

## 塑料注模成型中的流体力学问题

中国科学院力学研究所 陈允明

塑料注模成型是塑料加工的主要方法之一。先由注塑机加压使熔融热塑料经导管通过一个或几个“门”进入加工精细的冷模，直到充满整个模型。这是第一阶段。充满后提高压力（或保持压力）一段时间，再注入一些热塑料以补偿以后冷却时的体积收缩。停止注入后的自然冷却是第三阶段。当然这方面化工的研究是主要的，然而流体力学也有其一席之地，因为虽然单个塑料制品很便宜，但模型及注塑机很贵，所以应用流体力学理论来判断所设计的模型及注塑机能否达到要求（例如，在给定压力下能否充满整个模型）是很有价值的。而且这方面的流体力学问题也有其自身的特点。首先，熔融热塑料都是非牛顿流体，而且输运系数对温度很敏感，寻找一个合适的本构方程是当务之急。其次，由于塑料制品很薄，模型通道的高度很小，熔融塑料的粘性又大（典型值为 $10^2-10^3$ 公斤/(米·秒)），所以雷诺数很小。对速度来说，Hele-Shaw 分布是常用的近似；但其粘性系数强烈依赖于温度，而流动性又影响产品质量，故能量方程是至关重要的。另一方面塑料制品形状复杂，在许多连接处截面有显著变化，数值计算往往是必不可少的。

本文只能介绍概貌，而且主要是 Cornell 大学研究小组的成果。主要依据是文献[1]。研究表明在第一阶段（流动阶段）可以应用带幂律粘性的非弹性流体模型，但在截面显著变化处粘弹性效应就不可忽略。在第二阶段（加压充塞阶段）则可压缩性、热膨胀性变为主要因素了。

下面就最简单情况（粘性系数为常数的直管道流动）来进行讨论<sup>[2]</sup>，符号见图1。小雷诺数可忽略惯性项，因为 $W/u \sim b/L \ll 1$ ，可忽略垂直速度分量 $w$ 。在进口端压力为时间的已知函数 $F(t)$ ；在流动前锋面上： $x = s(t)$ （待定函数）， $p = 0$ 。基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 = -\frac{\partial p}{\partial z} \\ 0 = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

由此可得

$$p = F(t) \left[ 1 - \frac{x}{s(t)} \right] \quad (2)$$

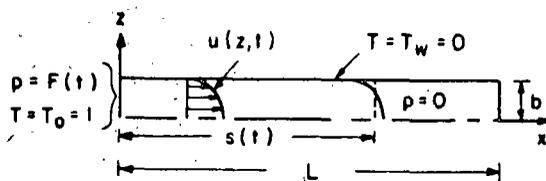


图1 牛顿流体的一维注模流动

$$u = \frac{b^2 F}{2\eta s} \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right) \quad (3)$$

平均速度应等于锋面推进速度

$$\frac{ds}{dt} = \bar{u} = \frac{1}{2b} \int_{-b}^b u dz = \frac{b^2}{3\eta} \frac{F(t)}{s(t)}$$

$$s^2(t) = \frac{2b^2}{3\eta} \int_0^t F(t) dt \quad (4)$$

由  $s(t) = L$  定出充满模型所需的时间  $t = t_F$ .

能量方程为

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} = \frac{1}{Pe} \left[ \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + Br \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (5)$$

其中  $Pe = \rho C_p U L / k \gg 1$ ,  $Br = \mu U^2 / (k \Delta T)$  是 Brinkman 数, 代表粘性加热与热传导之比, 数值一般是 1 的量级。暂时忽略粘性加热, 则在入口端附近解趋于定常 Leveque 解, 在锋面附近它又近似于 Rayleigh 解  $T = \operatorname{erf} \left\{ \frac{z'}{\sqrt{Pe(t-t_f(x))}} \right\}$ , 准确解应给出两者之间的连续过渡<sup>[3]</sup>。考虑粘性加热项的完整相似解是作者最近得到的<sup>[4]</sup>。

在充塞阶段 ( $t > t_f$ ),  $\rho = 1 + \alpha p - \beta(T-1)$ ,  $\alpha$  及  $\beta$  为压缩性系数及热膨胀系数。假设  $t - t_f = C(\alpha) \gg 1$ 。引入  $\tau = (t - t_f) / \alpha$ , 动量方程不变而连续方程及能量方程为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = - \frac{D\rho}{Dt} = - \frac{\partial p}{\partial \tau} + \frac{\beta}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial \tau} \quad (6)$$

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} = 0 \quad (7)$$

即在  $\tau = O(1)$  的一小段时间内温度无显著变化。这时速度仍为抛物分布:

$$u = - \frac{b^2}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left(1 - \frac{z^2}{b^2}\right)$$

代入式 (6), 对  $w$  在  $\pm b$  之间积分, 由于  $w|_{\pm b} = 0$  得到标准的热传导方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \tau} &= \frac{b^2}{3\eta} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} \\ \tau = 0: p &= F(t_f)(L-x) \\ x = 0: p &= F(t); x = L: \frac{\partial p}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

为自然冷却阶段, 只需考虑热膨胀效应而得到  $\rho = 1 - \beta(T-1)$ , 这时主要是热传导,

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = \beta \frac{\partial T}{\partial t} \quad (9)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{1}{Pe} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \quad (10)$$

同样, 用抛物分布代入式 (9), 对  $w$  积分得到

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 3 \frac{\eta}{b^3} \frac{\beta}{Pe} \left( \frac{\partial T}{\partial z} \right)_{z=-b} \quad (11)$$

先由式(10)解出温度场,再积分式(11)即可求出压力分布。图2给出压力变化的全过程。

在注塑过程中,由于冷壁影响,近壁部分的塑流粘性变大直至丧失流动性而形成冷凝层,这对产品质量影响很大,所以专门研究这不流动的冷凝层是有意义的。一个简单方法是假定温度分布,利用动量积分方程来计算冷凝层的发展<sup>[5]</sup>。引入 $z' = z + b$ (即下壁面 $z' = 0$ ),记冷凝层厚为 $\delta_1$ ,设粘性系数在冷凝层外( $T > T_g$ )为常数 $\mu_0$ ,在冷凝层中( $T \leq T_g$ ) $\mu = \infty$ <sup>[6]</sup>,则流量不变时 Hele-Shaw 分布为

$$u = \frac{3}{2\mu_0} \frac{Q}{(b - \delta_1)^3} (z' - \delta_1) (2b - z' - \delta_1). \text{ 忽略}$$

粘性加热可假设温度剖面为折线型,

$$\begin{aligned} T &= T_w + (T_g - T_w)z', & 0 \leq z' \leq \delta_1 \\ T &= T_g + (T_0 - T_g) \frac{z' - \delta_1}{\delta - \delta_1}, & \delta_1 \leq z' \leq \delta \\ T &= T_0, & z' > \delta \end{aligned}$$

代入能量方程,从0积分至 $\delta_1$ ,从 $\delta_1$ 积分到 $\delta$ 可得到确定 $\delta_1$ 及 $\delta$ 的两个双曲型方程

$$\left. \begin{aligned} a_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + b_1 \frac{\partial \delta}{\partial x} + b_2 \frac{\partial \delta}{\partial t} &= e_1 \\ c_1 \frac{\partial \delta_1}{\partial x} + c_2 \frac{\partial \delta_1}{\partial t} + d_1 \frac{\partial \delta}{\partial x} + d_2 \frac{\partial \delta}{\partial t} &= e_2 \end{aligned} \right\}$$

$x=0$ 时,  $\delta = \delta_1 = 0$ ;  $x = Qt/(2b)$ 时,  $\delta = \delta_1 = 0$

可用特征线方法求解。当 $x \geq 0$ 时 $\delta_1 \sim x^{1/3}$ ,当 $x \leq Qt/2b$ 时 $\delta_1 \sim (Qt/2b - x)^{1/2}$ 与相似解一致。 $\delta_1$ 的计算结果与有限元结果相比偏高。有限元结果显示,温度剖面由于粘性加热而非单调,有凸起。因此一个改进方法是在温度剖面中考虑由粘性加热引起的温度过冲而分为三段:

$$\begin{aligned} T &= T_w + (T_g - T_w) \frac{z'}{\delta_1}, & 0 \leq z' \leq \delta_1 \\ T &= T_m + (T_g - T_m) \frac{z' - \delta_1}{\delta - \delta_1}, & \delta_1 \leq z' \leq \delta \\ T &= T_0 + (T_0 - T_m) \frac{z' - \delta}{b - \delta}, & \delta \leq z' \leq b \end{aligned}$$

在 $\delta \leq z' \leq b$ 区间,能量方程中忽略热传导项但保留粘性加热项。这时多一未知数 $T_m(x, t)$ ,也多一方程:将能量方程由 $\delta$ 积分至 $b$ 。对于工程应用还应将剪切稀化效应考虑进去。若用有限差分法求解能量方程,则需考虑流场中的“奇线”,在它的前后分别应用向前及向后差分<sup>[7,8]</sup>。

下面研究剪切稀化效应。

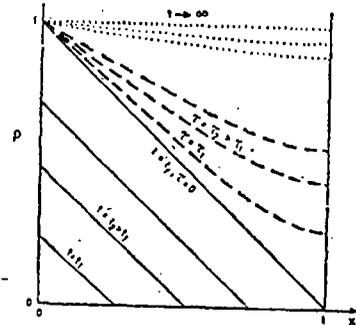


图2 定流量时的压力分布  
实线、虚线和点线分别代表  
第一、第二、和第三阶段

考虑复杂的形状(图3),将粘性系数表为

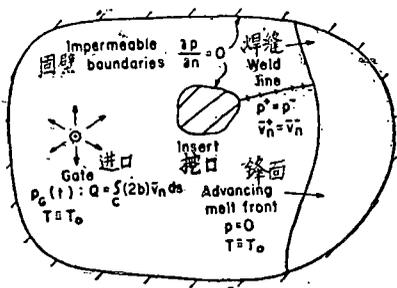


图3 二维注模流动

$$\eta = m(T)f(\dot{\gamma}) \quad (12)$$

$m(T)$  为温度的函数,  $f(\dot{\gamma})$  为应变率

$$\dot{\gamma} = \sqrt{\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2}$$

的函数,基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial v}{\partial z} \right), \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

$$\rho C_p \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \eta \dot{\gamma}^2 \quad (14)$$

$z = \pm b$  处各速度分量均为零。积分前两式可得

$$(u, v) = - \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) \int_z^b \frac{z}{\eta} dz \quad (15)$$

$$(\bar{u}, \bar{v}) = - \frac{S}{b} \left( \frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y} \right) \quad (16)$$

其中  $S = \int_0^b \frac{z^2}{\eta} dz$ ,  $b$  为  $x, y$  的函数  $S$  依赖于  $u, v, T$ 。积分连续方程

$$\frac{\partial}{\partial x} (b\bar{u}) + \frac{\partial}{\partial y} (b\bar{v}) = 0 \quad (17)$$

再利用式(16)得到基本方程

$$\nabla \cdot (S \nabla p) = 0 \quad (18)$$

其中  $\nabla$  为二维  $(x, y)$  算子。边界条件为  $\frac{\partial p}{\partial n} \Big|_r = 0$ 。若由式(17)引入流函数可得基本方程的另一形式

$$\left. \begin{aligned} b\bar{u} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad b\bar{v} = - \frac{\partial \psi}{\partial x} \\ \nabla \cdot \left( \frac{1}{S} \nabla \psi \right) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

边界条件为  $\psi|_r = 0$ 。若  $b, \eta$  为常数, 式(18)和(19)蜕化为拉普拉斯方程。但现在部分边界(锋面)的位置是随时间变化而事先未知的, 故问题类似于服从 Darcy 定律的渗流问题。若  $(x, y)$  平面中有一个或几个“挖口”, 则锋面遇到“挖口”分为两股, 再相遇时形成“焊缝”。沿“焊缝”压力及法向速度连续, 也即  $p$  及  $\frac{S}{b} \frac{\partial p}{\partial n}$  连续。由于“焊缝”位置未知, 故需要两个条件来确定。

在 Cornell 研究小组的计算中<sup>[9]</sup>

$$f(\dot{\gamma}) = A \dot{\gamma}^{n-1} (n < 1), \quad m(T) = \exp[-B(T - T_r)]$$

$A, n, B, T_r$  由粘度计实验数据确定。先由近似方法(如假定等温)算出进口“门”附近一个

小区域的解作为起始值。由速度场定出下一时刻的锋面位置，并由式(14)计算温度场。有了温度场再用有限元法解式(18)或(19)。由于 \$S\$ 通过 \$\gamma\$ 依赖于 \$u, v\$，只能逐次迭代求解。求出速度场又可进行下一步的计算。图 4 是计算结果与压力探针测量值的比较。

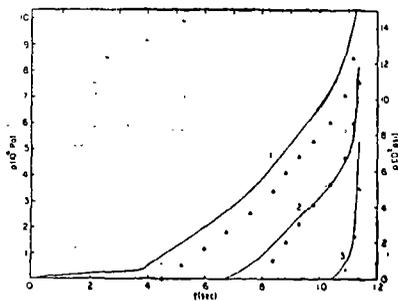


图 4 在三个典型位置的计算点与实验曲线的比较

即使对牛顿流体，在截面显著变化的角上，奇点行为也是够复杂的<sup>[10]</sup>，对热塑流还必须考虑粘弹性效应。Cornell 研究小组的工作表明 Leonov 模型最适合<sup>[11-13]</sup>。理论上它能适用于大变形率情形，与实验的比较也支持它。这本构方程为

$$\underline{\tau} = \eta_0 a \underline{\varepsilon} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \underline{C}^{(k)} \quad (20)$$

下面一横道表示张量，\$\eta\_0\$ 是零阶粘性系数，\$\underline{\varepsilon}\$ 为变形率张量；\$\eta\_k, \theta\_k\$ 为 \$k\$ 阶模的粘性系数及弛豫时间，\$\underline{C}^{(k)}\$ 是 \$k\$ 阶模的弹性变形张量，\$a\$ 为常数参数 (\$0 < a < 1\$)。

\$\underline{C}^{(k)}\$ 的发展方程为

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{C} + \underline{v} \cdot \nabla \underline{C} - (\nabla \underline{v})^T \cdot \underline{C} - \underline{C} \cdot (\nabla \underline{v}) + \frac{1}{2\theta} (\underline{C} \cdot \underline{C} - \underline{I}) = 0 \quad (21)$$

其中 \$\underline{v}\$ 为速度向量，\$\underline{I}\$ 是单位张量。虽然式(21)是非线性方程，但各阶 \$\underline{C}^{(k)}\$ 之间无直接相互作用，而且沿流体质点轨迹积分它是不难的。各参数由简单流动的实验值定出，它们之间有下列关系：

$$(1-a)\eta_0 = \sum_{k=1}^N \eta_k \quad (22)$$

对于定常粘度计剪切流动，此模型给出<sup>[12]</sup>

$$\eta(\dot{\gamma}) = \eta_0 a + \sum_{k=1}^N 2\eta_k / (1 + \chi_k) \quad (23)$$

$$\tau_{11} - \tau_{22} = \sqrt{2} \sum_{k=1}^N \frac{\chi_k - 1}{\sqrt{1 + \chi_k}} \quad (24)$$

其中 \$\eta\$ 为似剪切粘性系数，\$\tau\_{11} - \tau\_{22}\$ 为法向应力差，\$\chi\_k = \sqrt{1 + 4\dot{\gamma}^2 \theta\_k^2}\$。由定常粘度计剪切流动及振荡流动定出的参数是一致的。这至少说明此模型是自洽的。

一个简单情况是二维定常截面管道流动<sup>[14]</sup>。设流动等温，基本方程为

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} &= -\nabla p + \eta_0 a \nabla^2 \underline{v} + \sum_{k=1}^N \frac{\eta_k}{\theta_k} \nabla \cdot \underline{C}^{(k)} \\ \nabla \cdot \underline{v} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

计算中必须迭代求 \$\underline{C}\$。在入口端 \$\underline{C}\$ 的初值可由完全发展管道流动参数算出。先假设一个流场（例如牛顿流体的结果），由式(21)（略去 \$\frac{\partial \underline{C}}{\partial t}\$）沿流线积分，给出式(25)中的非牛顿粘性应力的初级近似。由式(25)，利用 \$\partial \underline{v} / \partial t\$ 算出下一时刻的流场，由此流场又可算出 \$\underline{C}\$ 的下一级近似，这样一直计算到趋于定常。图 5，图 6 是一个算例。

若要计算残余应力及其影响，则还必须发展一个能兼顾流态、胶态及玻璃态（及其相互

作用)的本构方程<sup>[15]</sup>。因为残余应力不仅在流动部分(流态、胶态)中有,在冷凝的玻璃态中也有(热应力)。而上述 Leonov 模型适用于前两态,而对玻璃态则无能为力。

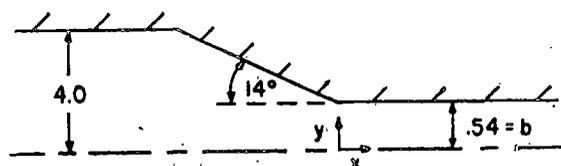


图5 收缩/扩张管道流动(长度单位为毫米)

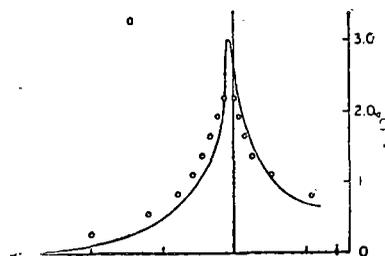


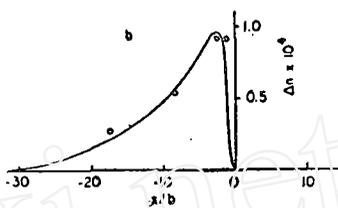
图6 沿管道中心线上双折射系数的计算点与实验曲线的比较

(a) 流动自左向右,平均速度为4.36毫米/秒

(b) 流动自右向左,平均速度为2.1毫米/秒

$\eta_1 = 3.58 \times 10^4$ ,  $\eta_2 = 2.95 \times 10^4$  公斤/米·秒

$\theta_1 = 6.07$ ,  $\theta_2 = 0.47$  秒,  $s = 0.01$



### 参 考 文 献

- 1 Shen, S.F., Fluid dynamic problems in the injection molding of polymers, 9th Nat. Cong. of Appl. Mech., Ithaca, New York (June, 1982).
- 2 Taylor, A.B., Simple models for the injection molding process, Techn. Rep. No. 25, Cornell Injection Molding Project, College of Engng., Cornell Univ., Ithaca, New York (Dec., 1978).
- 3 Taylor, A.B., Nicolas, M.O., Unsteady slow flows over a cooled flat plate, IMA J. Appl. Math., V. 28 (1982): 75-91.
- 4 Chen, Y.M., Shen, S.F., The injection molding thermal boundary layer, to be published.
- 5 Wang, K.Y., Analysis of the frozen layer behind an advancing viscous fluid in a cold channel, M.S. Thesis, Cornell Univ., Ithaca, New York (May, 1982).
- 6 Janecchitz-Kriegel, H., Injection molding of plastics: Analytical solution of the heat transfer problem, Rheologica Acta, V. 18 (1979): 693-705.
- 7 Ingham, D.B., Singular parabolic partial differential equations that arise in impulsive motion problems, J. Appl. Mech., V. 44 (1977): 396-400.
- 8 Shen, S.F., Chen, Y.M., The unsteady compressible boundary layer over a semi-infinite flat plate caused by a moving shock, 2nd Nat. Symp. on Numer. Meth. in Heat Transfer, College Park, Maryland (Sept., 1981).
- 9 Hieber, C.A., Shen, S.F., A finite-element/finite difference simulation of the injection-molding filling process, J. Non-Newtonian Fluid Mech., V. 7 (1980): 1-32.
- 10 Moffat, H.K., Viscous and resistive eddies near a sharp corner, J. Fluid Mech., V. 18 (1964): 1-18.
- 11 Leonov, A.I., Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media, Rheologica Acta, V. 15 (1976): 85-98.
- 12 Upadhyay, R.K., Isayev, A.I., Shen, S.F., Transient shear flow behavior of polymeric fluids according to the Leonov model, ibid., V. 20 (1981): 443-457.
- 13 Isayev, A.I., Hieber, C.A., Oscillatory shear flow of polymeric systems, J. Polymer Sci. (Phys. Ed.), V. 20 (1982): 423.
- 14 Upadhyay, R.K., Simulation of viscoelastic flows at large deformations according to the Leonov model, Ph.D. Thesis, Cornell Univ., Ithaca, New York (May, 1982).
- 15 Isayev, A.I., Hieber, C.A., Crouthamel, D.L., Orientation and residual stresses in the injection molding of amorphous polymers, Society of plastics Engineers, Techn. Papers, V. 27 (1981): 110-113.

## FLUID DYNAMIC PROBLEMS IN THE INJECTION MOLDING PROCESS

Cheng Yun-ming

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)