

一种低合金结构钢一维粘塑性本构模型的理论实验研究

段祝平 孙琦清 田兰桥

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文建议了确定一种低合金结构钢动态力学性能的波动传播的实验方法。从位错动力学角度,提出了描述这种钢动力学性能的有关本构模型。为了把实验结果与数值计算进行比较,本文提出了求解包含有三阶弥散项的一个数值方法。并证明,本文建议的本构模型能够用来描述它的性质。

近 20 年来,对塑性动力学的研究获得了显著的进展。该领域内有两个基本不同的但又密切相关的课题:一是塑性波理论,它企图阐明当波的幅值超过材料的弹性极限时,波在金属中的传播规律;二是在于通过各种实验方法确定金属的动力学性质,尤其是本构关系的研究。尽管在一维应力的框架内,已发表了大量的文章,但仍有不少的基本问题仍待解决,其中之一是如何研究由于侧向运动引起的横向惯性。该效应在波头上尤其是不能忽略的。诚然,对该问题要获得满意的答案是很困难的。能否提出一个简单可行的方法,仍然是在一维理论的范围内去处理该问题呢?

另一个重要的问题是如何正确地决定在计算中采用的本构模型?正如 Lindholm 指出的,波的剖面对本构模型的具体形式并不敏感。因此可以选择一种以上的本构形式,如 Malvern 型, Gilman 型等等。将计算结果与实验结果进行拟合,从而来确定本构模型中待定的参数。因此可以提出一个问题,哪一种本构模型既简单又合理,而且,描述一个率型物质的本构模型究竟最少需要几个本构参数?

本文的目的在于通过实验和数值分析研究该问题。在我们实验室中用的实验方法如图 1 所示。内径为 14.9mm 的火药枪经过精心设计可以达到稳定而可调的子弹速度。子弹材料为 18Ni 马氏体时效钢,当长为 300mm 的子弹以某一速度撞击波导杆时,便产生一应力波沿波导杆传播,并且在试件与导杆界面发生波的反射和透射。为了记录入射与反射应力脉冲,在波导杆上离试件与导杆界面 45mm 处贴上一个 $2 \times 3\text{mm}^2$ 箔式电阻应变片,类似地,在试件上粘贴上三至四个应变片,彼此相距 15mm。瞬时弹性波与试件上的塑性波剖面由两台双线示波器与一台 AD 变换器记录,示波器通过粘贴在波导杆上的应变片给出的应变讯号进行触发。这样一次实验可以获得四至五个应变波形。

本文的第一部分是从 Hamilton 原理推导弹塑性杆的运动方程。在第二节中,从位错动力学角度建议了关于率型本构关系的一般形式。通过实验和数值结果进行比较,可

本文于 1982 年 6 月 22 日收到。

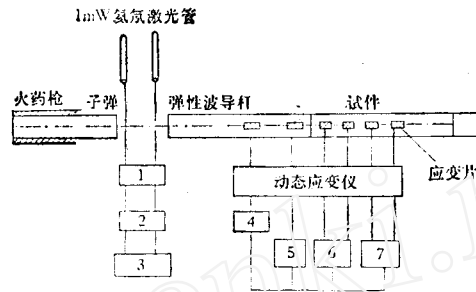


图 1 波动实验测定应变-时间波形的实验装置

1 光电二极管 2 放大器 3 E324 计数器 4 触发电路 5 AD 模数转换器 6, 7 双脉冲示波器

以得到结论: 对这种低合金结构钢, 特征松弛时间, 可动位错饱和密度与初始位错密度之比, 以及硬化模数是三个控制这种钢的宏观塑性流动的主要物理参数。最后, 简要地讨论一下本文采用的求解基本方程的数值差分方法^[1,2]。差分解与精确解比较表明: 计算中的累计误差不超过 1%, 从而说明, 该方法可以用于研究高应变率下金属材料的动力学性能。

一、考虑横向惯性时运动方程的推导

首先推导弹塑性杆的运动方程, 设 u_x 和 u_r 分别为圆柱杆的轴向与径向位移, x 表示所考虑的截面到子弹和导杆交界面的距离, t 表示时间。且引入下列假设:

假设 1 在变形过程中, 杆的横截面保持平面不变, 故纵向位移 u_x 与纵向质点速度 v_x 与坐标 r 无关, 即有

$$u_x = u_x(x, t) \quad (1.1a)$$

$$v_x = \partial u_x / \partial t = v_x(x, t) \quad (1.1b)$$

假设 2 和应力 σ_x 相比, 柱坐标系下的其余应力分量 σ_{ij} 可忽略, 即有

$$\sigma_{ij} = \begin{cases} = 0 & \text{当 } i, j \neq 1 \\ > 0 & \text{当 } i = j = 1 \end{cases} \quad (1.2)$$

假设 3 应变分量是微小的, 故所有应变分量可分解为弹性部分和塑性部分之和, 若用 ε_r 和 ε_θ 分别表示横向与周向应变, 并取压应变为正。则有

$$\varepsilon_x = \varepsilon_x^e + \varepsilon_x^p = -\frac{\partial u_x}{\partial x} \quad (1.3a)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_r^e + \varepsilon_r^p = -\frac{\partial u_r}{\partial r} \quad (1.3b)$$

$$\varepsilon_\theta = \varepsilon_\theta^e + \varepsilon_\theta^p = -\frac{u_r}{r} \quad (1.3c)$$

而应变和应力的弹性部分服从 Hooke 定律。材料假定为各向同性的, 杨氏模量为 E , 泊桑比为 ν , 则按假设 2, 可得

$$\varepsilon_x^e = \frac{1}{E} \sigma_x \quad (1.4a)$$

$$\varepsilon_{\theta}^e = \varepsilon_r^e = -\frac{\nu}{E} \sigma_x \quad (1.4b)$$

假设 4 体应变的塑性部分为零,即

$$\varepsilon_x^p + \varepsilon_r^p + \varepsilon_{\theta}^p = 0 \quad (1.5)$$

将 (1.3a-c) 代入(1.5)并利用(1.4a,b)可得

$$\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{1}{r} u_r = \varepsilon_x - \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \sigma_x \quad (1.6a)$$

而由变形的对称性要求

$$u_r = 0 \quad (\text{当 } r = 0) \quad (1.6b)$$

这样,积分(1.6a)可得

$$u_r = \frac{1}{2} r \left[\varepsilon_x - \frac{1}{E r^2} 2(1 - 2\nu) \int_0^r r \sigma_x dr \right] \quad (1.7)$$

若径向位移 u_r 只线性依赖于 r , 且 σ_x 与 r 无关,所以得到

$$u_r = \frac{1}{2} r \left(\varepsilon_x - \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \sigma_x \right) \quad (1.8)$$

则径向质点速度 v_r 和应变 $\varepsilon_r, \varepsilon_{\theta}$ 各可表示为

$$v_r = \partial u_r / \partial t = \frac{1}{2} r \left[\frac{\partial \varepsilon_x}{\partial t} - \frac{1}{E} (1 - 2\nu) \frac{\partial \sigma_x}{\partial t} \right] \quad (1.9)$$

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{\theta} = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_x - \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_x \right) \quad (1.10)$$

假设 5 基于 Malvern 率型相关理论,在一维应力下,塑性应变率 $\dot{\varepsilon}_x^p$ 只依赖于应力 σ_x 和塑性应变 ε_x^p , 即有

$$\dot{\varepsilon}_x^p = g(\sigma_x, \varepsilon_x) = g_1(\sigma_x, \varepsilon_x^p) \quad (1.11)$$

这里称 $g(\sigma_x, \varepsilon_x)$ 为塑性松弛函数. 联立(1.11)和(1.4)可得本构关系

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x + g(\sigma_x, \varepsilon_x) \quad (1.12)$$

将(1.12)代入(1.10),可得径向速度

$$\begin{aligned} v_r &= r\nu \left[\dot{\varepsilon}_x + \left(\frac{1}{2\nu} - 1 \right) g(\sigma_x, \varepsilon_x) \right] \\ &= r\nu \left[\dot{\varepsilon}_x^e + \left(\frac{1}{2\nu} \right) g(\sigma_x, \varepsilon_x) \right] \\ &= r\nu \dot{\varepsilon}_x^e + \frac{1}{2} r \dot{\varepsilon}_x^p = r\nu \dot{\varepsilon}_x + \frac{r}{2} (1 - 2\nu) \dot{\varepsilon}_x^p \end{aligned} \quad (1.13)$$

$$\text{或} \quad r\nu \dot{\varepsilon}_x \leq v_r \leq \frac{1}{2} r \dot{\varepsilon}_x \quad (1.14)$$

由(1.13)可知,横向速度 v_r 为两项之和,第一项 $r\nu \dot{\varepsilon}_x^e$ 是由纵向弹性应变率引起的,第二项 $\frac{1}{2} r \dot{\varepsilon}_x^p$ 来源于纵向塑性应变率. 由于金属材料的泊桑比 ν 值总是小于 $\frac{1}{2}$. 由(1.14)表明,在相同的纵向应变率下,弹塑性杆的径向速度总要大于相应弹性杆的径向速度. 在这种意义下,弹塑性杆具有较大的横向惯性效应. 为了研究这种效应,传统的一维运动方

程需要加以修正, Rayleigh 从 Hamilton 原理出发, 第一次得到了弹性圆柱杆的运动方程, 其形式为^[3]

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = \frac{1}{2} \rho v^2 a^2 \frac{\partial^3 v_x}{\partial t \partial x^2} \quad (1.15)$$

其中 ρ 是弹性杆的密度, a 是圆柱杆的半径. 显然, 对于弹塑性杆, 情况就要复杂得多, 横向惯性不但和试件几何尺寸有关, 而且还依赖于本构函数的形式. 为了简单起见, 我们暂且假定如下形式的塑性松弛函数

$$g(\sigma_x, \varepsilon_x) = \alpha(\sigma_x - \sigma_s) = \alpha \sigma_s \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s} - 1 \right) \quad (1.16a)$$

或者

$$\dot{\varepsilon}_x = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x + \alpha(\sigma_x - \sigma_s) \quad (1.16b)$$

这里, α 是特征松弛常数, σ_s 是静态屈服应力. 按(1.14), 质点的径向速度变成

$$v_r = -r\nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} + \frac{r}{2} \alpha(1 - 2\nu)(\sigma_x - \sigma_s) \quad (1.17)$$

考虑长为 l , 半径为 a 的试件, 所具有的总动能是

$$T = \pi \rho \int_0^l \int_0^a r(v_x^2 + v_r^2) dr dx \quad (1.18)$$

将(1.1)和(1.17)代入(1.18), 并对 r 进行积分可以得到

$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \pi \rho a^2 \int_0^l \left(\frac{\partial u_x}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{1}{4} \pi \rho v^2 a^4 \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} \right)^2 dx \\ & - \frac{1}{4} \pi \rho a^4 \alpha \nu (1 - 2\nu) \int_0^l (\sigma_x - \sigma_s) \frac{\partial^2 u_x}{\partial t \partial x} dx \\ & + \frac{1}{16} \pi \rho a^4 \alpha^2 (1 - 2\nu) \int_0^l (\sigma_x - \sigma_s)^2 dx \end{aligned} \quad (1.19)$$

从(1.19)可知总动能由四项组成, 第一项是由纵向运动引起的, 它对动能起主要的贡献, 其余三项是由径向运动引起的修正. 如果仅仅发生弹性变形, (1.19)中的后两项不出现. 在发生塑性变形时, 由量级大小可知, 第三和第四项与第二项相同, 从而不可忽略. 按照假定 2, 储存在杆中的总的弹性能满足

$$U = \frac{1}{2} \int_0^l \int_0^a \sigma_x \varepsilon_x^e 2\pi r dr dx = \frac{1}{E} \pi a^2 \int_0^l \sigma_x^2 dx \quad (1.20)$$

为了推导运动方程, 利用 Hamilton 原理

$$\delta \int_{t_0}^t (T - U) dt - \int_{t_0}^t \delta W^p dt = 0 \quad (1.21)$$

其中 δW^p 是相应于虚位移 δu_x 的塑性虚功 $\delta W^p = \pi a^2 \int_0^l \sigma_x \delta \varepsilon_x^p dx$. 由(1.16b)可用位移 u_x 表示应力 σ_x

$$\sigma_x = E \int_0^t e^{\alpha E(t-\tau)} \cdot \left(\alpha \sigma_s - \frac{\partial^2 u_x(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} \right) d\tau \quad (1.22a)$$

或有

$$\delta\sigma_x = -E \int_0^t e^{\alpha E(t-\tau)} \cdot \frac{\partial^2 \delta u_x(x, \tau)}{\partial x \partial \tau} d\tau \quad (1.22b)$$

上式表明, 应力的变分和位移变分两者是不独立的. 将 (1.22a) 和 (1.22b) 代入 (1.19) 和 (1.20), 根据 (1.21) 我们采用通常方法可以推出运动方程, 但运算相当繁杂, 略去推导过程, 这里只给出以无量纲形式表示的最终结果

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \left[1 - \frac{\eta^2}{8} (1 - 2\nu) \right] \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial \bar{x}} = \frac{\nu^2}{2} \frac{\partial^3 \bar{v}_x}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}^2} - \frac{\nu}{4} (1 - 2\nu) \eta^2 \\ \cdot \int_0^t e^{\eta(t-\tau)} \left[\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial \bar{x}^2} - \frac{(1 - 2\nu)\eta}{2\nu} \cdot \frac{\partial \bar{\sigma}_x(\tau, x)}{\partial \bar{x}} \right] d\tau \end{aligned} \quad (1.23)$$

其中记号(-)表示括号内物理量的无量纲形式, 无量纲记号为:

$$\begin{aligned} \bar{x} = \frac{x}{a}, \quad \bar{t} = \frac{ct}{a}, \quad \eta = \frac{E\alpha a}{c} \\ \bar{v}_x = \frac{v_x}{v_s}, \quad \bar{\sigma}_x = \frac{\sigma_x}{\sigma_s}, \quad \bar{\epsilon}_x = \frac{\epsilon_x}{\epsilon_s} \end{aligned} \quad (1.24)$$

这里 a 为圆柱杆的半径, $c = \sqrt{E/\rho}$ 为弹性波速, ρ 为材料密度, $\sigma_s, v_s, \epsilon_s$ 分别为材料的静态屈服应力, 屈服速度和屈服应变, η 为控制宏观塑性流动的无量纲参数. 从 (1.23) 可见, 修正后的运动方程仍是相当复杂的, (1.23) 中右端第一项是由弹性侧向运动引起的, 第二项为一积分式, 由塑性侧向运动引起. 若进一步假定材料也满足弹性不可压条件, 则 (1.23) 可简化为

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{8} \frac{\partial^3 \bar{v}_x}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}^2} \quad (1.25)$$

应指出, 当 $\nu = \frac{1}{2}$ 时, 横向惯性效应的修正可以达到最大. 为了简化问题, 由 (1.14) 可

知, 若引进一个调节参数 ν^* , 假定运动方程采取如下形式:

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial \bar{x}} = \frac{1}{2} \nu^{*2} \frac{\partial^3 \bar{v}_x}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}^2} \quad (1.26)$$

为了在数值计算中估算侧向运动的影响, ν^* 值将在真实的泊桑比 ν 和 $\frac{1}{2}$ 的范围内调节.

二、塑性松弛函数 $g(\sigma_x, \epsilon_x)$ 之确定

虽然由 von-Kármán, G. I. Taylor 和 Rakhmutulin 等人首先建立起来的应变率无关理论可以解释测量得到的塑性波剖面的某些特征, 但塑性波的许多实验表明, 率型相关理论对描述大多数金属的动力学性质更加合理. 关键的问题在于把塑性松弛函数的确定建立在更加合理的基础上. 诚然, 目前还不可能单独依靠微观的方法去寻求 $g(\sigma_x, \epsilon_x)$ 的具体表达式. 基于塑性流动是由位错运动引起的假定, 提出了各种形式的 $g(\sigma_x, \epsilon_x)$ 的具体形式, 尤其是 J. W. Taylor 首先利用位错动力学成功地解释了在平板冲击实验中发现的弹性前驱波的衰减, 20 多年来, 这方面的工作有了很大的进展^[4-9]. 根据位错理论, 假定塑性势函数 $g(\sigma_x, \epsilon_x)$ 可通过 Orowan 公式给出

$$\dot{\epsilon}_x^p = g(\sigma_x, \epsilon_x) = \frac{4}{3} \phi b N \bar{v}_d \quad (2.1)$$

其中 ϕ 是取向因子, b 是柏氏矢量, N 是在滑移面上可动位错密度, \bar{v}_d 是位错的平均速度. 我们的关键是要确定 N 和 \bar{v}_d 作为 ϵ_x^p 和超应力 $(\sigma_x - \sigma_r)$ 的函数. 首先我们确定 N 作为塑性应变 ϵ_x^p 的函数. 从对 LiF 晶体的实验得到启示, Gilman 假定^[10], 晶体中的滑移带可分成两个阶段: 第一阶段, 位错增殖率 $\frac{dN}{dt}$ 与可动位错数目 N 成正比, 即有

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N \quad (2.2)$$

其中 α 是增殖系数. 这样在初始阶段, 位错随时间而成指数增加; 在第二阶段, 位错环扩展和互相交割, 使位错增殖, 一旦新的位错环充分增殖后, 它们彼此间相互碰撞. 结果是, 或者位错湮灭, 或者锁在晶体内, 两个位错互相撞击的几率与位错数目的平方成正比. 因此, 可动位错密度的变化率为

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 \quad (2.3)$$

其中 β 为湮灭系数, 当 $N = \alpha/\beta$ 时, 增殖率 $dN/dt = 0$, 这时的值称为饱和密度, 用 N_m 表示. 由 Frank-Read 源机制, 若 l_d 表示位错节点或障碍之间的距离, 则增殖系数 α 近似等于 \bar{v}_d/l_d , 单个位错在单位时间扫过的面积等于 $b\bar{v}_d$, 如图 2 所示. 因此, 异号位错在单位时间内碰撞的总数等于 $\frac{1}{2} b\bar{v}_d N^2$, 故公式(2.3)变成

$$\frac{dN}{dt} = \alpha N - \beta N^2 = \frac{\bar{v}_d}{l_d} N - \frac{1}{2} b\bar{v}_d N^2 \quad (2.4)$$

(2.4)式表明, 位错的增殖率与平均位错速度 \bar{v}_d 成正比. 联立(2.1)与(2.4), 可得

$$\frac{dN}{d\epsilon_x^p} = k(N_m - N) \quad (2.5a)$$

$$N|_{\epsilon_x^p=0} = N_0 \quad (2.5b)$$

其中 $k = \frac{3}{8} \phi$ 是和取向因子有关的常数, N_0 是初始可动位错密度, 积分(2.5)可得

$$N = N_m [1 - (1 - N_0/N_m) e^{-k\epsilon_x^p}] \quad (2.6)$$

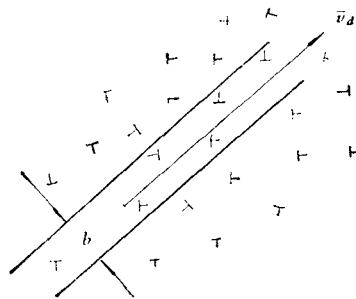


图 2 位错的运动

这一位错增殖公式和 Gilman^[6] 给出的公式略有不同, Gilman 的经验公式是

$$N = (N_0 + M^* \epsilon_x^p) e^{-H \epsilon_x^p / \sigma_x} \quad (2.7)$$

其中 H 是位错增殖的硬化常数, 但对微小应变而言, 取一级近似时(2.6)和(2.7)给出同样的表示式:

$$N = N_0(1 + M \epsilon_x^p) \quad (2.8)$$

其中:

$$M = \begin{cases} k \left(\frac{N_m}{N_0} - 1 \right) & \text{由 (2.6) 式} \\ M^* / N_0 & \text{由 (2.7) 式} \end{cases}$$

M 表示线性增殖系数, (2.8) 表示位错密度线性依赖于 ϵ_x^p . 这和 Döner 等人^[11] 的实验观察相符合的.

下面我们讨论位错的运动性态和它的平均速度 \bar{v}_d . 对不同的应力幅值, 提出了控制位错运动的不同机制. 如在 Clifton 的文章中已详细讨论过. 位错的运动主要由两种不同的机制来控制, 当应力和应变率较低时, 热激活起主导作用; 当应力和应变率较高时, 线性和非线性阻尼机制起主导作用. 把这两种机制联立起来, Clifton^[8] 给出了关于平均速度 \bar{v}_d 和应力 σ_x 关系的详细描述. 但至今为止, 对强度高的合金结构钢而言, 尚未给出有用的试验数据, 因此, 我们只能依靠这样的一个实验事实: 在长杆冲击实验中, 存在一个临界冲击速度 v_{cr} , 低于 v_{cr} 冲击时, 则不发生塑性变形, 而且 v_{cr} 的值随 ϵ_x^p 的增加而增加, 于是我们可以假定 \bar{v}_d 是超应力 $(\sigma_x - \sigma_s)$ 和塑性应变 ϵ_x^p 的函数, 即有

$$\bar{v}_d = f(\sigma_x - \sigma_s, \epsilon_x^p)$$

将其展开成 Taylor 级数, 可得

$$\bar{v}_d = f((\sigma_x - \sigma_s), \epsilon_x^p) = \sum_{m,n} A_{mn} (\sigma_x - \sigma_s)^m (\epsilon_x^p)^n \quad (2.9)$$

其中 A_{mn} 是控制位错运动的阻尼系数, 显然有, $A_{00} = 0$, $A_{10} > 0$, $A_{01} \leq 0$. 若除 A_{10} 外所有系数均等于零, 则 (2.9) 给出了由 Greenman^[12] 的线性粘性阻尼模型. 将 (2.9) 和 (2.6) 代入 (2.1), 可得到塑性松弛函数的一般形式

$$\dot{\epsilon}_x^p = g(\sigma_x, \epsilon_x) = K_0 \left[1 - \left(1 - \frac{N_0}{N_m} \right) e^{-k \epsilon_x^p} \right] \sum_{m,n} A'_{mn} \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s} - 1 \right)^m (\epsilon_x^p)^n \quad (2.10)$$

其中 $K_0 = \frac{4}{3} \phi b N_m A_{10} \cdot \sigma_s$ 为一具有应变率量纲的特性松弛常数, $A'_{mn} = A_{mn} / A_{10}$ 为无量纲阻尼系数. 若在 (2.6) 和 (2.9) 中都取一级近似, 则 (2.10) 可化为:

$$\dot{\epsilon}_x^p = K [1 + M \epsilon_x^p] \left[\frac{\sigma_x}{\sigma_s} - 1 - H \epsilon_x^p \right] \quad (2.11a)$$

或者:

$$\dot{\epsilon}_x = \frac{1}{E} \dot{\sigma}_x + K (1 + M \epsilon_x^p) \left(\frac{\sigma_x}{\sigma_s} - 1 - H \epsilon_x^p \right) \quad (2.11b)$$

其中 $K = \frac{N_0}{N_m} \cdot K_0$ 以及 M 和 H 是控制宏观塑性流动的三个微观参数, 按 (1.24), 将 (2.11b) 无量纲化后可得:

$$\frac{\partial \bar{\varepsilon}_x}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial \bar{\sigma}_x}{\partial \bar{t}} + \bar{K}(1 + \bar{M}\bar{\varepsilon}_x^p)(\bar{\sigma}_x - 1 - \bar{H}\bar{\varepsilon}_x^p) \quad (2.11c)$$

其中无量纲参数 $\bar{K} = aK/v_s$, $\bar{M} = M\varepsilon_s$, $\bar{H} = H\varepsilon_s$, 必须适当地选择, 以使得数值结果与实验结果相吻合. 显然, 在我们的问题中, 有两个特征时间: τ_1 和 τ_2 , 其中 $\tau_1 = a_2/c_2$, 是由圆柱杆的半径决定, τ_2 为塑性流的特征松弛时间, 无量纲参数 \bar{K} 就是 τ_1 与 τ_2 之比, 即

$$\bar{K} = \tau_1/\tau_2 = \left(\frac{3}{4} \phi a_2 / \frac{1}{bN_0} \right) \cdot \frac{v_d^*}{v_s} \quad (2.12)$$

其中 a_2 是试件半径, v_d^* 是位错的某一特征速度, 它表示当作用应力 σ_x 达到 σ_s 的二倍时的位错平均速度. 事实上, 常数 \bar{K} 在控制塑性流方面起主要作用. 以 Armco 铁为例, 按照 Curran^[13] 给出的数据, 我们有

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_d^*}{v_s} &\sim \frac{b\rho_2 c_2}{B_d} \\ b &= 2.5 \times 10^{-8} \text{cm}^2, N_0 = 2 \times 10^8 \text{cm}^{-2} \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

其中 $\rho_2 c_2$ 是子弹的弹性声阻抗, B_d 是粘性阻尼系数, 近似等于 0.1 (达因·秒/厘米²). 由(3.13)和(3.14)知, 当 $a_2 = 0.75 \text{cm}$, $\rho = 7.8 \text{g/cm}^3$, $c = 5.0 \times 10^3 \text{m/s}$ 时, \bar{K} 值近似等于 2.80. 类似地, 根据 Jones 和 Mote^[14] 关于单晶铜的数据: $B_d = 7 \times 10^{-7} (\text{kbar}\cdot\mu\text{s})$, $\rho = 8.9 \text{g/cm}^3$, $c = 3.9 \times 10^3 \text{m/s}$, 则单晶铜的 \bar{K} 值为 1.58.

三、实验与数值分析结果的比较

前面我们已经导出了控制弹性导杆, 子弹和试件的波传播的基本方程, 它们是以无量纲形式给出的.

对于弹性杆(子弹和波导杆), 有如下方程组: (为简便起见, 已将表示无量纲化的符号“—”去掉了):

$$\left\{ \begin{aligned} \rho_1 \frac{\partial v_{x1}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial x} &= \frac{1}{2} \rho_1 v_1^2 \frac{\partial^3 v_{x1}}{\partial t \partial x^2} & 0 \leq x \leq l_p + l_g & (3.1a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{x1}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{x1}}{\partial t} &= 0 & 0 \leq x \leq l_p + l_g & (3.1b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{x1}}{\partial t} &= E_1 \frac{\partial \sigma_{x1}}{\partial t} & 0 \leq x \leq l_p + l_g & (3.1c) \end{aligned} \right.$$

这里下标 1 对应于弹性杆, ρ_1 是弹性导杆与试件的密度之比, 即 $\rho_1 = \rho_*/\rho_{st}$, 而 $l_p = l_p/a$, $l_g = l_g/a$ 各自为子弹与导杆的无量纲长度. 参见图 11.

对于塑性试件, 控制方程组如下(同样已把表示无量纲化的符号“—”去掉了):

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{x2}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{x2}}{\partial x} &= \frac{1}{2} v_2^2 \frac{\partial^3 v_{x2}}{\partial t \partial x^2} & (3.2a) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial v_{x2}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{x2}}{\partial t} &= 0 & (3.2b) \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{x2}}{\partial t} &= \frac{\partial \sigma_{x2}}{\partial t} + K(1 + M\varepsilon_{x2}^p)(\sigma_{x2} - 1 - H\varepsilon_{x2}^p) & (3.2c) \end{aligned} \right.$$

其中下标 2 对应于塑性试件, 若导杆和试件杆的半径均为 a , 为了联立求解 (3.1a~c) 和 (3.2a~c) 须给出初始条件和边界条件, 即有

初始条件:

$$v_x = \begin{cases} v_p & t = 0, 0 \leq x \leq l_p \\ 0 & t = 0, l_p \leq x \leq l_p + l_g \end{cases} \quad (3.3a)$$

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} = \varepsilon_{x1} = \varepsilon_{x2} = 0 \quad t = 0, 0 \leq x \leq l_p + l_g + l_s \quad (3.3b)$$

边界条件:

$$\sigma_{x1} = \sigma_{x2} \quad v_{x1} = v_{x2} \quad x = l_p + l_g \quad (3.3c)$$

$$\sigma_{x1} = 0 \quad x = 0 \quad (3.3d)$$

$$\sigma_{x2} = 0 \quad x = l_p + l_g + l_s \quad (3.3e)$$

为了验证本文给出的本构方程(2.11b)能否应用于描述高强度合金钢的动力学性质,文献[15]给出了有关的理论分析和振动解法,这里我们求解上述方程组,而且要合理选择物理参数 K, M, H 之值,以能使计算结果与实验波形相符合。

在低应变率下 ($\dot{\varepsilon} < 2 \times 10^{-4} \text{s}^{-1}$) 对这种低合金结构钢的简单拉伸试验在 Instron 试验机上进行的,其静态应力应变曲线见图 3,可较合理地用四段线性硬化曲线表示,即有

$$\sigma_x = \sigma_i + H_i(\varepsilon_x - \varepsilon_i), \quad \varepsilon_{i-1} \leq \varepsilon_x \leq \varepsilon_i, (i = 1, 2, 3, 4) \quad (3.4)$$

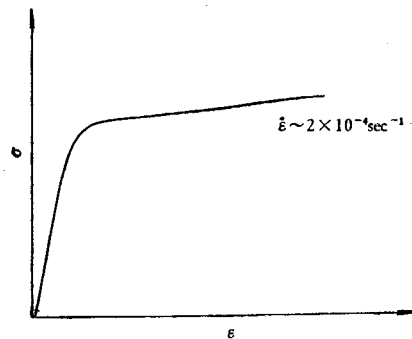


图 3 低合金结构钢静态拉伸应力-应变曲线

试件和导杆的材料常数以及试件的硬化模数 $H_i, \sigma_i, \varepsilon_i$ 分别由实验给出.在我们的动力学性质实验中沿试件不同截面得到的应变-时间波形的典型记录见照片 1(图版 I).在不同的冲击速度下,这种低合金结构钢塑性纵波无量纲应变-时间波形的实验结果与理论模型计算结果的比较,如图 4—图 8 所示.从实验获得的波形表明,弹性前驱波的幅值随传播

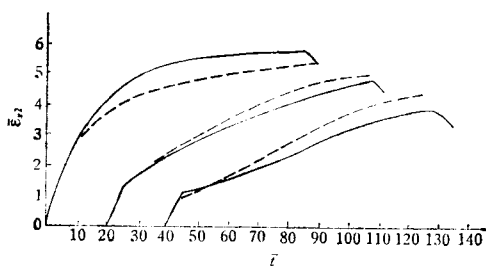


图 4
 $\bar{v}_p = 2.60$ ——实验 ----计算

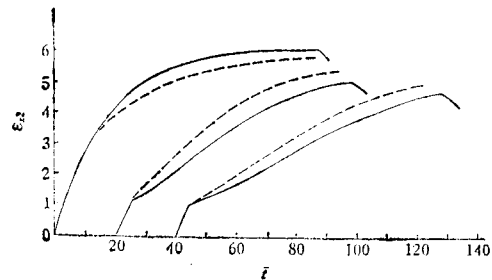


图 5
 $\bar{v}_p = 2.70$ ——实验 ----计算

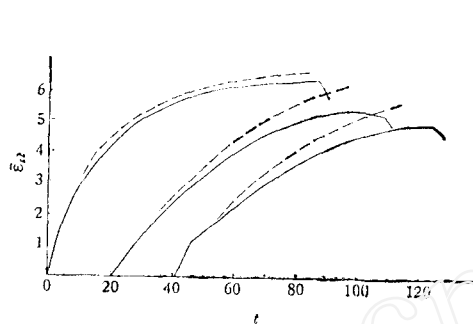


图 6

$\bar{v}_p = 2.30$ ——实验 ----计算

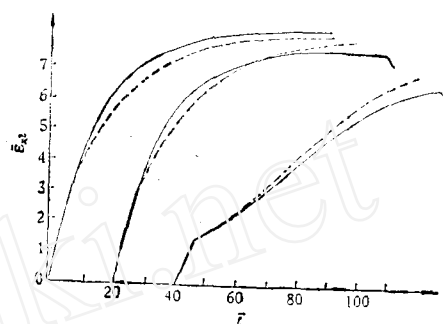


图 7

$\bar{v}_p = 3.00$ ——实验 ----计算

距离而下降, 而且不存在像应变率无关理论那样预示的所谓残余应变平台。实验中试件的典型残余应变沿试件杆长的分布曲线如图 9 所示。

在数值求解方程组 (3.1a-c) 和 (3.2a-c), 并将计算结果与实验波形比较, 我们采用了加可变阶因子的正方形网格法^[1], 如图 10 所示。从时刻 $t - \Delta t$ 的解去计算时刻 t 的解。方程组 (3.1a-c) 和 (3.2a-c) 可以表示成如下统一形式的差分方程 (为书写简便起见, 已把 σ_x 和 v_x 的下标 x 删去了):

$$\begin{aligned} & \rho_i \frac{v_k^{n+1} - v_k^n}{\Delta t} + \frac{\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta x} \\ &= \frac{\beta_i}{\Delta t \cdot (\Delta x)^2} \cdot \left[(v_{k+1}^{n+1} - 2v_k^{n+1} + v_{k-1}^{n+1}) - (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) \right] \\ &+ \frac{\sqrt{E_i}}{2\Delta x} (v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n) \cdot S \end{aligned} \quad (3.5a)$$

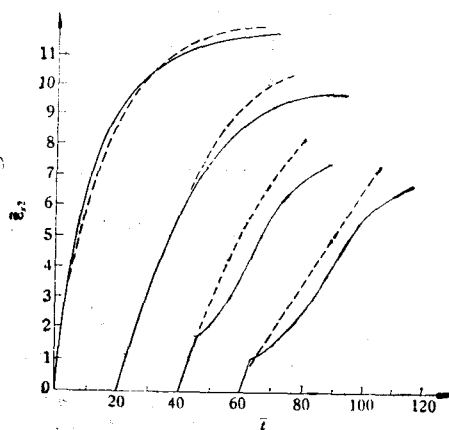


图 8

$\bar{v}_p = 3.51$ ——实验 ----计算

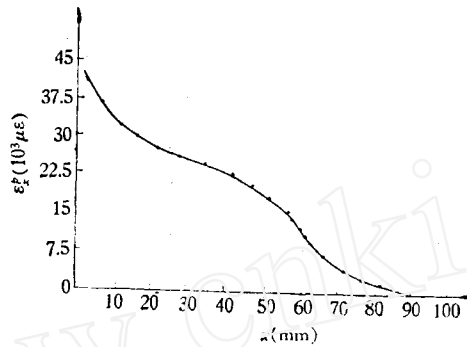


图9 残余变形随杆长的分布曲线冲击速度
 $v_p = 3.51$ (无量纲)实验测量点

$$\frac{\varepsilon_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - \varepsilon_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^n}{\Delta x} = \frac{\sqrt{E_i}}{2\Delta x} (\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot R \quad (3.5b)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{E_i} \frac{\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t} + \frac{v_{k+1}^{n+1} - v_k^n}{\Delta x} + g_i \left(\frac{\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}} + \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2}, \frac{\varepsilon_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{3}{2}} + \varepsilon_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \\ & = \frac{1}{2\Delta x} (\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) \cdot R \quad (3.5c) \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \rho_i &= \begin{cases} \rho_1/\rho_2 & i=1 \text{ (对应于弹性杆)} \\ 1 & i=2 \text{ (对应于塑性杆)} \end{cases} \\ \beta_i &= \begin{cases} 0.042 & i=1 \text{ (对应于弹性杆)} \\ 0.0125 & i=2 \text{ (对应于塑性杆)} \end{cases} \\ E_i &= \begin{cases} E_1/E_2 & i=1 \text{ (对应于弹性杆)} \\ 1 & i=2 \text{ (对应于塑性杆)} \end{cases} \\ g_i &= \begin{cases} 0 & i=1 \text{ (对应于弹性杆)} \\ K(1 + M\varepsilon^p)(\sigma - 1 - H\varepsilon^p) & i=2 \text{ (对应于塑性杆)} \end{cases} \end{aligned}$$

Δt 和 Δx 分别表示无量纲的时间和空间步长, 应力和应变取在半步长位置上, 可变阶因子 S 和 R 取如下形式:

$$S = \left(\frac{|v_{k+1}^n - 2v_k^n + v_{k-1}^n|}{|v_{k+1}^n - v_k^n| + |v_k^n - v_{k-1}^n| + \delta} \right)^3 \quad (3.6a)$$

$$R = \left(\frac{|\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - 2\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} + \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}|}{|\sigma_{k+\frac{3}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + |\sigma_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - \sigma_{k-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}| + \delta} \right)^3 \quad (3.6b)$$

这里 δ 是一个很小的正数, 问题的初始条件, 边界条件可由下列差分格式代替

$$v_k^0 = \begin{cases} v_p & k = 0, 1, 2, \dots, J-1 \\ 0 & k = J, J+1, \dots, M, M+1, \dots, N, N+1 \end{cases} \quad (3.7)$$

$$\sigma_k^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_k^{\frac{1}{2}} = 0 \quad k = 0, 1, 2, \dots, N+1. \quad (3.8)$$

$$\varepsilon_{N+1}^{n+\frac{1}{2}} = \sigma_{N+1}^{n+\frac{1}{2}} = 0, \quad v_0^n = v_1^n, \quad v_{N+1}^n = v_N^n \quad (3.9)$$

这里, 子弹和导杆各自分成 $(J+1)$ 和 $(M-J-1)$ 个空间格子, 试件分成 $(N-M)$ 个空间格子. 用三对角追赶法可从 $t = n \cdot \Delta t$ 时刻的速度 v_k^n 求得差分方程(3.5a—c)中速度在 $t = (n+1)\Delta t$ 时刻的解 v_k^{n+1} , 将 v_k^{n+1} 代入(3.5b), 并利用应力 $\sigma_k^{n+\frac{1}{2}}$ 和应变 $\varepsilon_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ 可求得在 $t = (n+3/2) \cdot \Delta t$ 时刻的应力和应变 $\sigma_k^{n+\frac{3}{2}}, \varepsilon_{k+\frac{1}{2}}^{n+\frac{3}{2}}$, 为了保证有足够的精度, 在求得应力后, 还需利用方程(3.5c)再迭代一次. 由于网格点较正规, 初边条件(3.7)—(3.9)十分简洁, 计算能达到足够的精度和速度. 取 $\Delta t = 0.10, \Delta x = 0.20$, 把差分解与精确解对比, 平均最大误差不超过 1%, 如表 3 所示, 这就证明该方法有足够的精度.

数值结果与试验获得的应变-时间波形, 对应于 5 种不同的冲击速度(无量纲) \bar{v}_p 分别为 3.51, 3.00, 2.80, 2.70, 和 2.60 的比较分别在图 4—图 8 中给出, 这里物理参数取为 $K = 2.50, H = 0.013, M = 0.05$ (无量纲). 由图可见, 尽管实测得到的应变波形与计算得到的结果尚有一些偏差, 但它们之间还是符合得较好的. 对于靠近试件端部的波形, 两者结果的最大相对误差为 10—15%. 究其原因, 主要有两方面: 一是用线性阻尼模型描述位错运动的速度带来的误差, 在实际的晶体中, 位错阻尼更大些; 二是实验中使用的箔式应变片的动态灵敏度系数有一定的分散性, 尤其在动态大塑性变形下. 应当指出, 物理参数 $K = 2.50$ 很接近于前节中对 Armco 铁估算得到的值 2.80; M 的确定可通过微观的方法得到, 如文献[12]中已给出的; 硬化指数 H 的值 0.013 也接近于实验给出的数据的平均值 0.016. 这就表明, 对这种低合金结构钢, 其本构方程中的微观参数 K, M 和 H 的确定具有一定的物理依据. 该本构模型能否推广到别的合金和金属材料中去尚需作进一步的实验证明.

本课题由工业部门提出, 在郑哲敏教授的关心和指导下于 1980 年 8 月完成. 实验

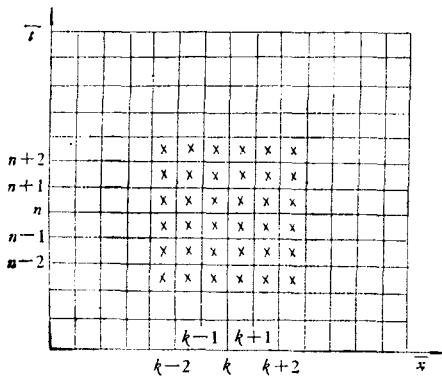


图 10 在计算中使用的差分格式示意图

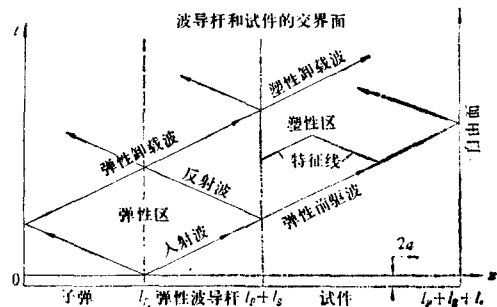


图 11 波在弹性杆和在试件中以及特征线上传播的示意图

过程中吕德业等同志曾给予宝贵的支持和协助并提供实验所需的试件, 实验过程中 52 所给予宝贵的支持和协助。赵双禄和杨业敏等同志帮助解决了实验中遇到的一些测试技术问题。报告中的数值方法取自王厘尔等同志的结果。在此, 对他们的指导和帮助表示衷心感谢。

图 4—图 8 是在不同的撞击速度下, 低合金结构钢纵波无量纲应变-时间波形的实验结果和理论模型计算结果的比较。

表 3 差分解和精确解的比较

应力	时间 解	$\bar{t}=5$		$\bar{t}=10$		$\bar{t}=15$		$\bar{t}=20$		平均误差
		精确解	差分解	精确解	差分解	精确解	差分解	精确解	差分解	
$\bar{\sigma}_{x_1} \bar{x} = 1_1$		1.4766	1.4707	1.3474	1.3455	1.2409	1.2835	1.2233	1.2461	1.4%
$\bar{\sigma}_{x_2} \bar{x} = 1_1 + 2$		1.3426	1.3264	1.2897	1.2833	1.2526	1.2501	1.2264	1.2236	0.56%
$\bar{\sigma}_{x_2} \bar{x} = 1_1 + 4$		1.1620	1.1672	1.1998	1.1910	1.1965	1.1915	1.1871	1.1838	0.80%
$\bar{\sigma}_{x_2} \bar{x} = 1_1 + 6$		0.0000	0.0271	1.1090	1.1011	1.1331	1.1331	1.1399	1.1358	0.46%

参 考 文 献

- [1] 段祝平, 孙琦清, 王厘尔, 一维粘塑性波的数值分析及其在材料动力学性能研究中的应用, 力学进展, 2(1980), 10.
- [2] 段祝平等, 高应变率下金属动力学性能的实验与理论研究——一维杆的实验方法及其应用, 力学进展, 10(1980), 1-16.
- [3] Love, A. E. H., *The Mathematical Theory of Elasticity*, University Press Cambridge (1927).
- [4] Taylor, J. W., *Dislocation Dynamics and Dynamic Yielding*, *J. Appl. Phys.*, 36(1965), 3146.
- [5] Gilman, J. J., *J. Appl. Phys.*, 36(1972), 3195.
- [6] Gilman, J. J., *Dislocation Dynamics and the Response of Materials to Impact*, *Appl. Mech. Rev.*, 21(August 1968), 767.
- [7] Johnson, J. N. and Barker, L. M., *Dislocation Dynamics and Steady Wave Profiles in 6061-T6 Aluminum*, *J. Appl. Phys.* 40(1969), 4321.
- [8] Clifton, R. C., *On the Analysis of Elastic/Visco-plastic Waves of Finite Uniaxial Strain*, after "Shock Waves and the Mechanical properties of Solids", Ed. by J. J. Burke. Volker Weiss (1971).
- [9] Hsu, J. C. C. and Clifton, R. C., *Plastic Waves in a Rate Sensitive Material-1, Waves of Uniaxial stress*, *J. Mech. Phys. Solids.*, 22(1974), 233.
- [10] Gilman, J. J., *J. Appl. Phys.*, 36(1968), 2772.
- [11] Döner, M., Chang, H. and Conrad, H., *J. Mech. Phys. Solids.*, 22(1974), 555.
- [12] Greenman, W. T., Vreeland J. Jr. and Wood, D. S., *Dislocation Mobility in copper*, *J. Mech. Phys. Solids.*, 38(1967), 3595.
- [13] Curran, D. R., *Dynamic Mechanical Behaviour of Iron*, *Proceeding of the 17th Sagamore Army Materials Research Conference*, Ed. by J. J. Burke and Volker Weiss, (1971) 121.
- [14] Jones, O. E. and Mote, J. D., *Shock-induced dynamic yielding in copper single crystals*, *J. Appl. Phys.*, 40(1969), 4920.
- [15] 段祝平, 王厘尔, 摄动法在研究粘-弹性波中的应用, 力学学报, 4(1982).

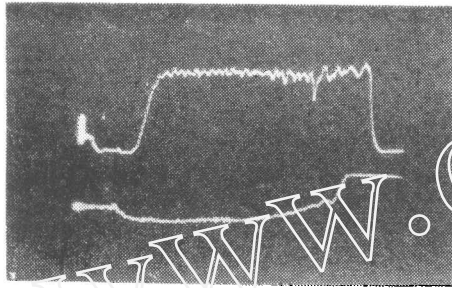
PLASTIC WAVE THEORY AND APPLICATION TO THE STUDY OF DYNAMIC PROPERTIES OF A LOW ALLOY STRUCTURE STEEL

Duan Zhuping, Sun Qiging, Tian Langiao

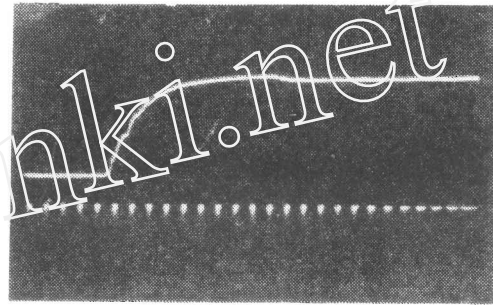
(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

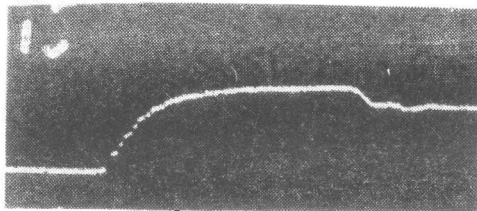
An experimental method of wave propagation is suggested to determine the dynamic properties of a low alloy structure steel. Based on Malvern's rate-dependent model, a theoretical background of plastic wave propagation is given in this paper, including an exact solution of elastic-plastic propagation in a thin bar of semi-infinite length and some discussion of the effect of transverse inertia. From the point of view of dynamic dislocation, a simple plastic strain-rate model is proposed to describe the dynamic properties of the structure steel. To compare the fundamental features of measured strain-time profiles with calculated results the authors have developed a numerical method for solving the quasi-linear equations containing a third order dispersion term. The proposed constitutive model has been shown to be adequate for the alloy steel.



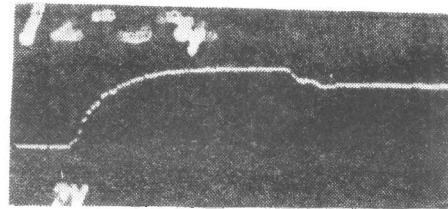
(a) 上面波形是试件上测得的塑性应变波形；下面波形是弹性导杆上测得的弹性应变波形



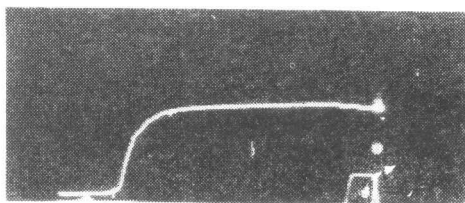
(b) 上面波形是试件上测得的塑性应变波形；下面是时标



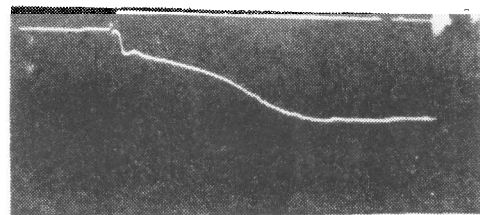
(c) 试件上测得的塑性应变波形



(d) 试件上所测的塑性应变波形



(e) 试件上测得的塑性应变波形



(f) 试件上测得的塑性应变波形

照片 1 在实验中记录的应变-时间波形