

# 两个界面孤立波之间的迎撞<sup>1)</sup>

戴世强

(中国科学院力学研究所)

**摘要** 本文以作者在文[1]中所建立的基本方程为出发点,采用 Poincaré-Lighthill-郭永怀方法和约化摄动法,考察了两个界面孤立波之间的迎撞的三阶近似解,求出了碰撞时的最大波幅和碰撞后的非均匀相移,发现在相互作用之后,向上凸的界面孤立波相对于传播方向向后倾斜,而向下凹的界面孤立波则向前倾斜。

## 一、引言

孤立波的相互作用在理论上和工程实践中是一个令人感兴趣的课题<sup>[2]</sup>。Miles<sup>[3]</sup>详细地研究了单层流体表面孤立波的斜相互作用,用多重尺度法求得了二阶近似解;苏兆星和Mirie<sup>[4]</sup>发展了 Oikawa 和 Yajima<sup>[5]</sup>的方法,求得了单层流体中两迎撞孤立波的三阶近似结果,继而通过数值计算证实了结果的正确性<sup>[6]</sup>。

本文考虑文[1]中研究的二流体系统,即在两水平固壁间的两层静稳定分层的、不可溶混的不可压无粘流体,仅考虑无穷远处静止的二维无旋流动。我们以文[1]中所建立的基本方程为基础,采用 PLK 方法<sup>[7]</sup>和约化摄动法<sup>[8]</sup>相结合的形式,求得了两界面孤立波之间迎撞问题的三阶近似解,给出了碰撞时的最大波幅和碰撞后的非均匀相移及波形变化,并指出:迎撞之后的上凸孤立波相对于传播方向后倾,而下凹孤立波则前倾。

验证表明,只要取本文中的上层流体密度为零(即  $\sigma = 0$ ),就可推得文献[3]、[4]中的相应结果。

## 二、基本方程和摄动展开

我们考虑文[1]中提出的模型,假设上下两层流体的密度比为  $\sigma$  ( $\sigma < 1$ )、深度比为  $r$ ,忽略表面张力效应 ( $T = 0$ ),把水平的  $ox$  轴取在未扰界面上。用特征长度——下层流体深度  $h_1$ 、特征速度  $\sqrt{gh_1}$  ( $g$  为重力加速度)和特征时间  $\sqrt{h_1/g}$  把各量无量纲化,令  $\zeta = \zeta(x, t)$  为扰动后的界面升高,  $w(x, t)$  和  $W(x, t)$  分别为沿上下固壁的水平速度,则有基本方程<sup>[1]</sup>

$$\begin{cases} \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\zeta + 1)W + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\zeta + 1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n} W}{\partial x^{2n}} \right] = 0 \\ \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\zeta - r)w + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\zeta - r)^{2n}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n} w}{\partial x^{2n}} \right] = 0 \end{cases} \quad (2.1)$$

本文于 1983 年 2 月 25 日收到。

1) 谨以此文纪念导师郭永怀教授逝世十五周年。

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \zeta + \frac{1}{2} W^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\zeta+1)^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{\partial^{2n} W}{\partial t \partial x^{2n-1}} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \binom{2n}{m} \frac{\partial^m W}{\partial x^m} \frac{\partial^{2n-m} W}{\partial x^{2n-m}} \right) \right] \right\} - \sigma \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \zeta + \frac{1}{2} w^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\zeta-r)^{2n}}{(2n)!} \left( \frac{\partial^{2n} w}{\partial t \partial x^{2n-1}} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \binom{2n}{m} \frac{\partial^m w}{\partial x^m} \frac{\partial^{2n-m} w}{\partial x^{2n-m}} \right) \right] \right\} \\ & = 0 \end{aligned}$$

我们采用 Boussinesq 浅水波假定, 设波幅为  $A$ 、波长为  $\lambda$ , 引进小参数  $\varepsilon: 0 < \varepsilon = O(A/h_1) \ll 1$ , 并设  $\lambda/h_1 = O(\varepsilon^{-1/2})$ , 即设 Ursell 数  $U_r = A\lambda^2/h_1^3 = O(1)$ , 采用约化摄动法和 PLK 方法, 引进交换<sup>[4,8]</sup>

$$\begin{cases} \xi = \varepsilon^{1/2} k(x - c_R t) + \varepsilon k \theta(\xi, \eta) \\ \eta = \varepsilon^{1/2} l(x + c_L t) + \varepsilon l \varphi(\xi, \eta) \end{cases} \quad (2.2)$$

其中,  $c_R$  和  $c_L$  为右行波和左行波的波速,  $\theta$  和  $\varphi$  为待定的相移函数,  $k$  和  $l$  为待定常数. 与文[1]中一样, 引入列向量

$$U = \begin{pmatrix} \zeta \\ W \\ w \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

作如下的摄动展开:

$$\begin{cases} U = \varepsilon U_1 + \varepsilon^2 U_2 + \varepsilon^3 U_3 + \varepsilon^4 U_4 + \dots \\ \theta = \theta_0(\eta) + \varepsilon \theta_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \theta_2(\xi, \eta) + \dots \\ \varphi = \varphi_0(\xi) + \varepsilon \varphi_1(\xi, \eta) + \varepsilon^2 \varphi_2(\xi, \eta) + \dots \\ c_R = c(1 + \varepsilon a R_1 + \varepsilon^2 a^2 R_2 + \varepsilon^3 a^3 R_3 + \dots) \\ c_L = c(1 + \varepsilon b L_1 + \varepsilon^2 b^2 L_2 + \varepsilon^3 b^3 L_3 + \dots) \end{cases} \quad (2.4)$$

其中,  $c$  为文[1]中给出的界面上的线性重力波波速

$$c = \left( \frac{1 - \sigma}{1 + \frac{\sigma}{r}} \right)^{1/2} \quad (2.5)$$

$\varepsilon a$  和  $\varepsilon b$  为右行波和左行波的一阶波高,  $R_i$  和  $L_i (i = 1, 2, 3, \dots)$  为待定常数, 由下述可见, 它们在用 PLK 方法消除长期项时将起重要作用.

### 三、各阶摄动解

把(2.2)(2.4)代入基本方程(2.1), 采用约化摄动法的一般步骤, 可得各阶项的方程和相应的解. 求解过程简述如下:

#### 1. 一阶近似解

取到  $O(\varepsilon^{3/2})$ , 我们得到一阶近似方程

$$M_o k \frac{\partial U_1}{\partial \xi} + \tilde{M}_o l \frac{\partial U_1}{\partial \eta} = 0 \quad (3.1)$$

其中

$$M_o = \begin{pmatrix} -c & 1 & 0 \\ -c & 0 & -r \\ 1-\sigma & -c & -\sigma c \end{pmatrix}, \quad \tilde{M}_o = \begin{pmatrix} c & 1 & 0 \\ c & 0 & -r \\ 1-\sigma & c & \sigma c \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

这里只需要讨论准简单波<sup>[6]</sup>, 因而(3.1)有解

$$U_1 = a f_1(\xi) R + b g_1(\eta) \tilde{R} \quad (3.3)$$

其中, 列向量  $R$ 、 $\tilde{R}$  取为

$$R = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -\frac{c}{r} \end{pmatrix}, \quad \tilde{R} = \begin{pmatrix} 1 \\ -c \\ \frac{c}{r} \end{pmatrix}, \quad (M_o R = 0, \quad \tilde{M}_o \tilde{R} = 0) \quad (3.4)$$

在此, 顺便引进行向量  $L$  和  $\tilde{L}$ :

$$L = \left(1, \frac{\sigma}{r}, \frac{1}{c}\right), \quad \tilde{L} = \left(1, \frac{\sigma}{r}, -\frac{1}{c}\right), \quad (L M_o = 0, \quad \tilde{L} \tilde{M}_o = 0) \quad (3.5)$$

由(3.3)得到界面升高展开式的一阶项

$$\zeta_1 = a f_1(\xi) + b g_1(\eta) \quad (3.6)$$

待定函数  $f_1(\xi)$ ,  $g_1(\eta)$  在求下一阶近似解时确定.

## 2. 二阶解

由  $O(\varepsilon^{3/2})$  的方程得到

$$M_o k \frac{\partial U_2}{\partial \xi} + \tilde{M}_o l \frac{\partial U_2}{\partial \eta} + s_1 f_1 + s_2 f_1 f_1' + s_3 f_1''' + T_1 [\theta_0', g_1] f_1 + \hat{s}_1 g_1' + \hat{s}_2 g_1 g_1' + \hat{s}_3 g_1''' + \tilde{T}_1 [\varphi_0', f_1] g_1' = 0 \quad (3.7)$$

其中  $f_1$ ,  $g_1$ ,  $\theta_0$ ,  $\varphi_0$  上方的撇号表示对各自的自变量的导数, 而

$$s_1 = \begin{pmatrix} -R_1 a^2 k c \\ -R_1 a^2 k c \\ -R_1 a^2 k c^2 \left(1 + \frac{\sigma}{r}\right) \end{pmatrix}, \quad s_2 = \begin{pmatrix} 2a^2 k c \\ -2 \frac{1}{r} a^2 k c \\ a^2 k c^2 \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right) \end{pmatrix}, \quad s_3 = \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} a k^3 c \\ -\frac{1}{6} r^2 a k^3 c \\ \frac{1}{2} a k^3 c^2 (1 + \sigma r) \end{pmatrix} \quad (3.8)$$

$$T_1 = \begin{pmatrix} 2a k l c \theta_0' \\ 2a k l c \theta_0' \\ 2(1-\sigma) a k l \theta_0' - a b k c^2 \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right) g_1 \end{pmatrix}$$

$\hat{s}_1, \hat{s}_2, \hat{s}_3, \tilde{T}_1$  由(3.8)给出的各量中的  $R_1, a, b, k, l, c, \theta_0', g_1$  换成  $L_1, b, a, l, k, -c, \varphi_0', f_1$  后得到. 令

$$U_2 = F_2(\xi, \eta) R + G_2(\xi, \eta) \quad (3.9)$$

代入(3.7)后, 分别左乘以  $L$  和  $\tilde{L}$  就得到  $F_2$  和  $G_2$  所满足的方程,  $F_2$  的方程为

$$L \tilde{M}_o R l \frac{\partial F_2}{\partial \eta} + L s_1 f_1' + L s_2 f_1 f_1' + L s_3 f_1''' + L T_1 f_1' + L \hat{s}_1 g_1' + L \hat{s}_2 g_1 g_1' + L \hat{s}_3 g_1''' + L \tilde{T}_1 g_1' = 0 \quad (3.10)$$

式中

$$\begin{aligned}
 L\tilde{M}_0 R &= \frac{4(1-\sigma)}{c} \\
 Ls_1 &= -2R_1 a^2 k c \left(1 + \frac{\sigma}{r}\right), & L\tilde{s}_1 &= 0 \\
 Ls_2 &= 3a^2 k c \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right), & L\tilde{s}_2 &= -b^2 l c \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right) \\
 Ls_3 &= \frac{1}{2} a k^3 c (1 + \sigma r), & L\tilde{s}_3 &= \frac{2}{3} b l^3 c (1 + \sigma r) \\
 LT_1 &= \frac{4(1-\sigma)}{c} a k l \theta'_0 - a b k c \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right) g_1, & L\tilde{T}_1 &= -a b l c \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right) f_1
 \end{aligned} \quad (3.11)$$

$G_2$  的方程与(3.10)相类似.

为避免在  $F_2$  中出现长期项,须令

$$Ls_1 f_1 + Ls_2 f_1 f_1 + Ls_3 f_1'' = 0 \quad (3.12)$$

本文中假设  $1 - \frac{\sigma}{r^2} \neq 0$ , 亦即不讨论文[1]中所述的临界情形. 令

$$R_1 = \frac{1}{2} \frac{1 - \frac{\sigma}{r^2}}{1 + \frac{\sigma}{r}}, \quad k^2 = 3aq, \quad q = \frac{1 - \frac{\sigma}{r^2}}{1 + \sigma r} \quad (3.13)$$

利用(3.11),方程(3.12)化为

$$f_1 - 3f_1 f_1' - f_1'' = 0 \quad (3.14)$$

它有 KdV 孤立波解

$$f_1 = \sec h^2 \frac{\xi}{2} \quad (3.15)$$

容易验证,在相互作用之前,此解与文[1]中所得到的—阶 KdV 解一致. 类似地,从  $G_2$  的方程出发,令

$$L_1 = R_1, \quad l^2 = 3bq \quad (3.16)$$

可得

$$g_1 = \sec h^2 \frac{\eta}{2} \quad (3.17)$$

把(3.15)(3.17)代入(3.6)并乘以  $\varepsilon$ , 就得到—阶界面升高. 由(3.13)(3.16)可见,当  $1 - \frac{\sigma}{r^2} > 0$  时,应有  $a > 0, b > 0$ , 即孤立波凸向上; 当  $1 - \frac{\sigma}{r^2} < 0$  时,应有  $a < 0, b < 0$ , 孤立波凸向下.

方程(3.10)中还有一种项,我们称之为“间接长期项”,它尽管不会使  $F_2$  产生长期项,却会间接地使下一阶解出现长期项,故也须消除,即令

$$LT_1 f_1 = 0 \quad (3.18)$$

从而得到

$$\theta'_0 = \frac{R_1 b}{2l} g_1(\eta), \quad \theta_0 = \frac{R_1 b}{2l} \int_{-\infty}^{\eta} g_1(\eta) d\eta \quad (3.19)$$

类似地有

$$\varphi'_0 = \frac{R_1 a}{2k} f_1(\xi), \quad \varphi_0 = \frac{R_1 a}{2k} \int_{+\infty}^{\xi} f_1(\xi) d\xi \quad (3.20)$$

于是, 给出  $F_2$  的一致有效解的方程为

$$\frac{\partial F_2}{\partial \eta} = \frac{1}{2} R_1 (b^2 g_1 g'_1 - 2b^2 g_1''' + abf_1 g'_1) \quad (3.21)$$

其通解为

$$F_2 = \frac{1}{2} R_1 \left( -2b^2 g_1 + \frac{7}{2} b^2 g_1^2 + abf_1 g_1 \right) + a^2 f_2(\xi) \quad (3.22)$$

类似地有

$$G_2 = \frac{1}{2} R_1 \left( -2a^2 f_1 + \frac{7}{2} a^2 f_1^2 + abf_1 g_1 \right) + b^2 g_2(\xi) \quad (3.23)$$

其中的待定函数  $f_2(\xi)$ ,  $g_2(\eta)$  由下一阶近似确定.

### 3. 三阶解

根据  $O(\epsilon^{7/2})$  项的方程和上述结果, 可得  $U_3$  的方程, 同样地, 令

$$U_3 = F_3(\xi, \eta)R + G_3(\xi, \eta)\tilde{R} \quad (3.24)$$

可分别推得  $F_3$  和  $G_3$  所满足的方程. 由消除  $F_3$  中的长期项, 得到  $f_2$  应满足的方程

$$f_2' - (1 - 3f_1)f_2 = - \left( \frac{5}{2} R_1 - \frac{3}{10} n - \frac{R_2}{R_1} \right) f_1 + \left( \frac{39}{4} R_2 - \frac{3}{2} e - \frac{9}{4} n \right) f_1^2 + \left( -7R_1 + \frac{3}{2} e + \frac{9}{4} n \right) f_1 \quad (3.25)$$

其中

$$e = \frac{1 - \sigma}{1 + \sigma r}, \quad n = \frac{\left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right)(1 + \sigma r^3)}{(1 + \sigma r)^2} \quad (3.26)$$

为避免在  $f_2$  中出现长期项, 应令(3.25)右端第一项的系数为零(参看[8]), 得到

$$R_2 = \frac{5}{2} R_1^2 - \frac{3}{10} R_1 n \quad (3.27)$$

从而由(3.25)解得

$$f_2 = \left( -\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} e + \frac{3}{4} n \right) f_1 + \left( \frac{7}{2} R_1 - \frac{3}{4} e - \frac{3}{10} n \right) f_1^2 \quad (3.28)$$

类似地有

$$L_2 = R_2, \quad g_2 = \left( -\frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} e + \frac{3}{4} n \right) g_1 + \left( \frac{7}{2} R_1 - \frac{3}{4} e - \frac{3}{10} n \right) g_1^2 \quad (3.29)$$

分别代入(3.22)(3.23), 并由(3.9)得到

$$\zeta_2 = F_2 + G_2 = P_2(a^2 f_1 + b^2 g_1) + Q_2(a^2 f_1^2 + b^2 g_1^2) + R_1 abf_1 g_1 \quad (3.30)$$

其中

$$P_2 = -\frac{3}{2} R_1 + \frac{1}{2} e + \frac{3}{4} n, \quad Q_2 = \frac{21}{4} R_1 - \frac{3}{4} e - \frac{9}{8} n \quad (3.31)$$

通过消除“间接长期项”得到

$$\theta_1 = -\frac{R_1 b}{2l} \int_{-\infty}^{\eta} \left[ \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) a + \left( -3R_1 + \frac{5}{2} e - \frac{3}{4} n \right) b \right]$$

$$+ \left( \frac{9}{4} R_1 - \frac{15}{4} e + \frac{9}{8} n \right) b g_1 \Big] g_1 d \eta + \frac{9}{2l} R_1 a b e f_1(\xi) \int_{-\infty}^{\eta} g_1 d \eta \quad (3.32)$$

$$\varphi_1 = - \frac{R_1 a}{2k} \int_{+\infty}^{\xi} \left[ \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) b + \left( -3R_1 + \frac{5}{2} e - \frac{3}{4} n \right) a \right. \\ \left. + \left( \frac{9}{4} R_1 - \frac{15}{4} e + \frac{9}{8} n \right) a f_1 \right] f_1 d \xi + \frac{9}{2k} R_1 a b e g_1(\eta) \int_{+\infty}^{\xi} f_1 d \xi \quad (3.33)$$

最后解得

$$F_3 = \frac{R_1}{2} \left\{ \left( -\frac{3}{2} R_1 - e - \frac{21}{20} n \right) b^3 g_1 + \left( -\frac{27}{2} R_1 + \frac{7}{2} e + \frac{69}{8} n \right) b^3 g_1^2 \right. \\ + \left( \frac{91}{4} R_1 - \frac{9}{4} e - 9n \right) b^3 g_1^3 + \left( \frac{1}{2} R_1 + \frac{1}{2} e + \frac{3}{4} n \right) a^2 b f_1 g_1 \\ + \left( \frac{1}{2} R_1 - \frac{11}{2} e + \frac{3}{4} n \right) a b^2 f_1 g_1 + \left( \frac{7}{4} R_1 - \frac{3}{4} e - \frac{9}{8} n \right) a^2 b f_1^2 g_1 \\ \left. + \left( \frac{7}{4} R_1 + \frac{33}{4} e - \frac{9}{8} n \right) a b^2 f_1 g_1 \right\} + a^3 f_3(\xi) \quad (3.34)$$

把  $a, b; f_1, g_1; f_3(\xi), g_3(\eta)$  互换就得到  $G_3(\xi, \eta)$  的表达式,  $f_3(\xi), g_3(\eta)$  为待定函数.

#### 4. 四阶近似

为了确定  $f_3, g_3$ , 只需要考虑消除四阶解中的长期项. 经过繁冗的运算, 得到  $f_3$  的方程

$$f_3'' - (1 - 3f_1)f_3 = \alpha f_1 + \beta f_1^2 + \gamma f_1^3 + \delta f_1 \quad (3.35)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \alpha &= \frac{R_3}{R_1} - \frac{13}{2} R_1^2 + \frac{27}{20} R_1 n - \frac{9}{280} p \\ \beta &= -21R_1^2 - \frac{15}{8} e^2 - \frac{243}{32} n^2 + \frac{31}{4} R_1 e + \frac{105}{4} R_1 n - \frac{63}{8} e n + \frac{9}{8} m + \frac{81}{80} p \\ \gamma &= \frac{1133}{8} R_1^2 + 9e^2 + \frac{837}{32} n^2 - \frac{349}{8} R_1 e - \frac{207}{2} R_1 n + \frac{495}{16} e n + \frac{15}{8} R_1 - \frac{15}{8} e \\ &\quad - \frac{21}{8} n - \frac{135}{16} m - \frac{27}{8} p \\ \delta &= -\frac{3801}{32} R_1^2 - \frac{261}{32} e^2 - \frac{2511}{128} n^2 + \frac{675}{16} R_1 e + \frac{2565}{32} R_1 n - \frac{405}{16} e n \\ &\quad - \frac{105}{16} R_1 + \frac{45}{16} e + \frac{27}{8} n + \frac{135}{16} m - \frac{81}{32} p - \frac{3}{2} d \end{aligned} \right\} \quad (3.36)$$

式中的  $R_1, e, n$  已在(3.13)(3.26)中给出, 而

$$m = \frac{\left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right)(1 - \sigma r^2)}{(1 + \sigma r)^2}, \quad p = \frac{\left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right)^2(1 + \sigma r^5)}{(1 + \sigma r)^3}, \quad d = \frac{1 + \frac{\sigma}{r}}{1 + \sigma r} \quad (3.37)$$

为避免在  $f_3$  中出现长期项, 应令  $\alpha = 0$ , 即得

$$R_3 = \frac{13}{2} R_1^3 - \frac{27}{20} R_1^2 n + \frac{9}{280} R_1 p \quad (3.38)$$

从而解得

$$f_3 = \left( \frac{2}{3} \beta + \gamma + \frac{16}{15} \delta \right) f_1 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{16}{15} \delta \right) f_1 - \frac{2}{15} \delta f_1^2 \quad (3.39)$$

类似地有

$$g_3 = \left( \frac{2}{3} \beta + \gamma + \frac{16}{15} \delta \right) g_1 - \frac{1}{2} \left( \gamma + \frac{16}{15} \delta \right) g_1 - \frac{2}{15} \delta g_1^2 \quad (3.40)$$

把 (3.39)(3.40) 代入  $F_3$  和  $G_3$  的表达式, 就得到了三阶解, 界面升高展开式中的三阶项为

$$\begin{aligned} \zeta_3 = F_3 + G_3 = & P_3(a^3 f_1 + b^3 g_1) + Q_3(a^3 f_1^2 + b^3 g_1^2) + H_3(a^3 f_1^3 + b^3 g_1^3) \\ & + I_3(a+b)abf_1g_1 + J_3(af_1 + bg_1)abf_1g_1 \end{aligned} \quad (3.41)$$

式中,

$$\begin{cases} P_3 = \frac{7}{20} R_1^2 - \frac{19}{20} e^2 + \frac{27}{160} n^2 + \frac{59}{8} R_1 e - \frac{41}{40} R_1 n - \frac{21}{16} en - \frac{41}{8} R_1 + \frac{9}{8} e \\ \quad + \frac{27}{16} n + \frac{3}{5} m - \frac{8}{5} d \\ Q_3 = -\frac{1137}{80} R_1^2 - \frac{3}{20} e^2 - \frac{837}{320} n^2 + \frac{17}{16} R_1 e + \frac{213}{16} R_1 n - \frac{63}{32} en + \frac{41}{16} R_1 \\ \quad - \frac{9}{15} e - \frac{27}{32} n + \frac{3}{40} m + \frac{27}{80} p + \frac{4}{5} d \\ H_3 = \frac{2177}{80} R_1^2 + \frac{87}{80} e^2 + \frac{837}{320} n^2 - \frac{27}{4} R_1 e - \frac{243}{16} R_1 n + \frac{27}{8} en + \frac{7}{8} R_1 \\ \quad - \frac{3}{8} e - \frac{9}{16} n - \frac{81}{80} m - \frac{27}{80} p + \frac{1}{5} d \\ I_3 = \frac{1}{2} R_1^2 - \frac{5}{2} R_1 e + \frac{3}{4} R_1 n \\ J_3 = \frac{7}{4} R_1^2 + \frac{15}{4} R_1 e - \frac{9}{8} R_1 n \end{cases} \quad (3.42)$$

至此, 求三阶近似解的过程已全部完成.

## 四、结果与讨论

### 1. 界面升高和最大波幅

由 (3.6)(3.30)(3.41) 得到三阶近似下的界面升高

$$\begin{aligned} \zeta[f_1, g_1] = & \varepsilon(af_1 + bg_1) + \varepsilon^2[P_2(a^2 f_1 + b^2 g_1) + Q_2(a^2 f_1^2 + b^2 g_1^2) + R_1 abf_1 g_1] \\ & + \varepsilon^3[P_3(a^3 f_1 + b^3 g_1) + Q_3(a^3 f_1^2 + b^3 g_1^2) + H_3(a^3 f_1^3 + b^3 g_1^3) \\ & + I_3(a+b)abf_1g_1 + J_3(af_1 + bg_1)abf_1g_1] \end{aligned} \quad (4.1)$$

式中各系数已在上节给出. 习惯上, 人们常用右行波和左行波在碰撞前的最大波幅  $\varepsilon_R, \varepsilon_L$  来表示所得的结果, 在三阶近似下,

$$\begin{cases} \varepsilon_R = \zeta[1, 0] = \varepsilon a + \varepsilon^2 a^2 (P_2 + Q_2) + \varepsilon^3 a^3 (P_3 + Q_3 + H_3) \\ \varepsilon_L = \zeta[0, 1] = \varepsilon b + \varepsilon^2 b^2 (P_2 + Q_2) + \varepsilon^3 b^3 (P_3 + Q_3 + H_3) \end{cases} \quad (4.2)$$

从而可以解得

$$\varepsilon a = \varepsilon_R + \lambda \varepsilon_R^2 + \mu \varepsilon_R^3 + O(\varepsilon_R^4), \quad \varepsilon b = \varepsilon_L + \lambda \varepsilon_L^2 + \mu \varepsilon_L^3 + O(\varepsilon_L^4) \quad (4.3)$$

式中

$$\lambda = -(P_2 + Q_2), \quad \mu = 2(P_2 + Q_2)^2 - (P_3 + Q_3 + H_3) \quad (4.4)$$

于是,(4.1)可以写成

$$\begin{aligned} \zeta[f_1, g_1] = & \varepsilon_R f_1 + \varepsilon_R^2 Q_2(f_1 - f_1) + \varepsilon_R^3 [\bar{P}_3 f_1 + \bar{Q}_3 f_1 + H_3 f_1] \\ & + \varepsilon_L g_1 + \varepsilon_L^2 Q_2(f_1 - f_1) + \varepsilon_L^3 [\bar{P}_3 g_1 + \bar{Q}_3 g_1 + H_3 g_1] \\ & + \varepsilon_R \varepsilon_L R_1 f_1 g_1 + \varepsilon_R^2 \varepsilon_L [\bar{I}_3 f_1 g_1 + J_3 f_1 g_1] + \varepsilon_R \varepsilon_L^2 [\bar{I}_3 f_1 g_1 + J_3 f_1 g_1] \end{aligned} \quad (4.5)$$

式中

$$\begin{aligned} \bar{P}_3 = & 2Q_2(P_2 + Q_2) - Q_3 - H_3, \quad \bar{Q}_3 = -2Q_2(P_2 + Q_2) + Q_3 \\ \bar{I}_3 = & I_3 - R_1(P_2 + Q_2) \end{aligned} \quad (4.6)$$

它们和(4.5)中的其它系数均可表示成  $R_1, e, n, m, p, d$  的多项式,可由上节结果导出.

由(4.5)可得碰撞时的最大波幅

$$|\zeta|_{\max} = |\zeta[1, 1]| = |\varepsilon_R + \varepsilon_L + \varepsilon_R \varepsilon_L R_1 + \frac{3}{2} R_1 (e - R_1) \varepsilon_R \varepsilon_L (\varepsilon_R + \varepsilon_L)| \quad (4.7)$$

当  $\sigma = 0$  时,亦即在单层流体情形中,  $R_1 = \frac{1}{2}, e = 1$ . (4.7) 所对应的结果与 [3],[4] 中一致.

## 2. 传播速度

右行波和左行波的传播速度分别为

$$\begin{aligned} c_R = & c \left[ 1 + \varepsilon a R_1 + \varepsilon^2 a^2 \left( \frac{5}{2} R_1^2 - \frac{3}{10} R_1 n \right) + \varepsilon^3 a^3 \left( \frac{13}{2} R_1^3 - \frac{27}{20} R_1^2 n + \frac{9}{280} R_1 p \right) \right] \\ c_L = & c \left[ 1 + \varepsilon b R_1 + \varepsilon^2 b^2 \left( \frac{5}{2} R_1^2 - \frac{3}{10} R_1 n \right) + \varepsilon^3 b^3 \left( \frac{13}{2} R_1^3 - \frac{27}{20} R_1^2 n + \frac{9}{280} R_1 p \right) \right] \end{aligned} \quad (4.8)$$

用  $\varepsilon_R, \varepsilon_L$  来表示,可得  $c_R$  为

$$\begin{aligned} c_R = & c \left[ 1 + R_1 \varepsilon_R + \left( -\frac{5}{4} R_1^2 + \frac{1}{4} R_1 e + \frac{3}{40} R_1 n \right) \varepsilon_R^2 + \left( \frac{483}{40} R_1^3 + \frac{11}{80} R_1 e^2 \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{77}{16} R_1^2 e - \frac{91}{80} R_1^2 n + \frac{33}{160} R_1 e n + \frac{27}{16} R_1^2 - \frac{3}{16} R_1 e - \frac{9}{32} R_1 n + \frac{27}{80} R_1 m \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{3}{5} R_1 d + \frac{9}{280} R_1 p \right) \varepsilon_R^3 \right] \end{aligned} \quad (4.9)$$

把(4.9)中的  $\varepsilon_R$  换成  $\varepsilon_L$  就得到  $c_L$ . 取  $\sigma = 0$ , 可推得[4]中的结果.

## 3. 相移

由(3.19)(3.20)(3.32)(3.33)得到相移函数  $\theta$  和  $\varphi$

$$\begin{aligned} \theta = & \frac{bR_1}{2l} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta} \left[ 1 - \varepsilon a \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) - \varepsilon b \left( -3R_1 + \frac{5}{2} e - \frac{3}{4} n \right) \right. \right. \\ & \left. \left. - \varepsilon b \left( \frac{9}{4} R_1 - \frac{15}{4} e + \frac{9}{8} n \right) g_1 \right] g_1 d\eta + 9\varepsilon a c f_1(\xi) \int_{-\infty}^{\eta} g_1 d\eta \right\} \\ \varphi = & \frac{aR_1}{2k} \left\{ \int_{+\infty}^{\xi} \left[ 1 - \varepsilon b \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) - \varepsilon a \left( -3R_1 + \frac{5}{2} e - \frac{3}{4} n \right) \right. \right. \end{aligned} \quad (4.10)$$



$$- \varepsilon a \left( \frac{9}{4} R_1 - \frac{15}{4} e + \frac{9}{8} n \right) f_1 \Big] f_1 d\xi + 9 \varepsilon b e g_1(\eta) \Big]_{+\infty}^{\xi} f_1 d\xi \Big\} \quad (4.11)$$

改用  $\varepsilon_R$ 、 $\varepsilon_L$  来表示, 代入变换式(2.2), 得到

$$\begin{cases} \frac{\xi}{2} = \left( \frac{3q\varepsilon_R}{4} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_R + \frac{1}{2} \left( \mu - \frac{1}{4} \lambda^2 \right) \varepsilon_R^2 \right] \{ x - c_R t + \Theta \} \\ \frac{\eta}{2} = \left( \frac{3q\varepsilon_L}{4} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{1}{2} \lambda \varepsilon_L + \frac{1}{2} \left( \mu - \frac{1}{4} \lambda^2 \right) \varepsilon_L^2 \right] \{ x + c_L t + \Phi \} \end{cases} \quad (4.12)$$

其中

$$\begin{aligned} \Theta = & \frac{|R_1|}{2} \left( \frac{\varepsilon_L}{3q} \right)^{1/2} \left\{ \int_{-\infty}^{\eta} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) \varepsilon_R + \left( \frac{9}{8} R_1 - \frac{19}{8} e + \frac{15}{16} n \right) \varepsilon_L \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{9}{4} R_1 - \frac{15}{4} e + \frac{9}{8} n \right) \varepsilon_L g_1 \right] g_1 d\eta + 9 \varepsilon_R e f_1(\xi) \int_{-\infty}^{\eta} g_1 d\eta \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \Phi = & \frac{|R_1|}{2} \left( \frac{\varepsilon_R}{3q} \right)^{1/2} \left\{ \int_{+\infty}^{\xi} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) \varepsilon_L + \left( \frac{9}{8} R_1 - \frac{19}{8} e + \frac{15}{16} n \right) \varepsilon_R \right. \right. \\ & \left. \left. - \left( \frac{9}{4} R_1 - \frac{15}{4} e + \frac{9}{8} n \right) \varepsilon_R f_1 \right] f_1 d\xi + 9 \varepsilon_L e g_1(\eta) \int_{+\infty}^{\xi} f_1 d\xi \right\} \end{aligned} \quad (4.14)$$

从而可以得到迎撞前后右行波和左行波的相移

$$\begin{aligned} \Delta\Theta = & \Theta \Big|_{\eta=-\infty}^{\eta=+\infty} = 2 |R_1| \left( \frac{\varepsilon_L}{3q} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) \varepsilon_R \right. \\ & \left. + \left( -\frac{3}{8} R_1 + \frac{1}{8} e + \frac{3}{16} n \right) \varepsilon_L + 9 \varepsilon_R e f_1(\xi) \right] \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned} \Delta\Phi = & \Phi \Big|_{\xi=+\infty}^{\xi=-\infty} = -2 |R_1| \left( \frac{\varepsilon_R}{3q} \right)^{1/2} \left[ 1 - \left( \frac{1}{2} R_1 + 3e \right) \varepsilon_L \right. \\ & \left. + \left( -\frac{3}{8} R_1 + \frac{1}{8} e + \frac{3}{16} n \right) \varepsilon_R + 9 \varepsilon_L e g_1(\eta) \right] \end{aligned} \quad (4.16)$$

#### 4. 波形变化

由(4.15)(4.16)可见, 在所考虑的近似下, 相移  $\Delta\Theta$  和  $\Delta\Phi$  分别与  $\xi$  和  $\eta$  有关, 亦即波在传播过程中各点的相移各不相同, 因而波形要发生变化. 我们来考察碰撞前后的右行波:

$$\zeta_R = \varepsilon_R \{ f_1 + \varepsilon_R Q_2 (f_1^2 - f_1) + \varepsilon_R^2 (\bar{P}_3 f_1 + \bar{Q}_3 f_1^2 + H_3 f_1^3) \} \quad (4.17)$$

$$f_1 = \text{sech } k^2 \left\{ \left( \frac{3q\varepsilon_R}{4} \right)^{1/2} \left[ 1 + \frac{\lambda}{2} \varepsilon_R + \frac{1}{2} \left( \mu - \frac{1}{4} \lambda^2 \right) \varepsilon_R^2 \right] (x - c_R t + \Theta) \right\} \quad (4.18)$$

碰撞前,  $\Theta = 0$ ; 碰撞后  $\Theta = \Delta\Theta$ ,  $\Delta\Theta$  由(4.15)给定. 非均匀相移使波形从对称的变成非对称的了. 值得注意的是,  $\Delta\Theta$  中的非均匀相移项(括号中的末项)可正可负, 其符号与  $\varepsilon_R$  相同, 因此, 对上凸孤立波来说,  $\varepsilon_R > 0$ , 与单层流体情形一样, 碰撞之后波相对于传播方向向后倾斜; 而对于下凸孤立波来说,  $\varepsilon_R < 0$ , 因此迎撞之后波向前倾斜. 我们的数值计算证实了这一点.

作为一个算例, 取  $\sigma = 0.8$ ,  $r = 0.5$ ,  $\varepsilon_R = \varepsilon_L = -0.3$ , 所得的波形变化如图 1 所示. 曲线 1 为迎撞之前的下凸孤立波, 曲线 2 为迎撞之后的波, 由于波的前倾, 波略呈非对称性.

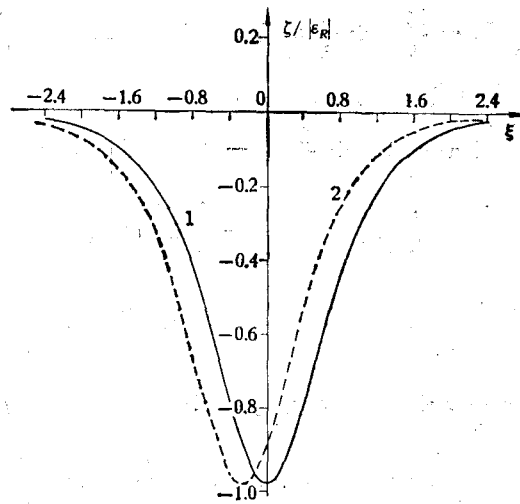


图 1

致谢 对谈镐生教授的鼓励和指导谨表谢意.

## 参 考 文 献

- [1] 戴世强,应用数学和力学, 3(1982), 721—731.  
 [2] Miles, J. W., *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 12(1980), 11—43.  
 [3] Miles, J. W., *J. Fluid Mech.*, 79(1977), 157—169.  
 [4] Su, C. H. and Mirie, R. M., *J. Fluid Mech.*, 98(1980), 509—525.  
 [5] Oikawa, M. and Yajima, N., *J. Phys. Soc. Japan*, 34(1973), 1093—1099.  
 [6] Mirie, R. M. and Su, C. H., *J. Fluid Mech.*, 115(1982), 475—492.  
 [7] 戴世强, PLK 方法,《奇异摄动理论及其在力学中的应用》(钱伟长主编),科学出版社(1981), 33—86.  
 [8] 戴世强,力学进展, 12(1982), 2—23.

## HEAD-ON COLLISIONS BETWEEN TWO INTERFACIAL SOLITARY WAVES

Dai Shiqiang

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

### Abstract

In this paper, starting from the basic equations established by the author in [1] and using the Poincare-Lighthill-Kuo method combined with the reductive perturbation method, we treat the head-on collision between two interfacial solitary waves to the third-order approximation, and obtain the maximum amplitude during the collision and nonuniform phase shifts in the waves afterwards. It is found that after the interaction, the convex-upward interfacial solitary wave tilts backward with respect to the direction of its propagation, while the concave-downward one tilts forward.