

裂纹顶端位错的运动和 小范围屈服的 K_{IIc}

龙期威

高桦

(中国科学院金属研究所)

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文从裂纹顶端位错运动的简化模型估计形成塑性区所消耗的功,从而计算临界裂纹扩展力.由于I型加载和II型加载的应力状态有所不同,裂纹顶端塑性功耗也会不一样.基于上述思想,考虑了小范围屈服的 K_{Ic} 和 K_{IIc} 的关系,得出 $K_{IIc} > K_{Ic}$ 的结论,符合实验结果;并就 K_{IIc}/K_{Ic} 的比值与材料性能和温度的关系作了讨论.

一、引 言

I型裂纹平面应变断裂韧性 K_{Ic} 已是人们熟知的材料力学性能参数,它表征材料对I型裂纹扩展的阻力.对于II型裂纹扩展的阻力 K_{IIc} ,人们则不大熟悉.对于金属材料,即使在非常脆的状态下,裂纹顶端塑性功耗对裂纹扩展阻力的贡献也大大超过固体真正表面能;在考虑材料的断裂韧性高低时,裂纹顶端塑性功耗是十分重要的因素.但迄今为止,各种线弹性复合型断裂理论讨论 K_{Ic} 和 K_{IIc} 的相对关系时,都没有考虑加载类型对裂纹顶端塑性功耗的影响.因而,导出的关系为: $K_{IIc} = 0.87K_{Ic}$ (最大正应力理论^[1]); $K_{IIc} = 0.96K_{Ic}$ (应变能密度理论^[2]); $K_{IIc} = 0.724K_{Ic}$ (能量释放率理论^[3]).式中各 K_{IIc} 和 K_{Ic} 仅适用于绝对弹性(即理想脆性)材料的情况,它们不同于在小范围屈服条件下测定的断裂韧性 K_{Ic} 和 K_{IIc} ,当然也就不能认为它们的相对比例关系就是上述各式所示的数值.作者之一及合作者的复合型断裂试验表明^[4]:超高强度钢、球墨铸铁等即使在脆性情况下的 K_{IIc} 也大于 K_{Ic} .显然, K_{Ic} 和 K_{IIc} 的相对关系需要沿另外的途径去寻求解释.

1982年4月2日收到初稿;1982年10月11日收到修改稿.

本文设想：从裂纹顶端位错运动的简化模型估计形成塑性区所消耗的功。在切应力作用下，裂纹顶端处将产生位错并向材料内部运动形成塑性区。从 I 型加载变为 II 型加载，由于应力状态改变，裂纹起始扩展前将产生更多的位错，并且位错自裂纹顶端向材料内部运动的距离也更大；因此消耗的总功增大，致使裂纹扩展阻力也相应增大。基于上述思想，考虑了小范围屈服的 K_{Ic} 和 K_{IIc} 的关系，得出 $K_{IIc} > K_{Ic}$ 的结论；并且就 K_{IIc} / K_{Ic} 的比值与材料性能和温度的关系作了讨论。

二、位错模型

在均匀应力加载条件下，裂纹顶端产生屈服和范性形变。对于平面应变情形的 I 型加载，通常假定范性形变只限制在和裂纹面呈某一角度 α 的斜面上^[5-7]（多晶： $\alpha = 60-70^\circ$ ；单晶： α 决定于晶体取向）。这种假定和实际情形差别很大。由于材料的加工硬化，再由于多晶材料的易滑移晶面的方向是杂乱无章的，只要宏观切应力的分布和易滑移晶面方向的分布互相匹配就可能产生滑移，这就使塑性形变分布在一个区域而并非集中在某一对滑移面上。再者，上述理论计算均假定了材料的尺寸是无限大的，忽略了试件的形状和加载的具体状态。如果这些问题都要考虑进去，则计算量将会很大。现在，我们要计算断裂时的塑性功耗，比上述一些文献考虑的问题更为复杂。因此，我们必须考虑一些简化的办法。这在小范围屈服的条件下也有可能。

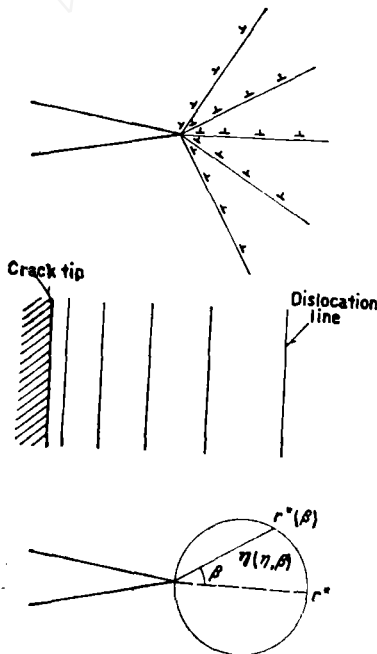


图 1 裂端位错运动和塑性区示意图
Fig. 1 Dislocation motion and plastic zone at crack tip

平衡分布。当外加应力达到断裂临界值时，裂纹顶端附近的位错密度将达到临界平衡分布 $D^c(\eta)$ 。

设想一根长度为 L 的位错线，沿 η 方向从裂纹顶端运动到 η ，其所消耗的能量为

$$L \int_0^\eta \tau(r) b dr \quad (1)$$

其中， τ 为作用到位错上的切应力， b 为位错 Burgers 矢量。

4. 再由于多晶材料的易滑移晶面的方向是杂乱无章的，只要宏观切应力的分布和易滑移晶面方向的分布互相匹配就可能产生滑移，这就使塑性形变分布在一个区域而并非集中在某一对滑移面上。再者，上述理论计算均假定了材料的尺寸是无限大的，忽略了试件的形状和加载的具体状态。如果这些问题都要考虑进去，则计算量将会很大。现在，我们要计算断裂时的塑性功耗，比上述一些文献考虑的问题更为复杂。因此，我们必须考虑一些简化的办法。这在小范围屈服的条件下也有可能。

2.1 裂纹扩展前为建立裂纹顶端塑性区所消耗的总能量

裂纹顶端在外加 I 型或 II 型应力作用下的应力场沿各易滑移面的切应力分量将在裂纹顶端产生刃型位错，位错产生后将向裂纹顶端的材料内部沿各滑移面运动并达到适当的位置（如图 1）。任何一定的加载水平可以激发相应的位错的

平衡分布。当外加应力达到断裂临界值时，裂纹顶端附近的位错密度将达到临界平衡分布 $D^c(\eta)$ 。

设想一根长度为 L 的位错线，沿 η 方向从裂纹顶端运动到 η ，其所消耗的能量为

$$L \int_0^\eta \tau(r) b dr \quad (1)$$

其中， τ 为作用到位错上的切应力， b 为位错 Burgers 矢量。

达到平衡时, 在 η 处的位错密度为 $D^c(\eta)$; 因此, 使 $D^c(\eta)$ 个位错从 $r=0$ 运动到 $r=\eta$ 消耗的能量为

$$LD^c(\eta) \int_0^\eta \tau(r) b dr \quad (2)$$

如果在外加应力达到 σ_F 时, η 方向上位错运动达到的最远距离为 r^* , 则在 $0 \rightarrow r^*$ 范围内将所有的位错发射到平衡分布位置所消耗的总能量为

$$W(\eta) = L \int_0^{r^*(\beta)} D^c(\eta) d\eta \int_0^\eta \tau(r) b dr \quad (3)$$

式中 $D^c(\eta)$ 为裂纹顶端塑性区中 η 矢量末端处的临界位错密度. 实际上位错的发射和运动并不只在单一滑移面, 而是在各个晶粒的最易滑移面上进行, 各方向均可能有. 从宏观看, 它是连续分布的一个塑性区. 因而需要对各方向进行积分; 因而, 裂端消耗的总能量为

$$W_T = 2L \int_0^{\pi/2} d\beta \int_0^{r^*(\beta)} D^c(\eta) d\eta \int_0^\eta \tau(r) b dr \quad (4)$$

实际上 $D^c(\eta)$ 是 $D^c(\eta, \beta)$, $\tau(r)$ 是 $\tau(r, \beta)$. 计算起来仍是十分复杂的, 必须进一步简化.

2.2 临界裂纹扩展力

实验表明, 裂纹扩展并不是一下子贯穿整个样品, 而是每扩展一步推进一个断裂过程区的尺寸 Δ . 裂纹起始第一步扩展的距离往往是到达前面的薄弱环节 (如大夹杂物或小裂纹所在处) 的距离^[8]. 在讨论裂纹起始扩展的阻力——裂纹扩展单位面积所消耗的能量时, 取起始第一步扩展量为 Δ . 对于一定的材料, Δ 决定于材料的本身, 而与加载方式无关. 所以, 临界裂纹扩展力为

$$G_{ic}^p = 2\gamma_p = \frac{W_i}{L\Delta} \quad i=I, II, 1, 2 \quad (5)$$

γ_p 即断裂有效能, L 为试件厚度 (它相当于我们简单模型中位错线长度). 对于均匀连续介质, $\Delta = W - a$, 即韧带宽度.

2.3 裂纹位错密度及应力场

作者之一在文献 [9] 中用位错连续分布理论, 采用 Чебышев 多项式计算出各种形式有限尺寸的构件在任意分布应力的加载条件下的裂纹位错密度 $D^c(-s)$, 其中 $s = x - a$. 由裂纹面是自由表面的条件建立以下积分方程

$$\sigma_{yy}^A(x) + A \int_{-a}^a \frac{D^c(x') dx'}{x - x'} = 0 \quad (6)$$

$A = Gb/2\pi(1-\nu)$, G 是切变模量, ν 是 Poisson 比, $\sigma_{yy}^A(x)$ 为无裂纹时裂纹面所在处的应力. 解此积分方程可以得到裂纹位错密度 $D^c(x)$, 于是材料中任一点的总应力为 $\sigma_{ij}^A + \sigma_{ij}^D$; 在裂纹顶端附近, $\sigma_{ij}^A + \sigma_{ij}^D \approx \sigma_{ij}^D$.

$$\sigma_{ij}^D(r) = b \int_{-a}^a D^c(x') \sigma_{ij}^D(x - x', y, z) dx' \quad (7)$$

其中 $\sigma_{ij}^D(\mathbf{r})$ 是在原点的 Burgers 矢量为 $[0, 1, 0]$ 的位错在 \mathbf{r} 点产生的应力场。

这样, 可以得到 $D^c(x)$ 和 $\sigma_{ij}^D(\mathbf{r})$ (详见文献 [9]);

可得

$$D^c(-s) \approx \frac{K}{\pi A (2\pi)^{1/2}} (-s)^{1/2},$$

$$\sigma^D(s) \approx \frac{K}{(2\pi)^{1/2}} s^{-1/2} \quad (8)$$

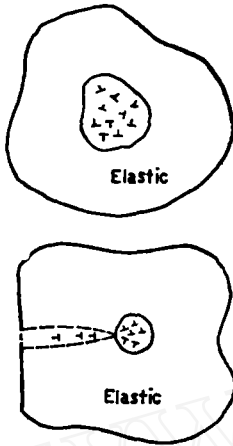


图 2 Burger 矢量的守恒关系
Fig. 2 Conservation of
Burger's vectors

2.4 裂纹顶端塑性区内位错密度分布

裂纹位错 (虚) 和裂端塑性区内位错 (实) 有一定的关系. 在完整的弹性介质的内部出现一个孤立的塑性区时, 从弹性区边界的协调 (无裂隙和交叠) 条件, 由 Burgers 矢量的 Burgers 回路的定义可知, 塑性区中的位

错 Burgers 矢量的总和 $\sum_i \mathbf{b}_i = 0$ (图 2).

相似地, 裂纹位错和裂纹顶端位错的下述关系成立

$$b \int_0^a D^c(-s) ds = 2b \int_0^{\pi/2} \sin\beta \int_0^{r^*(\beta)} D^p(\eta) d\eta d\beta \quad (9)$$

$$0 = b \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\beta d\beta \int_0^{r^*(\beta)} D^p(\eta) d\eta \quad (10)$$

从方程 (9) 可以确定 $D^p(\eta)$ 和 $D^c(-s)$ 的关系; 从方程 (10) 可知 $D^p(\eta)$ 对极轴必定是对称的.

按 BCS 模型的计算结果可以看出, 在小范围屈服的条件下, $D^p(\eta)$ 和 $D^c(-s)$ 在数学形式上是近似相同的 (附录 I), 假设它们只差一个常数因子 C_0 . 再简化塑性区为图 1 的圆形, 则

$r^*(\beta) = r^* \cos\beta$. 解方程 (9) 可得

$$D^p(\eta) = C_0 B_0 \eta^{-1/2}, \quad C_0 = \frac{3}{4} \left(\frac{a}{r^*} \right)^{1/2}, \quad B_0 = \frac{K_i^*}{A\pi(2\pi)^{1/2}} \quad (11)$$

$i=1$, I (I 型平面应力和应变), 2, II (II 型平面应力和应变); 达临界时, $K_i^* \rightarrow K_{ic}^*$, $D^p(\eta) \rightarrow D^c(\eta)$, $r^* \rightarrow r_c^*$.

2.5 裂纹顶端附近的应力场

位错一个一个地向材料内部运动, 后面的位错所遇到的应力场一定受已有前面位错应力场的影响, 和原来的裂纹顶端弹性应力场应有所不同. 为了简化, 假设我们讨论的小范围屈服情形裂纹顶端应力场不因位错的运动而改变, 则

$$\text{I 型} \quad \tau_{r\theta} = \frac{K_i^*}{\sqrt{2\pi r}} F_1(\theta)$$

$$\text{II 型} \quad \tau_{r\theta} = \frac{K_{ii}^*}{\sqrt{2\pi r}} F_2(\theta) \quad (12)$$

$$F_1(\theta) = F_I(\theta) = \frac{1}{4} \sin \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \sin \frac{3\theta}{2}$$

$$F_2(\theta) = F_{II}(\theta) = \frac{1}{4} \cos \frac{\theta}{2} + \frac{3}{4} \cos \frac{3\theta}{2}$$

2.6 裂纹顶端塑性区尺寸

I 型裂纹顶端塑性区尺寸 r_1^* 与 II 型裂纹顶端塑性区尺寸 r_2^* 之比以塑性区面积之比近似表示

$$\frac{r_1^*}{r_2^*} \approx \left(\frac{A_1}{A_2} \right)^{1/2} \quad (13)$$

塑性区边界按照 Von-Mises 准则确定, 即

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2]} = \sigma_s \quad (14)$$

式中 σ_s 为该材料单轴拉伸屈服应力; $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}$ 为塑性区边界上各点的应力分量。

三、结果与讨论

将以上诸量代入 (4) 式得

$$W_T = 2bB_0C_0D_0L\pi r^* \quad (15)$$

其中, $D_0 = \frac{K_{ic}^0}{\sqrt{2\pi}} F_i(\theta), i=1, 2, I, II$

I 型:

$$\begin{cases} W_1 = E_0(K_{Ic}^0)^2 F_1(\theta_0) r_1^*(\theta_0)^{1/2} \quad (\text{平面应力}) \\ W_{I'} = E_0'(K_{Ic}^0)^2 F_1(\theta_0) r_1^*(\theta_0)^{1/2} \quad (\text{平面应变}) \end{cases} \quad (16)$$

II 型:

$$\begin{cases} W_2 = E_0(K_{IIc}^0)^2 F_2(\theta_0) r_2^*(\theta_0)^{1/2} \quad (\text{平面应力}) \\ W_{II'} = E_0'(K_{IIc}^0)^2 F_2(\theta_0) r_2^*(\theta_0)^{1/2} \quad (\text{平面应变}) \end{cases}$$

$$E_0 = \frac{3}{4} \frac{bL\alpha^{1/2}}{A\pi}$$

由 (5) 式

$$G_{ic}^p = 2\gamma_p = \frac{W_i}{L\Delta} \quad i=I, II, 1, 2 \quad (17)$$

G_{ic}^p 即裂纹顶端塑性区形成的功耗率。由 (11), (15), (17), 由于 C_0 是无量纲的量, 所以 G_{ic}^p 的量纲和 $[(K^0)^2] [E]^{-1}$ 相同。

3.1 小范围屈服的 K_{Ic} 和 K_{IIc} 的关系

由 (16) 式

$$\text{平面应力} \quad \frac{K_{2c}}{K_{1c}} \approx \left(\frac{K_{2c}^0}{K_{1c}^0} \right) \left(\frac{F_2(\theta_0)}{F_1(\theta_0)} \right)^{1/2} \left(\frac{r_2^*(\theta_0)}{r_1^*(\theta_0)} \right)^{1/4} \quad (18)$$

$$\text{平面应变} \quad \frac{K_{IIc}}{K_{Ic}} \approx \left(\frac{K_{IIc}^0}{K_{Ic}^0} \right) \left(\frac{F_{II}(\theta_0)}{F_I(\theta_0)} \right)^{1/2} \left(\frac{r_{II}^*(\theta_0)}{r_I^*(\theta_0)} \right)^{1/4}$$

为了与实验结果^[4]相比较, 现已 GC-4 试样为例. 相应的 θ_0 , $F(\theta_0)$ 和 $r^*(\theta_0)$ 数据列于表 1. θ_0 为塑性区 r_{max}^* 的方向. K_{IIc}^0/K_{Ic}^0 及 K_{2c}^0/K_{1c}^0 取能量释放率理论结果 0.724. 由 (18) 及 (13) 式得

$$\text{平面应力} \quad \frac{K_{2c}}{K_{1c}} \approx 2.08 \quad (19)$$

$$\text{平面应变} \quad \frac{K_{IIc}}{K_{Ic}} \approx 2.4$$

从文献 [4] 中图 6 可以看出平面应变的复合型试验结果大体上和 (19) 式结果吻合.

表 1 GC-4 钢的计算结果
Table 1 Calculated results for specimen GC-4

Type	θ_0 , deg.	$F(\theta_0)$	$r^*(\theta_0)$, mm	A^* , mm ²	
I	plane stress	70.5	0.385	0.52	0.113
	plane strain	90	0.354	0.332	0.033
II	plane stress	0	1	6.824	11.869
	plane strain	0	1	5.19	8.173

3.2 断裂韧性和温度的依赖关系

从 (16), (18) 式可知, 和温度依赖关系较大的主要是 r^*

$$K_{1c} \propto (r^*)^{1/4} \propto \frac{K_{1c}^{1/2}}{\sigma_y^{1/2}}$$

于是 (20)

$$K_{1c}(T) \propto \frac{1}{\sigma_y(T)}$$

σ_y 为材料的屈服应力, K_{1c} 的温度依赖性和 σ_y 的温度依赖性呈倒数关系. 此问题将另行较详细的讨论.

参 考 文 献

- 1 Erdogan, F.; Sih, G. C., *J. Basic Eng.*, **85** (1963), 519.
- 2 Sih, G.C., *Methods of Analysis and Solutions of Crack Problems*, Nordhoff Int. Publ., Leyden, 1973, p. 221.
- 3 Wang Tzuchiang (王自强), *Advance in Research on the Strength and Fracture of Materials*, Vol. 4, 4th Int. Conf. Fracture, June 1977, Canada, Eds. Taplin, D. M. R., p.135.
- 4 高桦; 王自强; 杨成寿; 周爱华, 金属学报, **15** (1979), 380.
- 5 Bilby, B. A.; Swinden, K. H., *Proc. R. Soc., (London)*, Ser. A285 (1965), 22.
- 6 Vitek, V., *J. Mech. Phys., Solids*, **24** (1976), 263.
- 7 Riedel, H., *ibid.*, **24** (1976), 277.
- 8 D. 布洛克, 工程断裂力学基础, 王克仁等译, 科学出版社, 1980, p.276.
- 9 Lung Chi-wei (龙期威), *Scientia Sinica (中国科学)*, **23** (1980), 441.

附 录

根据 BCS 理论:

$$g(x_1) = \frac{\pi^2 A f(x_1)}{P_0 + P_1} = \cosh^{-1} \left(\left| \frac{m}{c - x_1} + n \right| \right) - \cosh^{-1} \left(\left| \frac{m}{c + x_1} + n \right| \right)$$

令 $x_1 = c + s$, $s \rightarrow 0$ (小范围屈服情况)

$$g(s) \approx \cosh^{-1} \left| \frac{m}{s} \right| \quad \left(m \approx \frac{r^* 2c}{a} \approx 2r^* \right)$$

在 s/m 在 0.1 和 0.5 之间, $(s/m)^{1/2} \cosh^{-1}(m/s) \approx 1$, 而在 $s/m < 0.1$ 的一端, 由于 $s \rightarrow 0$, $D \cdot \sigma \cdot s \rightarrow 0$, 对 W_T 的贡献很小; 在另一端则由于 $D \rightarrow 0$, 对 W_T 的贡献也很小. 因此, 在主要部分可以把 $D^p(\eta)$ 看成和 $D^c(-s)$ 的数学形式相似, 即

$$D^p(\eta) \approx \text{常数} \cdot s^{-1/2} = c_0 D^c(-s)$$

THE DISLOCATION MOTION AT CRACK TIP AND K_{IIc} OF SMALL SCALE YIELDING MATERIALS

by LONG Qiwei (LUNG Chi-wei) (Institute of Metal Research, Academia Sinica, Shenyang); GAO Hua (Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

(Manuscript received 2 April, 1982; revised manuscript 11 October, 1982)

ABSTRACT

The work done in the formation of plastic zone at the crack tip has been evaluated with a simplified dislocation model and then the critical crack extension force may be calculated. Under various types of deformation, the magnitudes of work done in the plastic zone formation are different due to their different stress distributions at the crack tip. In view of the abovementioned approaches and of consideration of the correlation between K_{Ic} and K_{IIc} for a small scale yielding material, it has come to the conclusion: $K_{IIc} > K_{Ic}$, which is consistent in the experimental results. The ratio K_{IIc}/K_{Ic} and the temperature dependence of the mechanical properties of materials have been also discussed,