

# 论长期稳定性和动力稳定性

中国科学院力学研究所 徐硕昌

## 一、引言

根据 Lejeune-Dirichlet 定理, 力学系统处于静平衡情形的稳定的充要条件是系统的势能在平衡位置具有极小值。对于旋转的力学系统(机械系统或液体系统)就不象这样简单了。早在100年前Thomson和Tait就指出了旋转力学系统具有长期稳定性(secular stability)和动力稳定性(dynamic stability)的重要差别<sup>[1]</sup>。对于旋转液体星准稳演化过程到底按哪一种稳定性判断, 是一个争论近百年的问题。在本世纪50年代以前, Thomson, Tait, Poincare, Liapounoff, Darwin, Teans 和 Lamb 等, 主张“长期稳定是真实的稳定”, “是天体演化学唯一感兴趣的稳定”。基于这种观点建立的 Jeans-Darwin 双星分裂理论曾为天文界所普遍接受, 但近30年来被错误地否定了<sup>[2]</sup>。

这个问题往前要追溯到 Newton 关于地球形状的研究和 Laplace 星云假说的提出<sup>[3,4]</sup>。从1687年 Newton 发表地球形状的理论开始, 发生了一场持续半个世纪的争论。地球到底是长球还是扁球的一场争论引出了 Columbus 问题和天体形状理论的研究<sup>[5]</sup>, 而旋转液体星准稳演化过程的寻求则是将 Laplace 星云假说具体化。1826年 Laplace 提出的太阳系起源的星云假说只是物理上的大概设想。Laplace 的科学结论从来都是建立在严格数学理论基础上的, 唯独这个问题例外。由此可见建立这个假说的数学理论的困难程度。将 Laplace 星云假说具体化, 建立天体起源分裂说的理论体系, 成为以后几代科学家共同奋斗的目标。

Thomson 和 Tait 经过15年的长期研究后, 在1883年提出一个稳定准则: “如果液体存在任意微弱粘性, 则浮在液体上或浸在液体中任意小的不完全弹性体, 在任意其他能量是极小或极大的情形下, 平衡都不能是长期稳定状态; 唯一的长期稳定性情形是给定角动量下能量是极小的情形。目前尚不知道, 对于一个连续的粘性流体团, 在给定角动量情形下, 是否存在不止一个长期稳定平衡位形, 但我们认为只存在唯一的一种长期稳定位形。”([1] §778) 他们预言而未证明的这个稳定准则就成为长期稳定性理论的基础。Jeans-Darwin 双星演化理论就是建立在这个稳定准则的基础上。将这个稳定准则应用于旋转液体星的稳定称为最小势能定理。文[2]中我们证明了旋转液体星(作为自吸引、不可压粘性液体处理)由所有振动本征模决定的稳定临界和长期稳定临界是一致的。假设所有本征模是完全的, 这个结论就和最小势能定理等价<sup>1)</sup>。本文第二节按 Liapounoff 直接方法重新严格证明最小势能

1) 讨论中, 朱如曾首先注意到线性代数理论中本征值问题的这一性质。

定理。这个定理在天体演化学中具有重要意义，它为以往大量长期稳定性研究建立了按 Liapounoff 稳定定义下的理论基础，同时，叙述了旋转液体星长期不稳定性的性质。第三节概述了 Columbus 问题以及应用。长期以来，按忽略粘性理论模型处理 Columbus 问题，理论和实验结果总是不一致；按考虑粘性的长期稳定性处理才最终达到理论和实验一致的结论，所以，解决 Columbus 问题的过程也是这两种稳定概念争论的具体反映。第四节评述了长期稳定性和动力稳定性这场争论；从理论和实验两方面论证长期稳定性的真实性，忽略粘性的动力稳定性是虚假的；第五节论证了 Thomson-Tait 稳定准则的普适性；第六节叙述了这场稳定概念争论的工程实用意义。基于长期稳定概念证明的“液体系统的回转稳定准则”<sup>[5]</sup>和“具有能量耗散情形的刚体回转稳定准则”<sup>[6]</sup>，为各类陀螺仪设计和飞行器姿态控制提供了理论依据。前辈科学家关于“长期稳定性是实用的稳定性”的结论在这些工程实践中已不断得到肯定和证实。

## 二、旋转液体星的长期稳定性

1. 最小势能定理 旋转液体星理论模型已在 [2] 中给出。这里用连续系统稳定理论的 Liapounoff 直接方法<sup>[7]</sup>处理，在不假定本征模的完备性条件下来证明最小势能定理。

假设描述液体星的变量取为

$$\zeta = (\xi, \dot{\xi}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2, \dot{\xi}_3) \quad (1)$$

其中  $\xi(x, t)$  为扰动位移矢量， $\dot{\xi} = \frac{\partial \xi}{\partial t}$  为扰动速度。 $\xi$  为在液体星所占区域  $V$  上有定义并连续二次可微的六维矢量函数。设所有  $\xi$  构成集合  $Z$ ， $T$  为给定时间区间 ( $t \geq t_0$ )。

定义空间  $ZT$  的距离为

$$\rho(\zeta, t) = \{(\xi, T\xi) + (\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi})\}^{1/2} \quad (2)$$

其中  $\rho_0$  为液体密度， $T$  为势能算子按文 [2] 中式 (21) 表示。

选择 Liapounoff 泛函为

$$f(\zeta, t) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) + (\xi, T\xi) \quad (3)$$

仅当  $\zeta = (\xi, \dot{\xi}) = 0$  时， $f(0, t) = 0$ 。

这里我们选择了总能量为 Liapounoff 泛函，容易证明  $f(\zeta, t)$  满足：

(i)  $f(\zeta, t) > 0$ ，即  $f(\zeta, t)$  正定， $f$  关于  $\rho(\zeta, t)$  具有无穷小上界。

事实上，由于  $T$  正定，存在最小本征值  $\lambda_0$  满足

$$\lambda_0 = (\xi, T\xi) / (\xi, \rho_0 \xi) \quad (4)$$

则  $f(\zeta, t) = \frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) + (\xi, T\xi) \geq \frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) + \lambda_0 (\xi, \rho_0 \xi) \geq \mu \rho^2(\zeta, t)$  (5)

其中  $\mu = \min\left(\frac{1}{2}, \lambda\right)$ 。

$$(ii) \quad \frac{df}{dt} = -\frac{1}{2} \iiint_V \left( \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_i} + \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_i} \right)^2 dx = -\Phi < 0 \quad (6)$$

根据液体耗散函数  $\Phi$  当并仅当液体作刚体运动时才为零, 容易证明液体星的小扰动方程组 (文 [2] 式 (5) — (7)) 不存在作刚体运动形式的解。  $\Phi$  沿扰动运动路径在  $(t_0, \infty)$  区间上是连续的, 至多在多数个点上为零。

(iii)  $f(\xi, t)$  关于  $\rho(\xi, t)$  有无穷小上界。

利用 Буняковский-Schwarz 不等式可证明

$$(\xi, T\xi) \leq (\alpha + \beta + \gamma)(\xi, \rho\xi) \quad (7)$$

其中

$$\alpha = \max_{x \in S} \left\{ \frac{1}{\rho_0} \left| \frac{dP_0}{dn} \right| \right\}$$

$$\beta^2 = \max_{x \in V} \left\{ \frac{(\nabla P_0)^2 (\nabla \rho_0)^2}{\rho_0^4} \right\}$$

$$\gamma = \left\{ \iiint_V \rho_0(x) \nabla_x \left[ \iiint_V G^2 \rho_0(x) \left( \nabla_{x'} \frac{1}{|x-x'|} \right)^2 dx' \right]^{\frac{1}{2}} dx \right\}^{\frac{1}{2}}$$

故

$$f(\xi, t) \leq v \rho^2(\xi, t) \quad (8)$$

其中  $v = \max\left(\frac{1}{2}, \alpha + \beta + \gamma\right)$ 。

根据  $f$  的上述性质 (i) — (iii), 可知运动是稳定的。

(iv) 容易证明当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$f(\xi, t) \rightarrow 0 \quad (9)$$

事实上, 由式 (6) 对  $t$  积分得

$$f(\xi, t) - f(\xi_0, t_0) = - \int_{t_0}^t \Phi dt$$

由运动稳定条件可知, 当  $t \rightarrow \infty$  时,  $\Phi \rightarrow 0$ , 即  $\frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_j} \rightarrow 0$ ,  $\dot{\xi} \rightarrow 0$ ,  $\ddot{\xi} \rightarrow 0$ 。

以  $\xi$  标乘文 [2] 的式 (5), 对  $V$  积分得

$$(\xi, T\xi) = - \iiint_V \rho_0 \xi \cdot (\ddot{\xi} + 2 \Omega_0 \times \dot{\xi}) dx - \iiint_V \frac{\mu}{2} \left( \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial \dot{\xi}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \dot{\xi}_j}{\partial x_i} \right) dx \quad (10)$$

当  $t \rightarrow \infty$  时, 由  $\dot{\xi} \rightarrow 0$ ,  $\ddot{\xi} \rightarrow 0$  和式 (10) 得  $(\xi, T\xi) \rightarrow 0$  (11)

以式 (11) 代入式 (3) 即得当  $t \rightarrow \infty$  时,

$$f(\xi, t) \rightarrow 0 \quad (12)$$

根据 Liapounoff 泛函  $f(\xi, t)$  的上述性质 (i) — (iv) 可得到稳定性定理如下:

**稳定性定理** 如果旋转液体星总势能  $U_0$  在平衡位置具有极小值, 即  $\delta^2 U = (\xi, T\xi) > 0$ , 算子  $T$  正定, 则旋转液体星处于渐近稳定平衡状态。

Liapounoff 仅在无粘性情形证明总势能取极小, 其运动是稳定的。

直接利用不稳定的定义证得不稳定性定理如下:

**不稳定性定理** 假设旋转液体星平衡位置总势能不取极小, 即存在某个位移函数  $\eta(x)$ , 满足  $\nabla \cdot \eta = 0$  使  $(\eta, T\eta) < 0$ , 则其平衡是不稳定的。

证明: 对任给定的  $\varepsilon > 0$  和任意  $\delta > 0$ , 只要初始扰动满足

$$\left. \begin{aligned} \xi(x, t_0) = \alpha \eta, \text{ 使 } \delta^2 - \alpha^2 (\eta, \rho_0 \eta) < 0 \\ \dot{\xi}(x, t_0) \in \{ \dot{\xi}(x, t) : (\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) < \min[\delta^2 - \alpha^2 (\eta, \rho_0 \eta), -\alpha^2 (\eta, T\eta)] \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

就能证明解  $\xi = 0$  是不稳定的。事实上，按式 (13) 所取初始条件满足

$$\left. \begin{aligned} \rho(\xi(t), t_0) &= [\alpha^2(\eta, \rho_0 \eta) + (\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi})]^{\frac{1}{2}} < \delta \\ \alpha^2(\eta, T\eta) + \frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) &< 0 \end{aligned} \right\} (14)$$

由式 (6) 对  $t$  积分得

$$\frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) + (\xi, T\xi) = -\int_{t_0}^t \Phi dt + \alpha^2(\eta, T\eta) + \frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) \quad (15)$$

根据式 (13) 和 (14)，由式 (15) 导出

$$\nu\rho^2(\xi_0, t_c) > \left| \frac{1}{2}(\dot{\xi}, \rho_0 \dot{\xi}) + (\xi, T\xi) \right| > \int_{t_0}^t \Phi dt \quad (16)$$

在式 (16) 中， $\int_{t_0}^t \Phi dt$  是  $t$  的单调递增函数，取充分大  $T > \frac{\nu\varepsilon^2}{\Phi} + t_0$  [其中  $\int_{t_0}^T \Phi(t) dt = \Phi(\bar{t})(T - t_0)$ ,  $0 < \bar{t} < T$ ]，可以保证  $t > T$  时  $\rho(\xi, t) > \varepsilon$ 。至此证得不稳定性定理。

为了证明最小势能定理，我们证明如下两个引理：

**引理 1** 如果偏离旋转液体星平衡位形的小扰动保持惯性矩  $I = \iiint_V \rho_0(x)(x_1^2 + x_2^2) dx$  一级近似不变(只改变二级量)，则在  $\Omega = \text{const}$  时使  $U_0 = \Phi - \frac{1}{2}I\Omega_0^2$  取极小，和在角动量  $H = \text{const}$  时使  $U_0 = \Phi + \frac{1}{2}\frac{H^2}{I}$  取极小，两种情形所得出的长期稳定判据是等价的。

证明参见文[4]。

**引理 2** 如果  $\Omega_0 = \text{const}$ ，则旋转液体星总势能  $U_0$  的二次变分为<sup>[2]</sup>

$$\begin{aligned} \delta^2 U &= \delta^2 \left( \Phi - \frac{1}{2} I \Omega_0^2 \right) = (\xi, T\xi) = \iiint_V \xi \cdot T\xi dx \\ &= -\iint_S \frac{dP_0}{dn} (\mathbf{n} \cdot \xi)^2 dS + \iiint_V \frac{[(\xi \cdot \nabla) U_0]^2 \frac{dP_0}{dU} \frac{d\rho_0}{dU}}{\rho_0} dx \\ &\quad - \iiint_V \iiint_V G\rho_0(x)\rho_0(x') (\xi \cdot \nabla)_x (\xi \cdot \nabla)_{x'} \frac{1}{|x-x'|} dx dx' \end{aligned} \quad (17)$$

综合稳定性定理和不稳定性定理直接得到：

**最小势能定理** 当旋转液体星作为整体旋转的自吸引、不可压粘滞体处理，如果其平衡位形势能二次变分不为零，则其平衡稳定的充要条件是保持角动量不变情形下，使总势能取极小值<sup>1)</sup>。

最小势能定理是 Thomson-Tait 稳定准则对旋转液体星的具体应用。这个定理为以往大量长期稳定性研究建立了按 Liapounoff 稳定定义下的理论基础，它的重要性在后面还要详细讨论。

1) 按 Liapounoff 稳定意义的解必定是唯一的解。Thomson 和 Tait 预期的长期稳定的平衡位形的唯一性就不证自明了。

2. 长期不稳定性的性质 以前的研究中,直接按总势能取极小,只能得到稳定条件,得不到不稳定发展率。人们往往认为只是动力不稳定是按时间指数增长的,长期不稳定只是线性增长的。文[2]证明了长期不稳定在一般情形下是振动式不稳定,在一些特定情形也可按指数关系随时间单调增加,例如,对于轴对称扰动情形,在小粘性近似下,不稳定发展率

$$\exp(\sigma t) = \exp\{t\sqrt{-\delta^2 U/I}\}$$

其中  $-\delta^2 U > 0$  是势能二次变分,  $I$  为扰动动能变化,即使粘性变为零,不稳定发展率  $\sigma$  也恒大于零。

粘性对旋转液体星的稳定有双重作用:一方面粘性具有通常衰减扰动的作用;另外粘性使 Coriolis 力稳定作用消失,间接起了不稳定作用。我们运用“涡丝稳定概念”解释了粘性和 Coriolis 力相互作用的物理本质,同样能解释长期不稳定和动力不稳定争论的实质。处理动力稳定性时由于忽略粘性引进 Coriolis 力虚假的稳定作用,考虑粘性后, Coriolis 力稳定作用就消失了。Coriolis 力这种稳定作用相当于涡丝的稳定作用。这说明了为什么考虑粘性才能和实验结果一致,这和关于阻力的 D'Alembert 疑难的解决道理相同。

3. 对旋转液体星准稳演化过程的应用 一方面,最小势能定理建立按 Liapounoff 稳定提法处理旋转液体星稳定的理论基础;另一方面,建立长期不稳定随时间指数增长关系,赋予准稳过程以动力属性,使准稳过程免受处处稳定才能实现的苛求。我们判断准稳演化过程真实性只要求长期不稳定特征时间大于过程演化特征时间就成,按这一观点,可对“Jeans-Darwin 双星分裂理论”重新评价。

### 三、Columbus 问题及其应用

在文献[5]中,Columbus 问题被概括为:1. 为什么煮熟的鸡蛋可以象陀螺一样竖立旋转? 2. 为什么生鸡蛋不能竖立旋转? 3. 怎样解释 Kelvin 所做流体转子陀螺仪的实验结果?

这是在 17 世纪地球形状争论中由地球自转运动稳定性问题引伸出的一个问题。近一个世纪以来, Kelvin, Жуковский 和 Poincare 等许多科学家研究了这个问题。由于这个经典题和陀螺仪、液体燃料火箭及充液卫星等工程技术问题具有相同理论基础,近 30 年来,在这些工程技术发展刺激下,研究取得重大进展。

文献[5]叙述了 Columbus 问题提出的历史背景,论证了 Columbus 问题中的第 2 题和第 3 题是等价的以及论证了这个问题和牛顿地球模型自旋转运动稳定问题数学模型是相同的。所以解决整个问题的关键在于解释 Kelvin 实验。这个问题解决过程也是长期稳定性和动力稳定性这两种稳定概念长期争论的反映。

对于 Kelvin 实验的理论研究已有近百年历史。无论是 Poincare, Жуковский 等的经典理论,还是苏联学者和欧美学者的新近理论,都是在理想流体假设下按动力稳定性来处理 Columbus 问题,因而理论和实验结果不一致。考虑粘性影响,以前理论只能处理二个自由度问题,此时对应的本征值问题要解 4 次代数方程;对于 3 个自由度问题要解 6 次代数方程则无能为力。现代数学非自伴算子理论的发展,使无穷自由度非自伴本征值问题解决成为可能。我们提出的“一次近似变分直接方法”就是在伴随变分方法基础上加以发展的。对于 Columbus 问题非线性效应处理是应用 Liapounoff 直接方法进行的。我们建立的弱非线性定

理论,做到了按 Liapounoff 稳定理论的严格数学提法解答 Columbus 问题。我们所得理论结果和 Kelvin 流体转子陀螺仪实验结果精确一致。

Columbus 问题的实际应用包括:

1. 工程技术方面——流体系统回转稳定准则的应用。我们在解决 Columbus 问题过程中,建立了一种新的流体转子陀螺仪稳定理论。以前的理论把壳内液体用等效刚体代替的办法,产生概念性的困难。因为按照流体系统回转稳定准则,它只有绕最短惯性主轴旋转才有陀螺稳定效应,这要求流体转子必须设计成扁形。

在工程问题中,很多场合会碰到充液腔体运动问题。例如用液体燃料的火箭,各类飞行器和行星际站等,如何通过自旋来达到各类液体系统的稳定,流体系统回转稳定准则具有一定指导作用。

2. 地球物理方面——牛顿地球模型的自转运动是稳定的。Columbus 问题在地球物理学领域中意义在于,从地球自转运动稳定观点出发驳斥了反牛顿的观点,为地球形状理论提供了理论和实验依据。

3. 天体演化学方面——提供长期稳定性的真实性的实验依据。对旋转液体星无法直接实验模拟,但把天体情形的自引力场变换为均匀引力场就可进行实验。Columbus 问题中的 Kelvin 实验恰是这个实验。在文献[2]中,将旋转液体星和 Columbus 问题作了详细对比,清楚地表明, Kelvin 实验是一项长期稳定性的真实性的最好的实验证据。

#### 四、评长期稳定性和动力稳定性的争论

1. 历史上出现这场近百年争论,有如下几方面原因:

(1) 前辈科学家只是由简单机械运动的例子<sup>[1,4]</sup>来说明粘性的作用会使系统达到长期稳定状态,最简单而又说明问题的例子是 Lamb 给出的<sup>[4]</sup>。在一个绕轴以匀角速度旋转的球形碗中放置一小球。如果碗是完全光滑的,小球在最低平衡位置是动力稳定的;但在碗和球之间只要存在任意微弱的摩擦,当角速度超过某确定值时,小球将沿螺旋线向外运动直至达到长期稳定的平衡位置,这是一个真实的平衡位置。理论只处理过二个自由度问题。作为长期稳定性基础的 Thomson-Tait 准则没有证明只能按势能取极小导出长期稳定性条件。

(2) 在处理动力稳定性时,人为地忽略粘性得出不真实的稳定条件。在流体运动稳定理论中已有先例表明,不考虑粘性会出现虚假的结果。两平行板间流的稳定,在忽略粘性时总是稳定的,永远也不会出现层流的不稳定,只在考虑粘性后才得出临界雷诺数,这也是发生过长期争论的问题。这些争论和关于阻力的 D'Alembert 疑难之争都极相似,只有考虑粘性才能符合实际。

(3) 处理长期稳定性时未按通常小扰动方法处理,直接从总势能取极小只能得出稳定条件,给不出长期不稳定发展率,致使旋转液体星准稳态演化过程被苛求处处稳定。

2. 解决 Columbus 问题的过程也是这两种稳定性概念争论的反映<sup>[5]</sup>。按忽略粘性的动力稳定性处理 Columbus 问题,理论总和 Kelvin 实验结果不一致,只有考虑粘性按长期稳定性处理时理论和实验结果才完全一致。Columbus 问题的解决证明了前辈科学家关于长期稳定性论断的正确。

3. Columbus 问题提供了长期稳定性真实性的实验证明。 Kelvin 实验是一个无穷自由

度情形的最好例证<sup>[5]</sup>。详细论证参看[2]。

4. 在考虑了粘性作用按小扰动方法处理旋转液体星的稳定后, 两种稳定概念就统一起来了。另外建立长期不稳定和扰动随时间指数增长的关系, 这样就赋予准稳态演化过程以动力属性, 使其免受处处稳定的苛求。同时有 Columbus 问题作为实验依据, 因此可以作出结论: 近30年对 Jeans-Darwin 双星分裂理论的否定是错误的, 旋转液体星的准稳演化过程必须按长期稳定性判定; 目前只有 Jeans-Darwin 理论能给出旋转液体星分裂的具体过程, 只是过程的一些细节有待进一步研究。

## 五、Thomson-Tait 稳定准则的普适性

Thomson-Tait 稳定准则是长期稳定理论的基础。按照这一准则, 无论是对具有任意微弱粘性的流体, 还是任意的不完全弹性体或是二者共同构成的系统, 这些系统旋转运动稳定条件都是按固定角动量使总势能取极小, 即稳定的旋转运动状态是处于长期稳定状态。

最近 20 年来, 这个准则在有耗散存在的连续系统稳定问题中不断地被证实:

1. 线性、耗散回旋系统的 KTC 定理及其推广<sup>[8-11]</sup>。这些结果在机械振动工程、陀螺仪技术和飞行器姿态控制问题中得到广泛的应用。

2. 作者在本文和[2]中分别用一次近似变分直接方法和 Liapounoff 直接方法证明了旋转液体星稳定的最小势能定理。

3. 作者在弱非线性假设下证明了牛顿的地球模型的自转运动是长期稳定的。按长期稳定观点解决 Columbus 问题为牛顿地球形状理论提供理论和实验依据<sup>[5]</sup>。

4. 作者在弱非线性假设下证明了液体系统的回转稳定准则: 液体系统只有绕最大惯量主轴绕(短轴)旋转才能稳定<sup>[5]</sup>。

5. 作者在弱非线性情形下证明了具有能量耗散情形下的刚体回转稳定准则: 刚体只有绕最大惯量主轴旋转才能稳定<sup>[6]</sup>。

6. 作者在线性假设下证明旋转粘性液体表面张力不稳定问题的最小势能定理<sup>[12]</sup>。

7. 作者在线性假设下证明了旋转 MHD 粘滞液体系统稳定的最小势能定理<sup>[13]</sup>。

8. Tasso 在线性情形下证明了非理想 MHD 系统的能量原理<sup>[14]</sup>。

9. Shieh 对于线性粘弹性系统在保守力和陀螺力作用下稳定问题的能量原理<sup>[15]</sup>。

以上仅就作者所知范围列出一些例证, 远不完全, 但已可以看清楚: Thomson-Tait 稳定准则在机械系统、液体系统、粘弹性系统以及非理想的 MHD 系统等各方面均被证实。这是一个具有普适性的稳定准则。

## 六、工程实践不断证实了长期稳定的真实性

1. Kelvin 液体转子陀螺仪实验证明了长期稳定性的真实性<sup>[5]</sup>。Kelvin 液体转子陀螺实验是用薄回转椭球壳充满水做转子, 当椭球壳稍微呈长形就非常的不稳定。应用忽略粘性的动力稳定性处理 Kelvin 实验, 理论和实验结果就不一致; 应用液体系统的回转稳定准则成功地解释了 Kelvin 实验的结果<sup>[5]</sup>。

通过实践认识到, 将转子用刚体代替或按理想液体处理用等效刚体代替所建立的理论都解释不了 Kelvin 实验的结果, 只有考虑粘性按长期稳定理论处理才和实验一致。这是

Thomson-Tait 稳定法则正确性的证明,即长期稳定性真实性的证明。根据液体系统的回转稳定准则,液体转子陀螺仪必须设计成扁形。

2. 按照具有能量耗散情形的刚体回转稳定准则,陀螺仪必须设计成扁形<sup>[9]</sup>。根据刚体动力学的经典理论,刚体绕最大惯量主轴和最小惯量主轴旋转都是稳定的,只有绕中间轴旋转是不稳定的。考虑能量耗散后发现十分有趣的结果,耗散使绕最小惯量主轴(长轴)的旋转变成不稳定,而使绕最大惯量主轴(短轴)的旋转变成渐近稳定。这个事实已为陀螺仪的研制者所肯定<sup>[16,17]</sup>。

3. 具有能量耗散的刚体回转稳定准则为用自旋稳定实现飞行器姿态控制提供理论依据。美国1958年发射第一颗卫星 Explorer-1 号设计用绕长轴自旋控制姿态,但进入飞行后仅几小时就发生翻滚。设计者直观认为这是由于能量耗散作用使卫星由绕长轴自旋变为绕短轴自旋。后来在发射第一颗通讯卫星 Syncon 号时设计为绕最大惯量主轴(短轴)自旋,取得了姿态控制的成功<sup>[18]</sup>。另外,处理自旋飞行器稳定问题的能沉法就是 Thomson-Tait 稳定准则的另一种表述形式。这些事实表明:Thomson-Tait 稳定准则在美国空间探索计划实施中得到了肯定,即长期稳定性的真实性得到了证实<sup>[9]</sup>。

## 七、结 论

1. 对于长期稳定性和动力稳定性这场争论可以作出结论。前辈科学家按准稳演化过程所发展的 Jeans-Darwin 双星分裂理论必须重新肯定,近30年来对这一理论的否定是错误的。

2. Thomson-Tait 稳定准则是一个具有普遍性的原则,许多方面的理论和实验已证实了这个准则的正确性和重要性。

3. 对于无限缓变变化的准稳过程或者要求系统定常运动状态长时间维持的情形,例如通讯卫星在轨道中的姿态控制和作为自动控制部件的陀螺仪等,都必须按长期稳定性判断。

作者对于谈稿生、钱伟长和叶开沅教授的指导和支持表示衷心的感谢。

## 参 考 文 献

- 1 Thomson, W. & Tait, F. C., *Treatise on Natural Philosophy* (2nd ed.), Cambridge Univ. Press (1912).
- 2 徐积昌, *中国科学*, 7 (1981): 665-674.
- 3 Trdhunter, I., *History of the Mathematical Theories of Attraction and the Figure of the Earth*, London (1873).
- 4 Jeans, J. H., *Astronomy and Cosmogony*, Cambridge Univ. Press (1929).
- 5 徐积昌, *力学学报*, 1981 年增刊: 31-36.  
*自然杂志*, 1 (1982): 22-24.  
*中国科学*, 3 (1982): 254-264.
- 6 徐积昌, 论刚体的回转稳定性准则及其应用, 1982 年
- 7 Knops, R. J., Wilker, E. W., *Int. J. Eng. Sci.*, V. 4 (1966): 303.
- 8 梁恪勤史, H. T., *运动稳定性*: 国防工业出版社 (1959).
- 9 Zajack, M. E., *J. Astronaut. Sci.*, V. 11 (1964): 46-49.
- 10 Mingori, O. L., *ASME J. Appl. Mech.*, V. 37 (1970): 253-259.
- 11 Husoyin, K., *Shock and Vib. Dig.*, V. 8, 4 (1976).
- 12 徐积昌, *中国科学*, 7 (1982): 625-635.
- 13 徐积昌, *科学通报*, 20 (1975): 372-378.
- 14 Tasso, H., 6th Conf. on Plasma Physics and Controlled Nucl. Fusion Research, Berlin, Germany, FRG (1976).
- 15 Shieh, R. C., *Z. Angew. Math. Physik*, V. 19 (1968): 927-941.
- 16 Crammel, R.,
- 17 Wrigley, W.,
- 18 卡普兰, M. H., *空间飞行器动力学和控制*, 科学出版社 (1981).

## ON SECULAR STABILITY AND DYNAMIC STABILITY

Xu Shuo-chang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)