2dS+\iiint_V\iiint_V \frac{(\vec{\xi}\cdot\nabla)U\cdot(\vec{\xi}^{*}\cdot\nabla)U}{\rho_0}$$

$$\cdot\frac{dp_0}{dU}\frac{dp_0}{dU}d\vec{x}$$

$$-\iiint_{V}\iiint_V G\rho_0(\vec{x})\rho_0(\vec{x}')(\vec{\xi}^{*}\cdot\nabla)_{\vec{x}}(\vec{\xi}\cdot\nabla)_{\vec{x}'}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}d\vec{x}d\vec{x}' \tag{2-22}$$

可以证明，由变分方程（2-16）和（2-18）决定的本征值是一一对应的。

在方程（2-18）中各项具有明确的物理意义：I 表示扰动动能变化率，2Ψ 相应于Coriolis 力的功率（$\Psi^2\leqslant 0$），$\Phi>0$ 是粘滞耗散功率，δ^2U 是对应于液体星总势能的变化率。

推导（2-18）可用类似于推导变分方程的过程，开始就用 $\vec{\xi}^{*}$ 代替 $\vec{\eta}$ 直接得到。某些作者就是这样做的，例如〔2〕、§ 122-（a），〔23〕和〔24〕等。他们的做法缺乏变分基础，同时给不出计算发展率的方法，但两种过程所得结果一样。

6、求出运动稳定判据　利用（2-18）和

引理 1　设 $z=e+if$（$e>0$）和任意实数 a，则

$$(1)\quad \mathrm{Re}\left\{-z\pm\sqrt{z^2-a^2}\right\}<0 \tag{2-23}$$

$$(2)\quad 0<\max\left\{\mathrm{Re}\left(-z\pm\sqrt{z^2+a^2}\right)\right\}<a \tag{2-24}$$

可以得到如下稳定判据：

定理 1　如果对所有本征函数 $\vec{\xi}$ 满足

$$\delta^2U(\vec{\xi},\vec{\xi}^{*})=\iiint_V \vec{\xi}^{*}\cdot T\,\vec{\xi}d\vec{x}>0 \tag{2-25}$$

则旋转液体星是稳定的。

定理 2　如果至少存在一个本征函数 $\vec{\xi}$，使

$$\delta^2 U(\vec{\xi}, \vec{\xi}^{\cdot}) = \iiint_V \vec{\xi}^{\cdot} \cdot T \vec{\xi} d\vec{x} < 0 \qquad (2\text{-}26)$$

则旋转液体星是不稳定的。

7．稳定分析的近似方法[25,26] 选择在区域V上有定义的正交函数系

$$\vec{u}_i(\vec{x}) \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2-27)$$

不必满足边界条件，因为我们证明的变分原理是自然边界条件下的变分问题，泛函$\sigma(\vec{\xi}, \vec{\eta})$取极值后边界条件自动满足，假设

$$\vec{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \vec{a}_i \cdot \vec{u}_i(\vec{x}), \qquad \vec{\eta} = \sum_{i=1}^{n} \vec{b}_i \cdot \vec{u}_i(\vec{x}) \qquad (2\text{-}28)$$

将（2-27）代入变分方程（2-16），$\sigma(\vec{\xi}, \vec{\eta})$变为待定常矢量$\vec{a}_i$，$\vec{b}_i$的函数，

按泛函数取极值条件导得

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \vec{a}} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma}{\partial \vec{b}} = 0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n) \qquad (2\text{-}29)$$

方程（2—29）是一组$6n$个未知量的非线性代数方程组，这有现成的计算方法进行计算。

Ⅲ．一次近似变分直接方法的注记 一次近似直接方法实质上是简正模法和伴随变分方法的合成。在某些情形下可以不必求解本征值问题而能判定本征值虚部的符号，它的局限性都是简正模法原来就存在的。

1．长期以来，简正模法是一种有效的解决实际问题的办法，特别在流体运动稳定问题中是如此[1,2]．它能计算出不稳定发展率，但计算较繁，即使求稳定临界条件也是如此。改进为一次近似变分直接方法后在某些情形可以直接判定本征值符号而得出稳定充要条件，一般情形只能得到稳定的充分条件或者必要条件。这个方法对非自伴线性本征值问题原则上都能适用。

2．简正模法决定的不稳定充分条件是可靠的。在使用稳定性条件时必须格外小心，要靠得住就必须确保本征模是完全的，在实际问题中，按本征函数系展开构成解的方法一直在使用[1,27]，多数情形都缺乏完备性的证明，只有个别情形有证明[20,21]．

3．简正模法只适用于纯离散谱的线性问题。但存在这个局限问题也不大，因为不稳定谱一般都出现在离散谱内[18]。

4．除自伴情形外，本征函数的存在性和完备性一般都没有证明。同时，对线性情形得到的稳定结论在考虑非线性效应后是否仍旧成立，都是尚待解决的问题。

三、Ляпунов直接方法

Ⅰ．定义和定理[15] Movchan将Ляпунов稳定概念对连续系统作了最广泛的推广[12]。Knops和Wilkes[15]作了更通俗的阐述。以下叙述Movchan理论的主要结论。

假设系统被变量z_1，z_2，…所描述。在流体力学中这些变量包括速度分布$u_i(\vec{x},t)$和压力分布$p(\vec{x},t)$及温度$T(\vec{x},t)$等，这些变量z_i是位置$\vec{x}$和时间t的函数。系统的状态被（z_1,z_2，…，t）所描述，记为（ξ，t）。所有（ξ,t）构成ZT空间。空间ZT的每一可能路径相应于系统的“轨迹”。

基本流动所对应的路径称为未扰动路径，记为（ξ^0，t）；扰动路径记为（ξ，t）。如果路径变成空间ZT的一个点，称为“退化路径”。

稳定性按两个距离ρ^0（ξ，t），$\rho(\xi,t)$来定义，对于未扰动路径的每点（ξ^0，t）满足$\rho^0(\xi,t)=\rho(\xi^0,t)=0$，初始扰动用$\rho^0(\xi,t)$来测度，扰动路径用$\rho(\xi,t)$来测度。

1。稳定的定义　对于从点（ξ^0，t_0）出发的未扰路径和从邻近点出发的路径按距离$\rho^0(\xi,t)$，$\rho(\xi,t)$来说是稳定的须满足下述条件：

1.1.距离$\rho(\xi,t)$对于每一非退化路径是t的连续函数。

1.2.距离$\rho(\xi,t)$关于$\rho^0(\xi,t)$是连续的，即对任给$\varepsilon_1>0$，存在$\delta_1(\varepsilon_1,t_0)>0$，只要$\rho_0(\xi(t_0),t_0<\delta_0$，则$\rho(\xi(t_0),t_0)<\varepsilon_1$。

1.3.对任给$\varepsilon_2>0$，存在$\delta_2(\varepsilon_2,t_0)>0$，只要在$t_0$时刻，$\rho^0(\xi(t),t)<\delta_2(\varepsilon_2,t_0)$使得对所有$t\in T$（$t>t_0$）和所有扰动路径满足$\rho(\xi,t)<\varepsilon_2$。

如果$\rho^0(\xi,t)=\rho(\xi,t)$，1.2就自然满足。

2。不稳定的定义　如果系统不是稳定的就称为不稳定的。条件1.1，1.2不变，1.3代换为

2.1.存在某个$\varepsilon_3>0$和某一初始时刻t_0，对于任意的δ_3，虽然$\rho^0(\xi(t_0),t_0)<\delta_3$满足，但总至少存在某个$t_1(\geqslant t_0)$使得$\rho(\xi,t_1)\geqslant\varepsilon_3$。

如果条件1.1，1.2，和2.1成立，则称系统是不稳定的。

3。稳定性定理　未扰路径关于ρ^0，ρ是稳定的充要条件是

3.1。对任意非退化路径，距离$\rho(\xi,t)$是t的连续函数。

3.2.距离$\rho(\xi,t)$关于$\rho^0(\xi,t)$是连续的。

3.3.在ZT空间的子空间$L=\{(\xi,t)：\rho(\xi,t)<R\}$（$R$为正实数）上存在泛函$f(\xi,t)$满足①$f(\xi,t)>0$，即$f(\xi,t)$正定；②$\dfrac{df}{dt}\leqslant 0$；③泛函$f(\xi,t)$关于$\rho^0$有无穷小上界，即对任一$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)>0$使得只要$\rho^0(\xi(t_0),t_0)<\delta$就满足$f(\xi(t_0),t_0)<\varepsilon$。

4。不稳定性定理　未扰路径关于ρ^0，ρ是不稳定的充要条件是

4.1.对任意非退化路径，距离$\rho(\xi,t)$是t的连续函数。

4.2。距离$\rho(\xi,t)$关于距离$\rho^0(\xi,t)$是连续的。

4.3。空间ZT的每一路径具有唯一性：对ZT空间的每一点（$\bar{\xi}$，$\bar{t}$），从这点出发的任两条路径在$t>\bar{t}$全部时间内都重合。这是因为不唯一的解一定是不稳定的，故不必去判别它。

4.4.存在ZT的子空间$\overline{M}=\{(\xi,t)：\rho(\xi,t)<R\}$，在$\overline{M}$上存在泛函满足

① $|f(\zeta,t)|<M$（M为正数）；

②沿任意路径，$f(\zeta(t),t)>0$（$t>t_0$），导数 $\frac{df(\zeta,t)}{dt}$存在且以某正数为下界；

③给定任意$\delta>0$，能找到$(\zeta(t_0),t_0)$满足条件$\rho^0(\zeta(t_0),t_0)<\delta$和$f(\zeta(t_0),t_0)>0$。

Ⅱ．应用举例

1．旋转液体星的稳定[28] 这里应用Ляпунов直接方法处理第二节讲述的问题。

假设描述液体星的变量取为

$$\zeta=(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \dot{\xi}_1,\ \dot{\xi}_2,\ \dot{\xi}_3)$$

ζ是在区域V上有定义且二次连续可微的六维矢量函数。所有ζ构成集合Z。T为给定时间区域（$t\geqslant t_0$）。定义空间ZT的距离为

$$\rho(\zeta,t)=(\vec{\xi},\ T\vec{\xi})+(\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}}) \tag{3-1}$$

其中ρ_0为液体密度，注意不要和距离ρ^0混淆。

选择 Ляпунов 泛函为

$$f(\zeta,t)=\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}})+(\vec{\xi},\ T\vec{\xi})>0 \tag{3-2}$$

仅当$\zeta=(\vec{\xi},\ \dot{\vec{\xi}})=0$时，$f(0,t)=0$。

这里我们选择了总能量为 Ляпунов 泛函，容易证明稳定性定理的所有条件能满足。3.1和3.2显然成立，现在来验证3.3。

①$f(\zeta,t)>0$，即$f(\zeta,t)$正定。$f(\zeta,t)$关于$\rho(\zeta,t)$具有无穷小下界。

由于T正定，存在最小本征值λ。满足

$$\lambda_0=\frac{(\vec{\xi},\ T\vec{\xi})}{(\vec{\xi},\ \rho_0\vec{\xi})} \tag{3-3}$$

则$f(\zeta,t)=\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}})+(\vec{\xi},T\vec{\xi})\geqslant\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}})+\lambda_0(\vec{\xi},\ \rho\vec{\xi})$

$$\geqslant\underline{M}\rho(\xi,t) \tag{3-4}$$

其中$\underline{M}=\min(½,\ \lambda)$。

②$\frac{df}{dt}\leqslant 0$，这由能量积分即得

$$\frac{df}{dt}=-\frac{1}{2}\iiint_V\underline{M}\left(\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial x_i}+\frac{\partial\dot{\xi}_i}{\partial x_i}\right)^2 d\vec{x}\leqslant 0 \tag{3-5}$$

即f沿任意积分曲线是不增的。

③$f(\zeta,t)$ 关于$\rho(\xi,t)$ 具有无穷小上界。

利用 Буняковский-Schwarz不等式可以证明

$$(\vec{\xi},\ T\vec{\xi}) \leqslant (\alpha+\beta+\gamma)(\vec{\xi},\ \rho_0\vec{\xi}) \tag{3-6}$$

其中
$$\alpha = \max_{\vec{X}\in S}\left\{\frac{1}{\rho_0}\left|\frac{dP_0}{dn}\right|\right\}$$

$$\beta = \max_{\vec{X}\in V}\left\{\frac{(\nabla\rho_0)^2(\nabla p_0)^2}{\rho^4}\right\}$$

$$\gamma = \left\{\iiint_V \rho_0(\vec{x})\nabla_{\vec{x}}\left[\iiint_V G^2\rho_0(\vec{x})\left(\nabla_{\vec{x}}\frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|}\right)^2 d\vec{x}'\right]^{\frac{1}{2}} d\vec{x}\right\}^{\frac{1}{2}}\nabla_{\vec{x}'}$$

故
$$f(\xi,t) \leqslant \nu\rho(\xi,t) \tag{3-7}$$

其中 $\nu = \max\left(\frac{1}{2},\ \alpha+\beta+\gamma\right)$。

由此证得稳定性定理如下：

稳定性定理 如果旋转液体星总势能U_0在平衡位置具有极小值，即$\delta^2 U = (\vec{\xi}, T\vec{\xi}) > 0$算子$T$正定，则旋转液体星处于稳定平衡。

直接利用不稳定定义证明不稳定性定理如下：

不稳定定理 假设旋转液体星平衡位置总势能不是取极小，即存在某位移函数$\vec{\eta}(\vec{x})$，$\nabla\cdot\vec{\eta}=0$，使$(\vec{\eta}, T\vec{\eta}) < 0$，则其平衡是不稳定的。

证 对任给定$\varepsilon>0$和任意$\delta>0$，只要初始扰动满足

$$\vec{\xi}(\vec{x},\ 0) = \alpha\vec{\eta}，使\delta^2-\alpha^2(\vec{\eta},\ \rho_0\vec{\eta}) < 0$$

$$\dot{\vec{\xi}}(\vec{x},\ 0) \in \left\{\dot{\vec{\xi}}(\vec{x},\ t):\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}}) < \min\left[\delta^2-\alpha^2(\vec{\eta},\ \rho_0\vec{\eta}),\ -\alpha^2(\vec{\eta},\ T\vec{\eta})\right]\right\} \tag{3-8}$$

就能证明解$\zeta=0$是不稳定的。

事实上，按（3-8）所取初始条件满足

$$\left.\begin{aligned}&\rho(\zeta(t_0),0) = \left[\alpha^2(\vec{\eta},\ \rho_0\vec{\xi}) + (\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}})\right]^{\frac{1}{2}} < \delta\\ 和\quad &\alpha^2(\vec{\eta},\ T\vec{\eta}) + (\dot{\vec{\xi}},\ \rho_0\dot{\vec{\xi}}) < 0\end{aligned}\right\} \tag{3-9}$$

由（3-5）对t积分得

$$\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\rho_0\dot{\vec{\xi}})+(\vec{\xi},T\vec{\xi})=-2\int_0^t\Phi dt+\alpha^2(\vec{\eta},T\vec{\eta})+\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\rho_0\dot{\vec{\xi}})\tag{3-10}$$

根据（3-7）和（3-9），由（3-10）导得

$$\nu\rho^2(\xi(0),)0>\left|\frac{1}{2}(\dot{\vec{\xi}},\rho_0\dot{\vec{\xi}})+(\vec{\xi},T\vec{\xi})\right|>2\int_0^t\Phi dt\tag{3-11}$$

在(3-11)中，$\int_0^t\Phi(t)dt$是t的单调递增函数，取充分大$T>\frac{\nu\varepsilon^2}{2\Phi(t)}$（其中

$\int_0^t\Phi(t)dt=\Phi(t_0)\cdot T$，$0<t_0<T$），可以保证$t>T$时，

$\rho(\xi(t),t)>\varepsilon$

至此不稳定性定理证毕。

利用如下引理

引理1　当偏离旋转液体星平衡位形的小位移保持惯性矩$I=\iiint_V\rho_0(\vec{x})(x_1^2+x_2^2)d\vec{x}$一级近似不变（只改变二级量）时，则在$\Omega_0=\text{const}$使$U_0=\phi-\frac{1}{2}I\Omega_0^2$取极小和在$H=\text{const}$下使$U_0=\phi+\frac{1}{2}\frac{H^2}{I}$取极小，两种情形所得出的长期稳定判据是等价的。

引理2　如果$\Omega_0=\text{const}$，则旋转液体星总势能U_0的二次变分为[9]

$$\delta^2U=\delta^2\left(\phi-\frac{1}{2}I\Omega_0^2\right)=(\vec{\xi},T\vec{\xi})=\iiint_V\vec{\xi}\cdot T\vec{\xi}\,d\vec{x}$$

$$=-\iint_S\frac{dp_0}{dn}(\vec{n}\cdot\vec{\xi})^2dS+\iiint_V\frac{[(\vec{\xi}\cdot\nabla)U_0]^2\frac{d\rho_0}{dU}\frac{dp_0}{dU}}{\rho_0}d\vec{x}$$

$$-\iiint_V\iiint_V G\rho_0(\vec{x})\rho_0(\vec{x}')(\vec{\xi}\cdot\nabla)_{\vec{x}}(\vec{\xi}\cdot\nabla)_{\vec{x}}'\cdot$$

$$\cdot \frac{1}{|\vec{x}-\vec{x}'|} d\vec{x}' d\vec{x} \tag{3-12}$$

综合稳定性定理和不稳定性定理直接得到

最小势能定理　当旋转液体星作为整体旋转的自吸引、不可压粘滞液体处理时，如其平衡位形总势能二次变分不为零，则其平衡稳定的充要条件是保持角动量不变情形下，使总势能取极小值。

这个定理所证明的事实是1883年 Thomson 和 Tait 所预言的结果："如果液体中存在任意微弱粘性，……则唯一的长期稳定情形是在给定角动量下能量是极小，在任何其他能量是极小或极大情形下，平衡都不能是长期稳定状态"。

2。两旋转圆柱之间的Couette流的稳定　假设两圆柱半径分别为 R_1, R_2 （$R_2 > R_1$），分别以角速度Ω_1，Ω_2沿轴向方向旋转，其间充满不可压粘性流体，这就是所谓圆柱间的Couette流。基本流满足

$$u_0 = w_0 = 0\,,\quad v_0 = Ar + (B/r) \tag{3-13}$$

$$A = \frac{\mu - \eta^2}{1-\eta^2},\quad B = \frac{(1-\mu)\eta^2}{1-\eta^2},\quad \eta = \frac{R_1}{R_2},\quad \mu = \frac{\Omega_2}{\Omega_1} \tag{3-14}$$

假设流场的扰动是轴对称的。扰动运动方程组为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{v^2}{r} - \frac{\tau^{\frac{1}{2}}}{k^{\frac{1}{2}} r^2}\left[(1-\mu) + r^2 k\right] v = -\frac{\partial p}{\partial r} + \triangle u - \frac{u}{r^2} \tag{3-15}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial r} + w\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{uv}{r} + \tau^{\frac{1}{2}} k^{\frac{1}{2}} u = \triangle v - \frac{v}{r^2} \tag{3-16}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \triangle w \tag{3-17}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ru) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{3-18}$$

其　中

$\tau = \dfrac{4\Omega_1^2 R_1^2 k}{\nu^2(1-\eta^2)^2}$，　　$k = \dfrac{\mu}{\eta} - 1$，$\nu$为粘性系数。边界条件为

$$u = v = w = 0 \qquad (r = \eta, 1) \tag{3-19}$$

下面，应用 Ляпунов 直接方法来导出稳定的条件[29]。集合Z选择为在区间 $\{\eta \leqslant r \leqslant 1,\ -\infty < z < \infty\}$ 上有定义且二次连续可微向量函数$\vec{v}(u, v, w)$ 的全体。假设u, v, w不依赖于θ，沿z以周期$2\pi/(\alpha T)$（$\alpha > 0$，$T = |1-\mu|\tau$）方式变化。

定义空间ZT的距离为

$$\rho(\vec{v}, t) = \left\{ \frac{1}{2} \iint_D r \left(u^2 + v^2 + w^2\right) dr dz \right. \tag{3-20}$$

$\vec{v}(u,v,w)$ 对应于扰动态；$\vec{0}$ $(0,0,0)$ 对应于平衡态。$D = \left\{ \eta \leqslant r \leqslant 1, \right.$

$$\left. -\pi/(\alpha T) \leqslant z \leqslant \pi/(\alpha T) \right\} \tag{3-21}$$

选取 Ляпунов 泛函

$$f(\vec{v}, t) = \frac{1}{2} \iint_D r \left[u^2 + (1 + Tr^2) v^2 + w^2\right] dr dz \tag{3-22}$$

应用变分法证明一些变分不等式，再利用这些变分不等式导出$df/dt \leqslant 0$的条件[29]。

$$\left.\begin{aligned} &\mu > \eta^2 M(\eta),\ M(\eta) = \frac{4\left[\pi^2 (\ln\eta)^{-2} + 2\right] A_1 + 1}{4\left[\pi^2 (\ln\eta)^{-2} + 2\right] A_1 + \eta^2} \quad (\mu < 1) \\ &\mu > \eta^2 M_1(\eta),\ M_1(\eta) = \frac{4\left[\pi^2 (\ln\eta)^{-2} + 2\right] A_1 - 1}{4\left[\pi^2 (\ln\eta)^{-2} + 2\right] A_1 - \eta^2} \quad (\mu > 1) \\ &\mu > M_2(\eta),\ M_2(\eta) = \frac{1}{4\eta} \left[\eta(\pi^2 (\ln\eta)^{-2} + 2) A_1 A_2\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\mu > 1) \end{aligned}\right\} \tag{3-23}$$

这里条件（3- 23）就是流体运动稳定的充分条件。

最初，Pritchad[30]选择泛函为

$$f(\vec{v}, t) = \iint_D r (u^2 + v^2 + w^2) dr dz \tag{3-24}$$

后来，Joseph（1971）改进选择 Ляпунов 泛函为（[3] §40）

$$f(\vec{v}, t) = \iint_D r \left[u^2 + \lambda v^2 + w^2\right] dr dz \ (\lambda\text{为正常数}) \tag{3-25}$$

上述这些结果中，以Шапакидзе[29]的结果最好，最接近无粘性情形的 Rayleigh 稳定条件 $\mu > \eta^2$。

在上述二个例题中，由第一个例题说明如何应用变分不等式证明的技巧；由第二个例题阐明选择Ляпунов泛函结果好坏的原则。Ляпунов直接方法在流体运动稳定问题其他方面应用参看[3,4,17,31—33]。

Ⅲ．连续系统稳定问题应用 Ляпунов 直接方法的几种途径 连续系统稳定问题应用Ляпунов直接方法，原则上就是按扰动偏微分方程的一些积分恒等式的组合来构成Ляпунов泛函，这实际上是变分技巧的运用。

除了这个一般过程，以下我们总结几种在连续系统稳定问题中应用Ляпунов直接方法的

具体途径。

1。*将连续系统作为刚体处理或按离散系统处理* 这是一个早为人们熟知的把无穷自由度问题变为有限自由度处理的办法。在研究陀螺仪的稳定、飞机的稳定和机械系统的稳定时就是这样进行的。研究天体运动的稳定问题是Ляпунов运动稳定理论的发源地。Ляпунов本人的研究就是从"旋转液体星的平衡和稳定问题"这个课题做起的，这就是我们前面用两种办法都处理过的问题〔9〕。

Ляпунов 及前辈研究者是把液体星作为自身引力作用下的不可压、理想液体介质处理，这样就把问题变为有限自由度的机械系统，系统用s个广义坐标 $q_1, q_2, \cdots, q_s$ 和s个广义速度$\mathring{q}_1$，$\mathring{q}_2, \cdots$，$\mathring{q}_s$描述〔36〕。

控制系统运动的基本方程为

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \mathring{q}_k}\right)-\frac{\partial T}{\partial q_k}=\frac{\partial U}{\partial q_k}+H\sum_{j=1}^{s} q_{jk}\mathring{q}_j \tag{3-26}$$

其中

$$T=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}\alpha_{ki}\dot{q}_k\dot{q}_i\text{——动能} \tag{3-27}$$

$$U=-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{s}\sum_{i=1}^{s}C_{ki}q_kq_i\text{——势能} \tag{3-28}$$

$$q_{ik}=-q_{ki}\text{——陀螺力（回旋力）} \tag{3-29}$$

这样旋转液体星〔9〕和工程中陀螺系统〔37〕归结为相同的数学模型．Kelvin（*1883*）就是按照这个模型建立"星螺仪回转稳定准则"的．

旋转液体星用质点系处理（Lagrange 描述）计及粘性影响时只能考虑二个自由度情形〔36〕。本文前面对旋转液体星用 Euler 描述是按无穷自由度的连续系统处理．

2。*将连续系统按部分变元稳定理论处理* Руменцев〔38〕研究充液腔体运动稳定问题提出了部分变元稳定理论．这样可以把一个本来必须按非线性微分积分方程组处理的问题〔33〕变为有限自由度问题．

决定充液腔体运动的物理量有壳体的广义坐标和 $q_s(s=1,2,\cdots,n)$ 和广义速度 $\dot{q}_s(s=1,2,\cdots,n)$ 另外有腔内液体速度 $\vec{u}(\vec{x},t)$ 和压力 $P(\vec{x},t)$．本来这是 $\infty+2n$ 个自由度问题，Руменцев 定义某些由腔内液体物理量积分的参数

$$p_j=\iiint_V \Phi_j(\vec{x},\vec{v})\,d\vec{x}\quad(j=1,2,\cdots,m)$$

然后他就按变元 q_s，$\dot{q}_s$（$s=1,2,\cdots,n$）和 p_j（$j=1,2,\cdots,m$）考虑充液腔体的稳定，这就可以利用有限自由度情形Ляпунов稳定理论的结论。欲详细了解可参看文〔59〕．

3。*化扰动微分方程组为常微分方程组* 秦元勋等〔17〕处理星系密度波的不稳定问题时，导得的扰动方程本是偏微分方程组，但作了进一步简化使其变为常微分方程组问题处理。

如果扰动偏微分方程是双曲型，则按特征线坐标写出扰动方程可以将方程降维，使得偏微分方程可能变为常微分方程。

4．化本征值问题为某种规范算子形式 对于线性常微分方程稳定问题，已有系统的Ляпунов函数构造法则[17]。对于偏微分算子情形，人们也在朝这一方向努力。Barston[39]对于一类特殊形式偏微分算子，得到系统构造Ляпунов泛函的方法。

对于保守力作用的流动稳定问题，如果小扰动方程可以变换为如下标准形式：

$$P\ddot{\vec{\xi}}+A\dot{\vec{\xi}}+H\vec{\xi}=0, \qquad t\geqslant 0 \tag{3-30}$$

其中$\vec{\xi}(t)\in E$．当$t\geqslant 0$时，E为内积空间．算子P，iA，H是不依赖于t在E有定义的线性自伴算子，且P正定，则通过运动积分恒等式的组合存在一个系统的构造Ляпунов泛函的方法[39]．这一方法在有限自由度的机械体系中[21]，在保守流体力学体系和等离子体体系中均有广泛应用[39]。

四、结束语

1．一次近似变分直接方法只适用于线性非自伴情形，由于一般情形不能确保本征函数系是完备的，所以使用稳定条件时要倍加注意所得不稳定条件是不是可靠的．目前流体流动稳定理论绝大部分是线性理论．线性理论为层流向湍流转捩和工程实际问题提供了丰富而有用的数据．所以，一次近似变分直接方法仍是研究流体流动稳定问题的最有效的办法之一．

非线性理论是目前发展的中心课题．考虑非线性效应将出现非常复杂而有趣的现象．这属于Hopf-Landau方程和分叉现象研究范围，本特辑有另文详细介绍，或参看文[4]和[5]．

2．Ляпунов直接方法是一种研究稳定性的严密方法，不仅可应用于线性和弱非线性情形，甚至可应用于大扰动情形，Ляпунов直接方法也可用于估计稳定的品质，遗憾的是给不出统一法则来构造Ляпунов泛函，就是对有限自由度系统在一般非线性情形也没有一个可行的构造Ляпунов函数的法则．

3．近30年来，Ляпунов直接方法在固体力学领域中已取得很大进展，但在流体力学领域中尚发展不够[13—16]．Joseph用能量法对一些流动问题作了研究，只能得到总体稳定的充分条件，所得下临界雷诺数Re～10^2，条件太强，实用意义不大．目前，Ляпунов直接方法应用于流体流动稳定问题尚无系统理论，但可肯定，其发展前景是远大的．

谈镐生教授给了作者热情的鼓励和指导，徐复、周恒等同志和作者作了有益的讨论，谨向他们致以深切的谢意。

参考文献

〔1〕Lin, C. C., The Theory of Hydrodynamic Stability, Cambridge Univ. Press (1955).
〔2〕Chandrasekhar, S., Hydrodynamic and Hydromagnetic Stability, Oxford Univ. Press (1961).
〔3〕Joseph, D. D., Stability of Fluid Motion, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1976).
〔4〕Drazin, P. &. Reid, W., Hydrodynamic Stability, Cambridge Univ. Press(1981).
〔5〕Swinney, H. L., Hydrodynamic Instability and Transition to Turbulence, Cambridge Univ.

Press (1981).
〔6〕徐硕昌，旋转磁流体力学系统的变分原理及其应用，科学通报，20（1975）：372—378.
〔7〕徐硕昌，关于充液腔体旋转运动稳定问题的变分原理及其应用，中国科学，9（1979）：857—865.
〔8〕徐硕昌，关于哥仑布问题，力学学报，1981年特刊：31—36.
〔9〕徐硕昌，论旋转流体星的稳定，中国科学，7（1981）：665—674.
〔10〕徐硕昌，伴随变分方法在液体表面张力不稳定问题中的应用，中国科学，7（1982）：625—635。
〔11〕Zubov, V. I., The Method of Liapunov and Their Application, Leningrad (1957).
〔12〕Мовчан, А. А., 弹性系统稳定问题中的Ляпунов直接方法，ПММ，23（1959）：483（力学译丛，6（1965）：99).
——，过程按两个R度的稳定性，ПММ，24（1960）：988（力学译丛，4（1965）：82).
〔13〕Leipholz, H. H. E., Stability of Elastic Structure, Springer-Verlay, Wien, New York (1981).
〔14〕Leipholz, H., Instability of Cotinuous Systems, Springer, Berlin-Heidelberg-NewYork (1969).
〔15〕Knops, R. T. & Wilker, E. W., On Movchan's theorems for stability of continuous systems, Int. J. Eng. Sci., 4 (1966): 303-329.
〔16〕——, Theory of elastic stability encyclopedia of physics, Vol. Ⅵ a/3, Mechanics of Solid Ⅱ, pp. 125-302 (C. Truesdell, ed.), Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York (1973).
〔17〕秦元勋、王慕秋、王联，运动稳定性理论及其应用，科学出版社（1981）.
〔18〕朗道，Л. Д.，栗弗席兹，E. M.，连续介质力学，第一册，人民教育出版社（1952）.
〔19〕Case, K. M., in Hydrodynamic Instability (ed. by G. Birkhoff et al) Amer. Math. Soc. (1962): 25-34.
〔20〕DiPrima, R. C. & Habetler, G. T., Arch. Rat. Mech. Anal., 34 (1969): 268-277.
〔21〕周恒、李骊，Orr-Sormmerfeld方程的特征值问题及展开定理，应用数学和力学，2，3（1981）：295-305.
〔22〕Connor, J. J. & Brebbia, C. A., Finite Element Techniques for Fluid Flow, Newnes-Butterworths (1976)（流体流动的有限元法，吴望一译，科学出版社，1981).
〔23〕Shieh, R. C. & Masur, E. F., Some general principles of dynamic instability of solid bodies, ZAMP, 19 (1968): 929-941.
〔24〕Huseyin, K., Vibration and Stability of Multiple Parameter Systems, Noordhoff Inter. Publishing (1977).
〔25〕Prasad, S. N., Hermann, G., Adjoint variational methode in non-conservative stability problem, Int. J. Solid and Struct., 8 (1972): 29-40.
〔26〕钱伟长，变分法和有限元，科学出版社（1981）.
〔27〕Eckhaus, W., Studies in Non-linear Stabiloty Theory, Springer, Berlin, Heidelberg, New York (1966).
〔28〕徐硕昌，旋转液体星稳定的最小势能定理，科学通报（待发表）.
〔29〕Шапакидзе, Л. Д., Об устойчивости течения Куэтта между двумя вращающими цилиндрами, Изв. АН СССР, Мех. жид. и газа, 3(1975): 146—148.
〔30〕Pritchard, A. J., A study of two of the classical problems of hydrodynamic stability by the Liapunov method, J. Inst. Maths. Applics., 4, 1 (1968): 78.
〔31〕——, On nonlinear stability theory, Q. A. M., 27, 4 (1970): 531-537.
〔32〕周恒、李骊，关于流体层流运动稳定性问题（Ⅱ）流体层流运动稳定性中的Ляпунов方法，天津大学学报（1964）.
〔33〕徐硕昌，充液腔体旋转运动的非线性稳定理论及其对Columbus问题的应用，中国科学，3（1982）：254-264.
〔34〕Ляпунов, А.М., Общая задача об устойчивости движения, Гостехиздат (1950).
〔35〕Thomson, W. & Tait, P. G., Treatise on Natural Philosophy, 2nd ed., Cambridge Univ. Press (1912).
〔36〕Lyttelton, R. A., The Stability of Rotating Liquid Masses, Cambridge Univ. Press (1953).
〔37〕Меркин, Д. Р., Гироскопические системы (1956)（陀螺系统，郑元熙译，国防工业出版社，1959).
〔38〕Моисеев, Н. Н., Румянцев, В. В., Динамика тела с полостями, содержащими жидкость, «Наука» (1965).
〔39〕Barston, E. M., The systematic construction of Liapunov functionals in the linear stability of conservative steady flows, Int. J. Eng. Sci., 15, 1 (1977): 71-92.

ON TWO METHODS OF THE THEORY OF HYDRODYNAMIC STABILITY

Xu Shuo-chang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)