

# 无拓扑不变性的磁场平衡位形<sup>1)</sup>

胡文瑞

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文讨论缺乏拓扑不变性的磁流体静力学平衡位形。星体的磁场常常被看成是偶极场,若讨论对偶极场的偏离,则可证明,其磁流体静力学的解依赖于空间三维分布,因此缺乏拓扑不变性。宇宙磁场必然具有拓扑不变性这个结论是有条件地成立的,而不是普遍的。具体地,外加重力场和环向磁场分量是重要的调制因素,可使磁流体静力学的解缺乏拓扑不变性。

## 一、前言

磁场的静力学平衡位形可用来描述其位形变化的典型时间比过程的典型时间小许多的过程。这时,磁场与等离子体的热力学参数满足磁流体静力学的关系:

$$\frac{1}{4\pi}(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = \frac{1}{\rho} \nabla p + \mathbf{g} \quad (1.1)$$

其中  $\rho$  和  $p$  为等离子体的密度和压力,  $\mathbf{B}$  为磁场,  $\mathbf{g}$  为重力。为了数学的简便,人们总是在一维或二维近似下,求解方程 (1.1)。对于一种坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$ , 二维近似要求所有量只依赖于两个变量,比如可一般要求  $\partial/\partial x_2 = 0$ 。这样,磁场位形和等离子体的热力学量对于  $x_2$  是不变的。在直角坐标系中,磁场对于沿  $x_2$  方向的平移是不变的;在柱坐标和球坐标中,磁场可以对于转动是不变的;等等。这就是磁场位形的拓扑不变性。

有一种理论认为,只有存在拓扑不变性的宇宙磁场才能维持静力学的平衡位形;缺乏这种不变性,就没有平衡,磁场必然是处于活动和耗散的动力学过程<sup>[1,2,3]</sup>。这样,在自然界中缺乏拓扑不变性的磁场必须经过运动而耗散其能量,最后变为某种具有拓扑不变性的磁场而维持平衡位形。从数学上来讲,具有拓扑不变性的磁场是某种坐标系中的二维变化的位形。在论证上述结论时,(1.1)中的重力项被忽略了。然后,讨论在二维的具有拓扑不变性的磁场附近的扰动:

$$\mathbf{B}(x_1, x_2, x_3) = \mathbf{B}_0(x_1, x_3) + \sum_{n=1}^{\infty} \epsilon^n b_n(x_1, x_2, x_3) \quad (1.2)$$

其中  $\epsilon$  为一小量。在一些要求的条件下发现,  $b_n(x_1, x_2, x_3)$  亦必须与  $x_2$  无关。

仔细地分析上述论点会发现,平衡磁场必须具有拓扑不变性的结论并不是绝对的,我们可以讨论位势场,这时,(1.1)式的两端分别为零,而且左端的  $\nabla \times \mathbf{B} = 0$ 。引进磁标量势  $\varphi$ , 它满足方程

$$\Delta \varphi = 0 \quad (1.3)$$

本文于1983年2月21日收到

1) 今年十二月五日,郭永怀教授逝世15周年。作者谨以此文缅怀他生前的教诲和指导。

描写地球的外场时,(1.3)式的解可表示为

$$\varphi = R \sum_{n=m}^{\infty} \sum_{m=0}^n \left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} [g_n^m \cos(m\phi) + h_n^m \sin(m\phi)] P_n^m(\theta) \quad (1.4)$$

其中  $(r, \theta, \phi)$  为球坐标,  $P_n^m(\theta)$  为 Legendre 函数,  $R$  为地球半径,  $g_n^m$  和  $h_n^m$  为待定系数. 显然, 解式(1.4)可以没有任何拓扑不变性, 而相应的磁场又是平衡位形. 当(1.4)中的偶极项比其他各项都大得多时, 它就给出如(1.2)的解式, 其中  $b_n$  亦为三维分布. 另一方面, 自然界中的磁场位形往往缺乏不变性, 而且能长期地维持平衡. 比如, 太阳表面的局部黑子磁场位形一般是三维的, 其分部除了极向变化以外, 环向明亮交替的纤维表明了环向变化的存在. 我们曾经证明, 这种二维分布的极向变化场, 可以存在三维分布的偏离<sup>[4]</sup>. 从而表明, 磁场的平衡位形可以没有拓扑不变性.

应该指出, 三维分布(1.4)是一种势场, 它没有计入磁场与等离子体之间的耦合过程. 在这种情况下, (1.1)式右端为零的条件要求

$$\nabla p = -\rho g. \quad (1.5)$$

如果不考虑外加的重力场, 则压力分布到处均匀. 若讨论无限区域中的解, 则相当于真空中的磁场分布. 所以, 这个真空解只是一般磁流体静力学解的一个极端特例. 进一步研究磁场和等离子体耦合过程中上述结论的正确性, 就是很有意义的. 通常, 星体的磁场被看成是偶极场. 本文将讨论偶极场的偏离, 并证明这种偏离将依赖于  $(r, \theta, \phi)$  三个变量. 观测表明, 即使考虑到磁场和等离子体的耦合过程, 平衡位形也可以没有拓扑不变性, 如图 1 所示. 本文的结果与文 [4] 的结果分别研究了整体磁场和局部磁场的三维位形, 从两个方面论证了三维位形的存在性.

下一节中, 我们将推导基本方程组, 并用它来讨论对偶极场的偏离. 第三节具体地求解扰动偏离状态的分布. 第四节中, 讨论外加重力场对三维磁场分布的影响. 最后一节

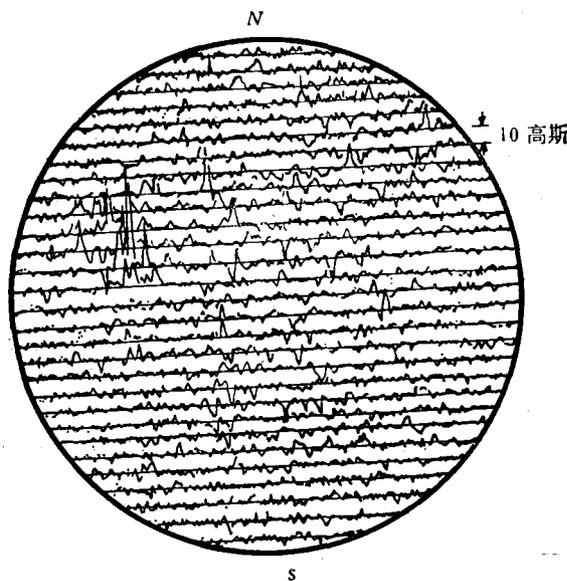


图 1 1965 年 2 月 8 日太阳普遍场观测图, 其中偏离偶极场的涨落清晰可见

是讨论和本文的主要结果.

## 二、扰动展开

磁流体静力学方程组除(1.1)式外, 还有

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (2.1)$$

$$p = \rho \kappa T \quad (2.2)$$

其中  $\kappa$  为气体常数,  $T$  为给定的等离子体温度. 在球坐标系  $(r, \theta, \varphi)$  中, 星体的重力为

$$-g = -g_{e_r} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{e}_r \quad (2.3)$$

其中  $G$  为普适重力常数,  $M$  为星体的质量.

用扰动方法分析对偶极场的偏离. 类似于(1.2), 我们记

$$\begin{cases} \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \mathbf{B}_0(r, \theta) + \varepsilon \mathbf{B}_1(r, \theta, \varphi) \\ p(\mathbf{r}) = p_0(r, \theta) + \varepsilon p_1(r, \theta, \varphi) \\ \rho(\mathbf{r}) = \rho_0(r, \theta) + \varepsilon \rho_1(r, \theta, \varphi) \\ T(\mathbf{r}) = T_0(r, \theta) + \varepsilon T_1(r, \theta, \varphi) \end{cases}$$

其中  $\varepsilon$  为一无量纲的小参数, 下标 0 和 1 分别对应于基态和扰动态. 对于磁偶极基态磁场, 可以有

$$\mathbf{B}_0(r, \theta) = \frac{\mu}{r^3} (2 \cos \theta, \sin \theta, 0), \quad (2.4)$$

其中磁矩  $\mu$  为常数. 由(2.1)式, 可以引入磁流函数  $\psi$ ,

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r}, 0 \right) \quad (2.5)$$

其中假设环向磁场分量为零, 而

$$\psi = \psi_0(r, \theta) + \varepsilon \psi_1(r, \theta, \varphi) \quad (2.6)$$

对于偶极场基态有

$$\psi_0(r, \theta) = \frac{\mu}{r} \sin^2 \theta \quad (2.7)$$

将展开式(2.3)和偶极场(2.4)代入基本方程组, 零阶关系简化为

$$\nabla p_0 = -\rho_0 g_{e_r} \quad (2.8)$$

$$p_0 = \rho_0 \kappa T_0 \quad (2.9)$$

对于给定的温度分布, 上述两式导出零阶压力分布为

$$p_0(r) = p_0(r_0) \exp \left[ - \int_{r_0}^r \frac{g}{\kappa T_0(r)} dr \right] \quad (2.10)$$

其中  $r_0$  为适当的典型长度, 比如星球的半径.

关系(2.10)表明, 热力学参数是球对称的, 并且满足重力平衡关系. 但是, 偶极磁场的位形是二维分布的. 当  $p_0(r) = 0$  时, 得到真空偶极场分布. 显然, 如果取基态如(1.4)所给定, 上述结论仍然成立. 这是特殊的情况.

将零阶解和展开式(2.3)代入基本方程组, 可以得到扰动方程组为

$$\rho_0 (\nabla \times \mathbf{B}_1) \times \mathbf{B}_0 = 4\pi (\nabla p_1 - \rho_1 g_{e_r}) \quad (2.11)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (2.12)$$

$$p_1 = \kappa(\rho_1 T_0 + \rho_0 T_1) \quad (2.13)$$

利用(2.5)和(2.6)引用磁势  $\psi_1$ , (2.11) 式化简为

$$\rho_0 B_{0\theta} \mathcal{L}(\psi_1) - 4\pi r \sin \theta \left( \frac{\partial p_1}{\partial r} + \rho_1 g \right) = 0 \quad (2.14)$$

$$\rho_0 B_{0r} \mathcal{L}(\psi_1) + 4\pi \sin \theta \frac{\partial p_1}{\partial \theta} = 0 \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( 4\pi p_1 + \frac{\rho_0 B_{0r}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} - \frac{\rho_0 B_{0\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_1}{\partial r} \right) = 0 \quad (2.16)$$

其中基态场  $B_{0r}$  和  $B_{0\theta}$  由(2.4)给出,而算符

$$\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\cot \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (2.17)$$

扰动方程(2.12)–(2.16)可用来求解  $\psi_1$ ,  $p_1$  和  $\rho_1$ . 方程(2.16)还可以写成

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ p_1 + \frac{\rho_0}{8\pi} (B_{0r} B_{1r} + B_{0\theta} B_{1\theta}) \right] = 0 \quad (2.18)$$

这表明,总的扰动压力与  $\varphi$  无关. 一种可能性是假设  $p_1$  和  $B_1$  都与  $\varphi$  无关,这时就不存在三维的偏离场,与文[1–3]的结论相同. 更一般地,条件(2.16)或(2.18)要求

$$4\pi p_1(r, \theta, \varphi) + \frac{\rho_0 B_{0r}}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \psi_1(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} - \frac{\rho_0 B_{0\theta}}{r \sin \theta} \frac{\partial \psi_1(r, \theta, \varphi)}{\partial r} = a(r, \theta) \quad (2.19)$$

其中  $a(r, \theta)$  为适当的任意函数. 这时,  $p_1$  和  $\psi_1$  都是三元函数. 将(2.19)式代入(2.15), 消去  $p_1$  后可以导出  $\psi_1$  的方程为

$$B_{0r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{2B_{0\theta}}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = - \frac{\sin \theta}{\rho_0} \frac{\partial a(r, \theta)}{\partial \theta} \quad (2.20)$$

方程(2.20)右端项只是  $(r, \theta)$  的函数,与  $\varphi$  无关. 对于  $\psi_1$  的线性方程(2.20), 可以将  $\psi_1$  的解分为轴对称与非轴对称两部份:  $\psi_1(r, \theta, \varphi) = \psi_{1a}(r, \theta) + \psi_{1b}(r, \theta, \varphi)$ , 其中  $\psi_{1a}$  满足方程(2.20), 而  $\psi_{1b}$  满足与(2.20)相应的齐次方程. 由于我们主要对非轴对称问题有兴趣,不妨一般性地取

$$\frac{\partial a(r, \theta)}{\partial \theta} = 0 \quad (2.21)$$

这时,方程(2.20)化为

$$B_{0r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{2B_{0\theta}}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0 \quad (2.22)$$

代入基态偶极场分布(2.4), 上式简化为

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r^2} + \frac{\tan \theta}{2r} \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial r \partial \theta} + \frac{\tan \theta}{r^2} \frac{\partial \psi_1}{\partial \theta} = 0 \quad (2.23)$$

(2.23) 式为函数  $\psi_1$  的双曲型方程,其中坐标参数  $\varphi$  隐含于其中. 该式给出扰动磁场的非轴对称分布.

### 三、扰动状态

求方程(2.23)的分离变量解:

$$\psi_1(r, \theta, \varphi) = R(r, \varphi)S(\theta, \varphi) \quad (3.1)$$

将(3.1)代入(2.23), 我们得到方程组

$$\frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{\beta_n^2}{2r} \frac{\partial R}{\partial r} + \frac{\beta_n^2}{r^2} R = 0 \quad (3.2)$$

和

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \beta_n^2 \cot \theta S \quad (3.3)$$

其中  $\beta_n$  为本征值, 可以是  $\varphi$  的函数. 不难求出方程(3.2)的解为

$$R(r, \varphi) = c_n r^{a_n} + d_n r^{b_n}, \quad (3.4)$$

其中  $c_n$  和  $d_n$  为  $\varphi$  的周期函数, 指数  $a_n$  和  $b_n$  为

$$a_n = \frac{1}{4} (2 - \beta_n^2 - \sqrt{\beta_n^4 - 20\beta_n^2 + 4}), \quad b_n = \frac{1}{4} (2 - \beta_n^2 + \sqrt{\beta_n^4 - 20\beta_n^2 + 4}). \quad (3.5)$$

(3.3) 式的解可以写为

$$S(\theta, \varphi) = S_0(\sin \theta) \beta_n^2, \quad (3.6)$$

上式右端  $S_0$  是一个  $\varphi$  的比例函数. (3.4) 和 (3.6) 导出

$$\psi_1(r, \theta, \varphi) = \sum_n (c_n r^{a_n} + d_n r^{b_n}) (\sin \theta)^{\beta_n^2}. \quad (3.7)$$

考虑到  $a_n$  和  $b_n$  可能是复数, 上式也可写为

$$\begin{aligned} \psi_1(r, \theta, \varphi) = & \sum_{r_n < 0} r^{-\frac{\beta_n^2 - 2}{4}} [c_n(\varphi) \sin(r_n r) + d_n(\varphi) \cos(r_n r)] (\sin \theta)^{\beta_n^2} \\ & + \sum_{r_n > 0} [c_n(\varphi) r^{a_n} + d_n(\varphi) r^{b_n}] (\sin \theta)^{\beta_n^2} \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中  $r_n = (\beta_n^4 - 20\beta_n^2 + 4)^{1/2}$ . 由定义(2.5), 扰动磁场为

$$B_{1r}(r, \theta, \varphi) = \sum_n \beta_n^2 (c_n r^{a_n - 2} + d_n r^{b_n - 2}) (\sin \theta)^{\beta_n^2 - 2} \cos \theta \quad (3.9)$$

$$B_{1\theta}(r, \theta, \varphi) = - \sum_n (a_n c_n r^{a_n - 2} + b_n d_n r^{b_n - 2}) (\sin \theta)^{\beta_n^2 - 1}. \quad (3.10)$$

极轴附近磁场有界的条件要求

$$\beta_n^2 \geq 2. \quad (3.11)$$

(3.5) 式就表明,  $a_n$  和  $b_n$  的实部皆为负数, 保证无穷远处无奇异性. 若磁场以  $r^{-2}$  衰减, 则  $\beta_n^2 = 2$ ; 若像偏极场一样以  $r^{-3}$  衰减, 则  $\beta_n^2 = 6$ .

利用上述结果, 可由(2.19)求出扰动压力为

$$\begin{aligned} p_1(r, \theta, \varphi) = & \frac{\rho_0 \mu}{4\pi r^5} \sum_n \{ [(a_n c_n + 2\beta_n^2 c_n) r^{a_n} + (b_n d_n + 2\beta_n^2 d_n) r^{b_n}] (\sin \theta)^{\beta_n^2} \\ & - 2\beta_n^2 (c_n r^{a_n} + d_n r^{b_n}) (\sin \theta)^{\beta_n^2 - 2} \} \end{aligned} \quad (3.12)$$

无穷远处  $p_1/\rho_0$  至少以  $r^{-5}$  衰减. 在(3.12)式中, 我们取任意函数  $a(r, \theta) = 0$ .

最后, 利用结果(3.8)和(3.12), 由关系式(2.14)可求出扰动密度的分布为

$$\begin{aligned} \rho_1(r, \theta, \varphi) = & \frac{\rho_0 \mu}{4\pi g r^6} \sum_n \{ - [(\beta_n^4 - \beta_n^2 + 2\beta_n^2 a_n + a_n) c_n r^{a_n} \\ & + (\beta_n^4 - \beta_n^2 + 2\beta_n^2 b_n + b_n) d_n r^{b_n}] \} (\sin \theta)^{\beta_n^2} \end{aligned}$$

$$+ \beta_n^2 [(\beta_n^2 + 2a_n - 2)c_n r^{a_n} + (\beta_n^2 + 2b_n - 2)d_n r^{b_n}] (\sin \theta)^{\beta_n^2 - 2} \quad (3.13)$$

正如(2.3)所示,星球的重力加速度  $g$  与  $r^{-2}$  成正比. 所以,远离星球处的扰动密度将至少与  $r^{-4}$  成比例地衰减到零. 进一步,(2.13)式给出

$$T_1 = \frac{p_1}{\kappa \rho_0} - \frac{\rho_1 T_0}{\rho_0} \quad (3.14)$$

将(3.12)和(3.13)给出的扰动压力和密度代入(3.14)中,就可求出扰动温度的分布.

这样就求出了扰动状态的全部解. 扰动解的存在表明,确实存在对于星体偶极磁场的偏离,这些偏离依赖于  $(r, \theta, \varphi)$  三个变量,因而是没有拓扑不变性的. 还可以看出,即使在星球表面  $r = r_0$  处. 磁场和热力学参数也随着球面的经度和纬度的不同而变化;然后,随着距星球的距离增大而趋于零. 在解的整个存在范围内,都没有那种拓扑不变性.

#### 四、重力场的影响

在前面的推导中,我们利用三个方程(2.14)–(2.16)去求解三个未知函数  $\rho_1, p_1, \phi_1$ . 扰动密度  $\rho_1$  是由扰动的引力而引入方程(2.14)中. 如果忽略扰动引力项,则方程组(2.14)–(2.16)只包含有两个未知函数,方程组是确定的,很难有自洽解. 这时,由(2.14)和(2.15)可确定  $p_1$  和  $\phi_1$ , 将这些解代入(2.16)式,则难于满足. 当然,如果  $p_1$  和  $\phi_1$  与  $\varphi$  无关,则(2.16)式自动满足,由(2.14)和(2.15)就唯一地确定了问题的解. 这种磁场位形就具有拓扑不变性. 这个结论对于可分离变量的解(3.1)也是很清楚的: 不计外加重力场相当于要求(3.13)式右端的求和项为零. 如果函数  $c_{1n}(\varphi)$  和  $c_{2n}(\varphi)$  非零,这个条件是不能满足的. 由此得到结论,对于轴对称基态,如果不计及外加重力和扭转磁场分量,其扰动偏离磁场具有拓扑不变性.

存在拓扑可变性的一个重要条件是外加的引力场. 当不计外加引力场时,由(2.14)和(2.15)可求出  $\phi_1$  和扰动压力  $p_1$ . 再利用状态方程(2.13)可以在给定  $T_1$  或  $\rho_1$  后,求另外一个扰动的热力学量. 但是,计及外加引力场以后,所有热力学量的扰动状态都完全确定了.

环向磁场分量是另外一个因素. 对于像偶极场这样的基态场,环向磁场分量为零,即

$$\mathbf{B}_0(r, \theta) = (B_{0r}, B_{0\theta}, 0) \quad (4.1)$$

如果讨论一般的扰动磁场为

$$\mathbf{B}_1(r, \theta, \varphi) = (B_{1r}, B_{1\theta}, B_{1\varphi}) \quad (4.2)$$

则(2.14)–(2.16)相应地变为

$$\rho_0 B_{0\theta} \left( \frac{\partial r B_{1\theta}}{\partial r} - \frac{\partial B_{1r}}{\partial \theta} \right) = -4\pi r \left( \frac{\partial p_1}{\partial r} + \rho_1 g \right) \quad (4.3)$$

$$\rho_0 B_{0r} \left( \frac{\partial r B_{1\theta}}{\partial r} - \frac{\partial B_{1r}}{\partial \theta} \right) = 4\pi \frac{\partial p_1}{\partial \theta} \quad (4.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial \varphi} [4\pi p_1 + \rho_0 B_{0\theta} B_{1\theta} + \rho_0 B_{0r} B_{1r}] = \rho_0 B_{0\theta} \frac{\partial B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial \theta} + \rho_0 B_{0r} \sin \theta \frac{\partial r B_{1\varphi}}{\partial r} \quad (4.5)$$

(4.5)式还可以改写为

$$4\pi \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} = \rho_0 B_{0\theta} \left( \frac{\partial B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial \theta} - \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \rho} \right) + \rho_0 B_{0r} \left( \frac{\partial r B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial r} - \frac{\partial B_{1r}}{\partial \varphi} \right) \quad (4.6)$$

即使扰动重力场不存在,由(4.3)–(4.5)和磁场无源条件

$$\nabla \cdot \mathbf{B}_1 = 0 \quad (4.7)$$

就可以求出  $p_1$ ,  $B_{1r}$ ,  $B_{1\theta}$  和  $B_{1\varphi}$ , 而这些扰动量都是  $(r, \theta, \varphi)$  的三元函数. 作为一个特例,假设

$$\frac{\partial p_1}{\partial \theta} = 0 \quad (4.8)$$

对于  $B_{0r} \approx 0$  就有

$$\frac{\partial p_1(r, \varphi)}{\partial r} = -\rho_1(r, \varphi)g \quad (4.9)$$

则(4.9)和(4.4)导出

$$\frac{\partial r B_{1\theta}}{\partial r} = \frac{\partial B_{1r}}{\partial \theta} \quad (4.10)$$

由(4.10)可以定义势函数  $\chi(r, \theta, \varphi)$  为

$$B_{1r} = \frac{\partial \chi}{\partial r} \quad B_{1\theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (4.11)$$

利用这个定义,无源条件(4.7)化为

$$\frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial \chi}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial B_{1\varphi}}{\partial \varphi} = 0 \quad (4.12)$$

而方程(4.6)化为

$$\rho_0 \left( B_{0r} \frac{\partial r B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial r} + B_{0\theta} \frac{\partial B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial \theta} - B_{0r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial r \partial \varphi} - \frac{B_{0\theta}}{r} \frac{\partial^2 \chi}{\partial \theta \partial \varphi} \right) = 4\pi \frac{\partial p_1}{\partial \varphi} \quad (4.13)$$

对于已知的  $p_1(r, \varphi)$ ,由(4.12)和(4.13)可求出函数  $B_{1\varphi}$  和  $\chi$ . 显然,如果要求(4.6)右端两个括号为零:

$$\frac{\partial B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial \theta} = \frac{\partial B_{1\theta}}{\partial \varphi} \quad \frac{\partial r B_{1\varphi} \sin \theta}{\partial r} = \frac{\partial B_{1r}}{\partial \varphi} \quad (4.14)$$

则关系式(4.14)和(4.11)一起就给出真空中的位势场分布(1.4),其中的总和磁场可以再包含一个轴对称的基态磁场(4.1). 所以,即使不计外加引力场,磁场位形也可以是三维分布的,从而没有拓扑不变性.

## 五、讨论

宇宙磁场具有多种多样的平衡位形,它们是由于电流分布产生的. 在天体物理环境中,电流分布往往具有复杂的形态,所以宇宙磁场也有复杂的位形. 可以预计,没有拓扑不变性的宇宙磁场将会是一种宇宙中客观存在的形态. 本文具体地分析了轴对称偶极场的非轴对称偏离,并且证明了偏离的扰动磁场存在着三维空间变化的位形. 这个实例表明,宇宙磁场可以是没有拓扑不变性的. 从物理上来讲,星体的偶极场是由星体内部的电流体系确定的. 如果星体内部的电流分布缺乏对称性,那么星体外部的磁场就没有拓扑不变性. 内部电流体系的非对称偏离就产生外部场的非对称偏离. 由此就解释了星球的三维势场分布. 当然,在星球外部的等离子体中也会感应电流体系,它也可以是三维空

间变化的。本文的结果还表明,在某些条件时,外加重力场是使磁场没有拓扑不变性的重要条件,但并非必要的。即使没有重力场,偏离的磁场位形也可以没有拓扑不变性。在数学处理上,人们可以作三维简化模型,从而得到一些解。有关宇宙磁场必须有拓扑不变性的论证(例如文献[3]),实际上是在一些数学简化下推导的,因而是有条件地成立的,而不是绝对的。

偶极磁场或者位势场被广泛地用来描述星体的磁场。比如太阳的大尺度磁场就常常被看成是偶极场。事实上,在太阳大气中,太阳磁场必然会与等离子体状态互相关联。考虑到这种耦合关系,本文得到了具有三维空间变化的偏离。将这个结果利用到太阳大尺度磁场的观测,则磁象仪的等值线在日面将有随经度和纬度的变化。观测上确实发现了这种变化<sup>[5]</sup>。当然,本文所分析的是小扰动的结果,而实际的变化往往是大偏离。对于这种情况,就需要研究非线性的三维磁场位形<sup>[4]</sup>。这些结论不仅对于讨论太阳表面的大尺度磁场位形是重要的,而且对于研究行星际磁场的大尺度结构也是很重要的。还值得进一步地研究。

### 参 考 文 献

- [1] Parker, E. N., *Astrophys. J.*, 174(1972) 499.
- [2] Yu, G., *Astrophys. J.*, 181(1973) 1003.
- [3] Parker, E. N., *Cosmical Magnetic Fields*, (1979), Ch. 14 Clarendon Press.
- [4] Hu, W. R. et al., *Solar Physics* (1982), 付印.
- [5] Svalgaard, L., Wilcox, J. M., *Ann. Rev. Astron. Astrophys.*, 16(1978), 429.
- [6] Hu, W. R., *Astrophys. & Space Science*, 80(1983).

## THE EQUILIBRIUM CONFIGURATIONS OF MAGNETIC FIELD WITHOUT TOPOLOGICAL INVARIANCE

Hu Wenrui

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

In the present paper, we discuss the magnetostatic equilibrium of the magnetic field without topological invariance. Stellar magnetic field are often described as dipole field. We analyze the state which deviates from the dipole field, and prove that the magnetostatic solutions depend on three space variables, therefore, the equilibrium in field topologies lacks invariance. Some theoretical ideas show that the cosmical magnetic field must has topological invariance if it is equilibrium. However, this conclusion is valid only in the cases satisfying certain conditions, but is not generally true. The applied gravity and the azimuthal component of magnetic field are important factors which lead to the magnetostatic solution lacking topological invariance.