

# 缓变任意截面渠道中的非线性 周期波以及孤立波的分裂

周 显 初

(中国科学院力学研究所, 北京)

## 摘 要

本文研究了在流动方向有缓慢变化的任意截面渠道中的非线性周期波、孤立波以及孤立波在这种渠道中的分裂; 导出了适用于这种渠道的变系数 KdV 方程, 并求出了该方程的首项近似解; 得出了波速、周期、波高和渠道几何尺寸之间的关系, 得到了分裂后孤立波个数的判别式及分裂后孤立波波幅的表示式, 并应用于矩形渠道和左右对称的三角形渠道. 对于矩形渠道的情况, 本文的结果和 Madsen 和 Mei, Johnson, Svendsen 和 Buhr Hansen 等人的结果一致.

渠道中水的波动是个古老而又实际的问题, 很早就为人们所注意. 早在 1895 年 Korteweg 和 de Vries<sup>[1]</sup> 就研究了均匀矩形渠道中水的运动. 他们首先考虑了色散和非线性的影响, 得到了著名的 KdV 方程. 但由于数学上的困难, 该项工作长期没有较大进展.

六十年代以来, 随着非线性 KdV 方程研究的进展, 渠道中非线性波的研究重新活跃起来. Peters<sup>[2]</sup>, Peregrine<sup>[3]</sup> 首先研究了任意常截面渠道中的孤立波. Madsen 和 Mei<sup>[4]</sup> 从数值计算中发现了孤立波在变浅渠道中的分裂, 并由实验加以验证. 接着 Grimshaw<sup>[5]</sup>, Johnson<sup>[6]</sup> 研究了渠道深度在流动方向可变的矩形渠道中的孤立波. 文献[7]研究了更普遍的情况——缓变的任意截面渠道中的孤立波. Miles<sup>[8]</sup> 已经对近年来这方面的研究作了全面而详尽的总结.

## 一、变系数 KdV 方程的导出

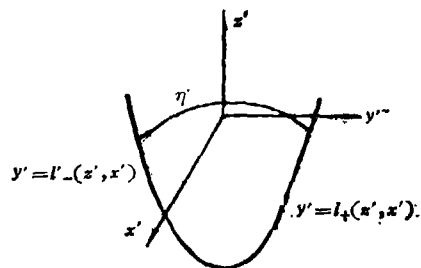


图 1

我们研究理想不可压缩流体的无旋运动. 渠道横断面及坐标, 如图 1 所示.  $x'$  轴为流动方向,  $z'$  轴垂直向上, 坐标原点在自由面平衡位置. 我们假定: (1) 渠道的深度和宽度是同量级的. (2) 水深远小于波长, 且波幅较小, 即  $1 \gg \varepsilon = (h_0/\lambda)^2 = O(a/h_0)$ , 其中  $\lambda$  为波长,  $h_0$  为特征水深,  $a$  为波幅. (3) 渠道形状随  $x'$  的变化是缓慢的, 即  $y' = l_{\pm}(z', \varepsilon x')$ .

引进如下的无量纲量:

本文 1982 年 1 月 29 日收到.

$$\begin{aligned}x &= x'/\lambda, \quad y = y'/h_0, \quad z = z'/h_0, \\t &= t'\sqrt{gh_0}/\lambda, \quad \eta = \eta'/h_0\varepsilon, \quad l_{\pm} = l'_{\pm}/h_0, \\u &= u'/\varepsilon\sqrt{gh_0}, \quad v = v'\lambda/\varepsilon h_0\sqrt{gh_0}, \quad w = w'\lambda/\varepsilon h_0\sqrt{gh_0}, \\p &= \frac{1}{\varepsilon} [z + (p' - p'_a)/\rho gh_0],\end{aligned}$$

其中带'号的量为无量纲量,  $z = \eta(x, y, t)$  为自由面高度,  $(u, v, w)$  为流体的速度,  $p, \rho$  分别为流体的压力、密度,  $p'_a$  为自由表面压力,  $g$  为重力加速度.

我们求行波解, 引入坐标变换

$$\xi = \int \sqrt{l/A} dx - t, \quad \varepsilon x = X, \quad (1)$$

其中  $l = l_+(0, X) - l_-(0, X) =$  水面宽度,  $A = \iint_{(\sigma)} dydz =$  渠道过水断面面积. 流体力学基本方程组变为:

$$\sqrt{l/A}u_{\xi} + \varepsilon u_x + v_y + w_z = 0, \quad (2a)$$

$$-u_{\xi} + \varepsilon u(\sqrt{l/A}u_{\xi} + \varepsilon u_x) + \varepsilon v v_y + \varepsilon w w_z + \sqrt{l/A}p_{\xi} + \varepsilon p_x = 0, \quad (2b)$$

$$\varepsilon[-v_{\xi} + \varepsilon u(\sqrt{l/A}v_{\xi} + \varepsilon v_x) + \varepsilon v v_y + \varepsilon w w_z] + p_y = 0, \quad (2c)$$

$$\varepsilon[-w_{\xi} + \varepsilon u(\sqrt{l/A}w_{\xi} + \varepsilon w_x) + \varepsilon v v_y + \varepsilon w w_z] + p_z = 0. \quad (2d)$$

边界条件为:

$$p = \eta, \quad (3a)$$

$$w = -\eta_{\xi} + \varepsilon u(\sqrt{l/A}\eta_{\xi} + \varepsilon\eta_x) + \varepsilon v\eta_y, \quad \left. \vphantom{w} \right\} \text{在 } z = \varepsilon\eta \text{ 上}, \quad (3b)$$

$$v = w l_{\pm z} + \varepsilon u l_{\pm x}, \quad \text{在 } y = l_{\pm}(z, X) \text{ 上}. \quad (3c)$$

把  $u, v, w, p, \eta$  按下式展开

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots.$$

代入(2),(3)式, 得到零阶量的方程及边界条件如下:

$$-u_{0,\xi} + \sqrt{l/A}p_{0,\xi} = 0, \quad (4a)$$

$$p_{0,y} = p_{0,z} = 0, \quad (4b)$$

$$\sqrt{l/A}u_{0,\xi} + v_{0,y} + w_{0,z} = 0, \quad (4c)$$

$$\eta_0 = p_0, \quad w_0 = -\eta_{0,\xi} \text{ 在 } z = 0 \text{ 上}, \quad (5a)$$

$$v_0 = w_0 l_{\pm z} \text{ 在 } y = l_{\pm}(z, X) \text{ 上}. \quad (5b)$$

由(4),(5)式可解得

$$\eta_0(\xi, X) = p_0(\xi, X),$$

$$u_0(\xi, X) = \sqrt{l/A}\eta_0(\xi, X).$$

由流动是无旋的条件引入势函数  $\varphi$ , 使

$$-\frac{l}{A}\eta_{0,\xi}\varphi_y = v_0, \quad -\frac{l}{A}\eta_{0,\xi}\varphi_z = w_0,$$

且要求

$$\iint \varphi dydz = 0. \quad (6)$$

由(4c), (5)式可知,  $\varphi$  满足

$$\varphi_{yy} + \varphi_{zz} = 1, \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} \varphi_x &= A/l, \text{ 在 } z=0 \text{ 上,} \\ \varphi_n &= 0, \text{ 在 } y=l_{\pm}(z, X) \text{ 上.} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

这是泊松方程的牛曼边值问题, (6)式保证了解的唯一性. 由于渠道侧壁不随时间而变, 所以  $\varphi$  与  $\xi$  无关, 是  $X, y, z$  的函数.

一阶量的方程和边界条件为:

$$-u_{1,\xi} + \sqrt{l/A} u_0 u_{0,\xi} + \sqrt{l/A} p_{1,\xi} + p_{0,x} = 0, \quad (9a)$$

$$-v_{0,\xi} + p_{1,y} = 0, \quad (9b)$$

$$-w_{0,\xi} + p_{1,z} = 0, \quad (9c)$$

$$\sqrt{l/A} u_{1,\xi} + u_{0,x} + v_{1,y} + w_{1,z} = 0. \quad (9d)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \eta_1, \\ w_{0,z} \eta_0 + w_1 &= -\eta_{1,\xi} + \sqrt{l/A} u_0 \eta_{0,\xi}, \end{aligned} \right\} \text{ 在 } z=0 \text{ 上,} \quad (10a)$$

$$v_1 = w_1 l_{\pm z} + u_0 l_{\pm x}, \text{ 在 } y=l_{\pm}(z, X) \text{ 上.} \quad (10b)$$

由(9b), (9c), (10a)式可得

$$p_1 = -\frac{l}{A} \eta_{0,\xi\xi} \varphi(X, z) + \eta_1 + \frac{l}{A} \eta_{0,\xi\xi} \varphi(X, y, 0). \quad (11)$$

把(9d)式在渠道断面区域内积分, 得

$$\iint_{(\sigma)} (-\sqrt{l/A} u_{1,\xi} - u_{0,x}) dy dz = \iint_{(\sigma)} (v_{1,y} + w_{1,z}) dy dz = \int_{(s)} v_1 dz - w_1 dy,$$

其中  $(s)$  为  $(\sigma)$  的周线. 用(9a)式消去上式中的  $u_{1,\xi}$ , 利用边界条件(10)式, 把上式积分出来, 经过整理, 可得如下的变系数 KdV 方程

$$\begin{aligned} \eta_0 (\sqrt{Al})_x + 2\sqrt{Al} \eta_{0,x} + \left( \frac{3l^2}{A} - l_x \right) \eta_0 \eta_{0,\xi} + \\ + \left( \frac{l}{A} \int_{l_-(0,X)}^{l_+(0,X)} \varphi(X, y, 0) dy \right) \eta_{0,\xi\xi\xi} = 0, \end{aligned} \quad (12)$$

其中  $\varphi$  为方程(7)满足边界条件(8), (6)的解.

对于矩形截面情况, (12)式变为:

$$\frac{(l\sqrt{h})_x}{l\sqrt{h}} \eta_0 + 2\eta_{0,x} + \frac{3}{h\sqrt{h}} \eta_0 \eta_{0,\xi} + \frac{\sqrt{h}}{3} \eta_{0,\xi\xi\xi} = 0, \quad (13)$$

(13)式与 Shuto<sup>[9]</sup> 导出的变宽度、变深度矩形截面渠道中的 KdV 方程一致. 对于宽度为常数的矩形渠道, (13)式与 Johnson 的结果一致.

对于如图 2 所示的左右对称的三角形渠道来说, (12)式变为

$$\frac{1}{4} \sqrt{2h} \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma \right) \eta_{0,\xi\xi\xi} + \frac{10}{h\sqrt{2h}} \eta_0 \eta_{0,\xi} + 2\eta_{0,x} + \frac{(h\sqrt{2h} \operatorname{tg} \gamma)_x}{h\sqrt{2h} \operatorname{tg} \gamma} \eta_0 = 0. \quad (14)$$

对方程(12)作变换

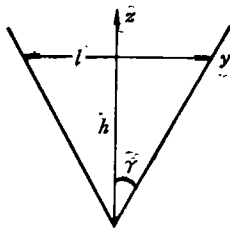


图 2

$$\zeta = (Al)^{\frac{1}{4}} \eta_0, \quad (15)$$

可把(12)式变为:

$$\zeta_X + \alpha(X)\zeta\zeta_\xi + \beta(X)\zeta_{\xi\xi\xi} = 0, \quad (16)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha(X) &= \left( \frac{3l^2}{A} - l_x \right) / [2(Al)^{\frac{3}{4}}], \\ \beta(X) &= \frac{l}{A} \frac{1}{2\sqrt{Al}} \int_{L_-(0,X)}^{L_+(0,X)} \varphi(X, y, 0) dy. \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

对于矩形渠道

$$\alpha = \frac{3}{2} l^{-1/2} h^{-7/4}, \quad \beta = \frac{1}{6} h^{1/2}; \quad (18)$$

对于左右对称的三角形渠道

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{5}{2} (2h^{-9} \operatorname{tg}^{-2} \gamma)^{1/4}, \\ \beta &= \frac{1}{8} \sqrt{2h} \left( 1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma \right). \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

## 二、非线性周期波

一般情况下,方程(16)只能数值求解. 但若假定  $\alpha, \beta$  为  $X$  的缓变函数,即

$$\alpha = \alpha(\mu X), \quad \beta = \beta(\mu X),$$

其中  $\mu \ll 1$  是渠道缓变参量,则(16)式可解析求解,从而求得缓变任意截面渠道中的非线性周期波. 把  $\zeta$  按  $\mu$  展开

$$\zeta(\theta, T) = \zeta_0(\theta, T) + \mu\zeta_1(\theta, T) + \dots, \quad (20)$$

其中

$$T = \omega X,$$

$$\theta = \xi - \int \omega(X) dX,$$

$$\omega = \omega_0 + \mu\omega_1 + \dots,$$

可得  $\zeta_0, \zeta_1$  的方程

$$-\omega_0\zeta_{0,\theta} + \alpha\zeta_0\zeta_{0,\theta} + \beta\zeta_{0,\theta\theta\theta} = 0, \quad (21)$$

$$-\omega_0\zeta_{1,\theta} + \alpha(\zeta_0\zeta_1)_\theta + \beta\zeta_{1,\theta\theta\theta} = -\zeta_{0,T} + \omega_1\zeta_{0,\theta}. \quad (22)$$

把  $X$  看作参数,(21)式即为常系数 KdV 方程,其周期解为:

$$\zeta_0 = H \left[ \left( \frac{1}{m} - 1 - \frac{E}{Km} \right) + Cn^2 \left( \sqrt{\frac{\alpha}{12\beta}} \frac{H}{m} \theta \right) \right], \quad (23)$$

其中  $K, E$  分别是第一、二类完全椭圆积分,  $m$  为它们的模数.  $m \rightarrow 1$  时,(23)式变为孤立波;  $m \rightarrow 0$  时,(23)式成为无限小振幅波.

解(23)式的时间周期为:

$$\tilde{T} = 2K \sqrt{\frac{12\beta m}{\alpha H}}, \quad (24)$$

且  $\omega_0$  与  $m, H$  的关系为:

$$\omega_0 = \frac{\alpha H}{3m} \left( 2 - m - \frac{3E}{K} \right). \quad (25)$$

$m, H$  及  $\theta$  中的初始相位由边界条件决定.

为了解方程(22), 我们令

$$\zeta_1 = \zeta_{0,\theta} g(\theta, T), \quad (26)$$

$g$  所满足的方程为:

$$\beta(2\zeta_{0,\theta\theta}g_{\theta\theta} + \zeta_{0,\theta}g_{\theta\theta})_{\theta} + \zeta_{0,T} - \omega_1\zeta_{0,\theta} = 0. \quad (27)$$

方程(27)可直接求解, 得

$$g = \int_0^{\theta} \left\{ \frac{1}{\beta\zeta_{0,\theta}^2} \int_0^{\theta} \left[ \zeta_{0,\theta} \int_0^{\theta} \zeta_{0,T} d\theta \right] d\theta \right\} d\theta + \int_0^{\theta} \frac{-\frac{\omega_1}{2}\zeta_0^2 + C_1\zeta_0 + C_2}{\beta\zeta_{0,\theta}^2} d\theta + C_3,$$

其中  $C_1, C_2, C_3$  为  $T$  的任意函数. 由于在波峰、波谷处(即  $\zeta_{0,\theta} = 0$  处)  $\zeta_1$  连续且有限, 所以

$$\omega_1 = C_1 = C_2 = 0.$$

$C_3$  的决定要牵涉到  $\zeta_2$  的方程, 其形式为:

$$-\omega_0\zeta_{2,\theta} + \alpha(\zeta_0\zeta_2)_{\theta} + \beta\zeta_{2,\theta\theta\theta} = F,$$

其中  $F$  为不含  $\zeta_2$  的已知项. 可以看出  $C_3\zeta_{0,\theta}$  是上述方程的齐次方程之解, 为使  $\zeta_2$  不致产生长期项, 由相容性条件(参看 Cole<sup>[40]</sup>, p. 82) 得出  $C_3 = 0$ , 所以

$$g = \int_0^{\theta} \left\{ \frac{1}{\beta\zeta_{0,\theta}^2} \int_0^{\theta} \left[ \zeta_{0,\theta} \int_0^{\theta} \zeta_{0,T} d\theta \right] d\theta \right\} d\theta. \quad (28)$$

为使  $\zeta_1$  也是周期为  $\tilde{T}$  的函数, 必须对  $m$  和  $H$  有所限制. 把 (27) 式直接积分一次, 然后乘以  $\zeta_{0,\theta}$  在一个周期内再积分一次, 可得

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{\theta_0 - \frac{\tilde{T}}{2}}^{\theta_0 + \frac{\tilde{T}}{2}} \zeta_0^2 d\theta = 0,$$

即

$$2\sqrt{\frac{12\beta}{\alpha} \frac{H^3}{m^3}} \left\{ \frac{-1}{K} [E - (1-m)K]^2 + \frac{2}{3} (2m-1)E + \frac{1}{3} (1-m)(2-3m)K \right\} = \text{常数}. \quad (29)$$

(29)式表示能流守恒, 也是对  $\eta_0$  的初始条件的限制, 它保证了一阶解的周期与零阶解的周期相同.

在  $\varepsilon \ll \mu \ll 1$  时,  $\zeta$  可表示为:

$$\zeta = \zeta_0 + \mu\zeta_1 + O(\mu^2, \varepsilon), \quad (30)$$

其局部相速度  $C$  为

$$C = \left\{ \frac{A}{l} \left[ 1 + \frac{\varepsilon H}{m} \frac{2\alpha}{3} \left( 2 - m - \frac{3E}{K} \right) \sqrt{A/l} \right] \right\}^{\frac{1}{2}}. \quad (31)$$

对于缓变的矩形渠道, 本文结果与 Svendsen 和 Buhr Hansen<sup>[41]</sup> 的结果相同. 他们把用 (30)式算得的波高、波形和实验结果作了比较. 他们发现两者符合得很好, 但波浪较高, 接近于碎波时, 两者有些偏离.

### 三、孤 立 波

方程(21)的孤立波解为:

$$\zeta_0 = a \operatorname{sech}^2 b\theta, \quad (32)$$

其中

$$a = \frac{3\omega_0}{\alpha}, \quad b = \left(\frac{\omega_0}{4\beta}\right)^{\frac{1}{2}}. \quad (33)$$

利用  $\zeta_0$  及其导数在无穷远处为零, 把(27)式直接积分一次, 然后乘以  $\zeta_{0,\theta}$ , 再从  $-\infty$  到  $\infty$  积分之, 分部积分后可得

$$\frac{\partial}{\partial T} \int_{-\infty}^{\infty} \zeta_0^2 d\theta = 0, \quad (34)$$

即

$$(a^2/b)_T = 0. \quad (35)$$

利用(33)式, 上式又可表示为:

$$\eta_0 \propto (\alpha/\beta)^{\frac{1}{2}} (Al)^{-\frac{1}{2}}. \quad (36)$$

对于左右对称的三角形渠道而言

$$\eta_0 \propto h^{-5/3} \operatorname{tg}^{-2/3} \gamma \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma\right)^{-1/3}, \quad (37)$$

对于矩形渠道而言

$$\eta_0 \propto l^{-2/3} h^{-1}. \quad (38)$$

该式与长波小振幅时的 Green 定律  $\eta_0 \propto l^{-1/2} h^{-1/4}$  (H. Lamb<sup>[12]</sup>, §185) 不同, 而与 Johnson, Miles 等人的结果一样.

Miles 对 (38) 式与实验结果的比较作了综述. 对于宽度不变、底部斜率为常数的矩形渠道, (38) 式只在底部斜率很小时才有效, 而底部斜率较大、振幅很小时, Green 定律的近似程度更好. 对于深度不变、宽度线性变化的矩形渠道, 当扩张角为 0.02 弧度时, Chang 等人<sup>[13]</sup> 的实验证实了(38)式, 但对于收缩渠道, 指数有偏离.

孤立波的相速度

$$C = \left\{ \frac{A}{l} + \varepsilon a [1 - (Al_z/3l^2)] \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (39)$$

对于矩形渠道, 上式变为:

$$C^2 = h + \varepsilon a, \quad (40)$$

与长波理论线性化结果一样.

对于如图 2 所示的三角形渠道

$$C^2 = \frac{1}{2} h + \frac{5}{6} \varepsilon a, \quad (41)$$

### 四、孤立波的分裂

在常截面渠道中传播的孤立波, 经过一段变截面渠道之后会发展成几个孤立波加上一个残余波列, 这就是孤立波的分裂. Madsen 和 Mei 首先从数值计算中发现了这种现象, 并用实

验加以证实. Johnson 讨论了缓变深度矩形渠道中孤立波的分裂. 这里我们将讨论任意截面渠道中孤立波的分裂.

这一节中, 我们不要求  $\alpha, \beta$  为  $X$  的缓变函数, 而从(16)式出发讨论问题.

作变换

$$\zeta = \frac{-6\beta}{\alpha} \mathcal{A}, \quad \tau = \int_{X_1}^X \beta dX, \quad \sigma = \xi, \quad (42)$$

(16)式变为:

$$\mathcal{A}_{\sigma\sigma\sigma} - 6\mathcal{A}\mathcal{A}_{\sigma} + \mathcal{A}_{\tau} + \frac{1}{\beta} [\ln(\beta/\alpha)]_X \mathcal{A} = 0. \quad (43)$$

方程(43)有两个不变量

$$[\beta(X)/\alpha(X)] \cdot [\alpha(X_1)/\beta(X_1)] \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A} d\sigma = \text{const}, \quad (44)$$

$$[\beta(X)/\alpha(X)]^2 \cdot [\alpha(X_1)/\beta(X_1)]^2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}^2 d\sigma = \text{const}. \quad (45)$$

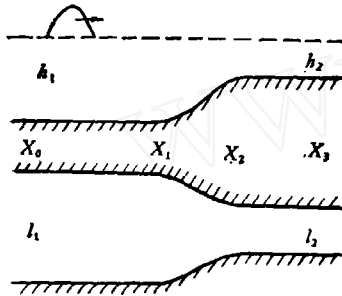


图 3

如图 3 所示, 有一孤立波

$$\mathcal{A} = -a_1 \text{sech}^2 b_1 \sigma.$$

在任意常截面渠道  $X_0 X_1$  中自左向右运动, 经过变截面段  $X_1 X_2$  后, 波形变为:

$$\mathcal{A} = -a_2 \text{sech}^2 b_2 \sigma. \quad (46)$$

自然(46)式所描述的波已不再是孤立波了, 利用不变量(44), (45)式可得

$$b_2 = b_1, \quad a_2 = a_1 [\alpha(X_2)/\beta(X_2)] \cdot [\beta(X_1)/\alpha(X_1)], \quad (47)$$

波在常截面渠道  $X_2 X_3$  中的发展由下面的常系数 KdV 方程

$$\mathcal{A}_{\tau} - 6\mathcal{A}\mathcal{A}_{\sigma} + \mathcal{A}_{\sigma\sigma\sigma} = 0 \quad (48)$$

的初值问题所决定, 其初值为:

$$\mathcal{A}(\sigma, 0) = -a_2 \text{sech}^2 b_2 \sigma = -a_1 \frac{\alpha(X_2)}{\beta(X_2)} \cdot \frac{\beta(X_1)}{\alpha(X_1)} \text{sech}^2 b_1 \sigma. \quad (49)$$

按照反演散射理论, (48), (49)式的特征方程为:

$$\phi_{\sigma\sigma} + (a_2 \text{sech}^2 b_2 \sigma + \lambda)\phi = 0, \quad (50)$$

作变换  $Z = \text{th} b_2 \sigma$ , (48) 式可化为连带 Legendre 方程

$$\frac{d}{dZ} \left[ (1-Z^2) \frac{d\phi}{dZ} \right] + \left[ \frac{a_2}{b_2^2} + \frac{\lambda}{b_2^2(1-Z^2)} \right] \phi = 0, \quad (51)$$

再进行变换

$$\phi = (1-Z^2)^{E/2} \omega(Z), \quad u = \frac{1}{2}(1-Z), \quad E = \sqrt{-\lambda}/b_2.$$

方程(51)变为超几何方程

$$u(1-u)\omega'' + (E+1)(1-2u)\omega' - (E-s)(E+s+1)\omega = 0, \quad (52)$$

其中  $s$  由下式决定

$$a_2/b_2^2 = s(s+1) = 2 \frac{\alpha(X_2)}{\beta(X_2)} \cdot \frac{\beta(X_1)}{\alpha(X_1)}. \quad (53)$$

在  $u$  平面上单位圆内, (52) 式的正则解析解用超几何函数  $F(E-s, E+s+1; E+1; u)$  表示, 如果要求解在  $u=1$  ( $Z=-1, \xi=-\infty$ ) 有界, 则必须

$$E-s = -n \quad n = 0, 1, \dots, [s],$$

即

$$\lambda = -(s-n)^2 b_2^2 \quad n = 0, 1, \dots, [s], \quad (54)$$

其中  $[s]$  表示不大于  $s$  的最大正整数.

因此, 方程 (50) 有  $[s]+1$  个负的离散特征值. 按照反演散射理论, 每一个负的离散特征值对应于一个孤立波. 所以 (49) 式表示的波最终发展成为  $N$  个孤立波加上一个残余波列. 由 (53) 式可知孤立波个数  $N$  满足下面的不等式

$$N(N-1) < 2 \frac{\beta(X_1)}{\alpha(X_1)} \cdot \frac{\alpha(X_2)}{\beta(X_2)} < N(N+1), \quad (55)$$

而波幅  $\eta_0$  的渐近值为:

$$2\lambda \left[ \frac{-6\beta}{\alpha} (Al)^{-\frac{1}{2}} \right] \Big|_{x=X_2} = \frac{\beta(X_2)}{\alpha(X_2)} \frac{\alpha(X_1)}{\beta(X_1)} \left[ \frac{A(X_1)l(X_1)}{A(X_2)l(X_2)} \right]^{\frac{1}{2}} (s-n)^2 \eta_{0,1}, \quad (56)$$

其中  $\eta_{0,1}$  表示  $\eta_0$  在常截面渠道  $X_0X_1$  中的值.

对于矩形渠道,  $\alpha, \beta$  由 (18) 式给出, 所以孤立波个数  $N$  满足不等式

$$N(N-1) < 2(l_1/l_2)^{1/2} (h_1/h_2)^{3/4} < N(N+1). \quad (57)$$

对于宽度固定的矩形渠道, 若把  $h_1$  取作 1, 则 (55) 式变为:

$$N(N-1) < 2h_2^{-3/4} < N(N+1). \quad (58)$$

由 (56) 式知, 孤立波波幅  $\zeta_0$  为:

$$\frac{2(s-n)^2}{s(s+1)} \zeta_{0,1} \quad n = 0, 1, \dots, [s], \quad (59)$$

(58), (59) 式和 Johnson 的结果完全一致.

对于宽度不变、深度变为原深度一半的矩形渠道, 按照 (58) 式,  $N=3$ ; 按照 (56) 式, 波幅分别为  $1.72\eta_{0,1}$ ,  $0.66\eta_{0,1}$ ,  $0.10\eta_{0,1}$ . 这与 Tappert 和 Zabusky<sup>[4]</sup> 的理论结果完全一致. 这也与 Madsen 和 Mei 的数值计算结果  $1.67\eta_{0,1}$ ,  $0.75\eta_{0,1}$ ,  $0.16\eta_{0,1}$  符合得很好.

对于深度固定、宽度可变的矩形渠道, 若取  $l_1=1$ , 则 (55) 式变为:

$$N(N-1) < 2l_2^{-\frac{1}{2}} < N(N+1). \quad (60)$$

在这种情况下,  $l_2 \leq \frac{1}{9}$  才能分裂为三个孤立波, 而深度可变时, 分裂为三个孤立波深度  $h_2 \leq 0.614$ . 所以, 渠道深度的变化比宽度的变化更容易产生孤立波的分裂.

由 (58), (60) 式知, 对于单纯变化深度(或宽度)的矩形渠道, 若  $h_2$  (或  $l_2$ ) 大于  $h_1$  (或  $l_1$ ), 就不会发生孤立波分裂. 但对于宽度、深度都有变化的矩形渠道, 不管  $h_2$  (或  $l_2$ ) 是否大于  $h_1$  (或  $l_1$ ), 只要

$$(l_1/l_2)^{1/2} (h_1/h_2)^{3/4} > 1,$$

就会发生孤立波的分裂. 这是由于宽度(深度)的减少弥补了深度(宽度)增加的作用.

对于如图 2 所示的三角形渠道, 孤立波个数  $N$  满足下列不等式



$$N(N-1) < 2 \frac{h_1^{11/4} \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma_1\right) \operatorname{tg}^{1/2} \gamma_1}{h_2^{11/4} \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma_2\right) \operatorname{tg}^{1/2} \gamma_2} < N(N+1), \quad (61)$$

而每个孤立波的波幅为:

$$\frac{h_2^2 \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma_2\right)}{h_1^2 \left(1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \gamma_1\right)} (s-n)^2 \eta_{0,1}. \quad (62)$$

值得注意的是: 当  $\gamma$  不变时, 就孤立波分裂而言, 三角形渠道与深度、宽度按同一规律变化的矩形渠道相当, 而比单纯变化深度或宽度的矩形渠道更容易分裂。

作者对梅强中 (C. C. Mei) 教授和谈镐生教授的指导和帮助深表感谢。

### 参 考 文 献

- [1] Korteweg, D. J. & de Vries, G., *Phil. Mag.*, **39** (1895), 422—443.
- [2] Peters, A. S., *Commu. Pure and Appl. Math.*, **19** (1966), 445—471.
- [3] Peregrine, D. H., *J. Fluid Mech.*, **32** (1968), 353—365.
- [4] Madsen, O. S. & Mei, C. C., *J. Fluid Mech.*, **39** (1969), 781—791.
- [5] Grimshaw, R., *J. Fluid Mech.*, **42** (1970), 639—656.
- [6] Johnson, R. S., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **73** (1973), 183—203.
- [7] 周显初, 应用数学和力学, **2**(1981), 397—406.
- [8] Miles, J. W., *Annual Rev. Fluid Mech.*, **12** (1980), 10—43.
- [9] Shuto, N., *Coastal Engin. in Japan*, **17** (1974), 1—12.
- [10] Cole, J. D., *Perturbation Method in Applied Mathematics*, Blaisdell, 1968.
- [11] Svendsen, I. A. & Buhr Hansen, J., *J. Fluid Mech.*, **87** (1978), 433—448.
- [12] Lamb, H., *Hydrodynamics*, 6th ed., Cambridge University Press, 1932.
- [13] Chang, P., Melville, W. K., Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, **95** (1979), 401—414.
- [14] Tappert, F. & Zabusky, N., *J. Phys. Rev. Lett.*, **27** (1971), 1774—1776.