

分层流中的瞬变波¹⁾

李家春

(中国科学院力学研究所)

提要 本文用 Laplace-Fourier 变换方法研究两层流体中的瞬变波,分析了近似色散关系,讨论了不同模式波的主次关系,导出了由初始位移、大气扰动、水下爆炸、地震等因素所激励的表面波和内波的波形及其远场的渐近表达式。

由于对能源开发、港湾设计、预防自然灾害(如海啸、风暴潮等)的迫切需要,近十多年来,人们对表面波问题重新发生了兴趣,并进行了深入的研究^[1]。不久前,卫星观察到在平静的海面下,有时隐藏着轩然大波——内波^[2,3]。既然 Ekman^[4]发现,内波可以给船舶以极大的阻力,可以推测,内波同海工建筑的相互作用可能也是不容忽视的。因此,有必要对内波发生的机理及其传播规律进行探讨。

近年来,出现了一些研究内孤立波及其相互作用的工作^[5,6],但没有涉及内波产生的机理。1975年, S. A. Thorpe^[7]阐述了内波产生的物理过程,并提到了当时已有的一些研究工作^[8,9]。本文在此基础上进一步研究两层流体的瞬变波,旨在了解海浪(尤其是内波)产生的机理及其传播规律。它不仅将文献[1]的方法应用于分层介质,而且也将已有研究内波的工作推广到更一般的情形,可以用于研究因初始位移、大气扰动、水下爆炸、地震等因素所激励的表面波与内波。

一、基本方程及其解

为了便于进行分析处理,我们在下述假定下来讨论分层流中的瞬变波

- (1) 流体是无粘性、不可压缩的;
- (2) 运动是无旋的,且仅讨论二维的情况;
- (3) 考虑密度有间断的、两层不可混溶流体的模式,这对于研究温跃层 (thermocline) 上的波动现象是一个很好的近似模型;

(4) 不考虑 Coriolis 力的影响。对于波长远小于 Rossby 变形半径 ($R = \sqrt{gh/f}$) 的波,这亦是良好的近似 (h 为 4km 时, R 约为 2000km);

(5) 讨论小振幅波, Airy 线性波理论适用,即要求 Ursell 数 $U_r = \frac{a}{k^2 h^3} \ll 1$ 。在深海中,这一条件易于满足(如 $U_r = 0.01$, $h = 4\text{km}$, $\lambda = 50\text{km}$, 波幅 a 可达 10m)。

这时,我们可导出由速度势表达的线性化方程:

本文于 1983 年 5 月 3 日收到。

1) 谨以此文纪念导师郭永怀逝世十五周年。

$$\Delta\phi^{(u)} = 0 \quad -h_1 < z < 0 \quad (1.1)$$

$$\Delta\phi^{(l)} = 0 \quad -(h_1 + h_2) < z < -h_1 \quad (1.2)$$

在自由面、界面及底面的线性化边界条件为:

$$\frac{\partial\eta}{\partial t} = \frac{\partial\phi^{(u)}}{\partial z}, \quad z = 0 \quad (1.3)$$

$$g\eta + \phi_{tt}^{(u)} = -\frac{p_a}{\rho^{(u)}}, \quad z = 0 \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = \frac{\partial\phi^{(u)}}{\partial z} = \frac{\partial\phi^{(l)}}{\partial z}, \quad z = -h_1 \quad (1.5)$$

$$\rho^{(u)}[g\zeta + \phi_{tt}^{(u)}] = \rho^{(l)}[g\zeta + \phi_{tt}^{(l)}], \quad z = -h_1 \quad (1.6)$$

$$\frac{\partial\phi^{(l)}}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial t} = W(x, t), \quad z = -(h_1 + h_2) \quad (1.7)$$

这里, ϕ 为速度势, η 、 ζ 为自由面及界面上的波高, ρ 为海水密度, h_1 为温跃层深度 (约 100m 左右), $h_1 + h_2$ 为海深. p_a 为海面上大气扰动, $H(x, t)$ 为海底地壳运动规律, g 为重力加速度. x 、 z 指水平与垂直方向坐标, 原点置于未扰水面上. 上标 u 、 l 指上、下层之意.

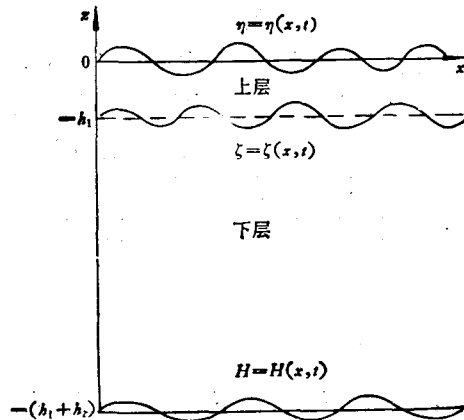


图1 两层流体系统和坐标系

若边界条件统一用 ϕ 来表达, 条件(1.3)(1.4)也可归结为

$$\frac{\partial\phi^{(u)}}{\partial z} + \frac{1}{g}\phi_{tt}^{(u)} = -\frac{p_a}{\rho^{(u)}g}, \quad z = 0 \quad (1.8)$$

(1.5)(1.6)式则可写成

$$\rho^{(u)}\left[\frac{\partial\phi^{(u)}}{\partial z} + \frac{1}{g}\phi_{tt}^{(u)}\right] = \rho^{(l)}\left[\frac{\partial\phi^{(l)}}{\partial z} + \frac{1}{g}\phi_{tt}^{(l)}\right], \quad z = -h_1 \quad (1.9)$$

对于上述初边值问题, 可以用 Laplace-Fourier 变换来求解 (初始条件将在下面讨论中提到), 以研究因初始位移、大气扰动、水下爆炸、地震等因素引起的瞬变波.

定义 Laplace 变换:

$$\bar{\phi} = \int_0^{\infty} e^{-st} \phi(x, z, t) dt \quad (1.10)$$

则其逆变换为

$$\phi = \frac{1}{2\pi i} \int_{Br} e^{st} \bar{\phi}(x, z, s) ds \quad (1.11)$$

其中, Br 指 Bromwich 积分线路, 即从 $a - i\infty$ 至 $a + i\infty$, 且 $a > s_0$, s_0 为原函数的增长指数, 即

$$|\phi(x, z, t)| < M e^{s_0 t} \quad (1.12)$$

再定义 Fourier 变换

$$\tilde{\phi}(k, z, s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} \bar{\phi}(x, z, s) dx \quad (1.13)$$

其逆演为

$$\bar{\phi}(x, z, s) = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \tilde{\phi}(k, z, s) dk \quad (1.14)$$

在上述 Laplace-Fourier 变换下, 原问题化为:

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}^{(u)}}{dz^2} - k^2 \tilde{\phi}^{(u)} = 0, \quad -h_1 < z < 0 \quad (1.1')$$

$$\frac{d^2 \tilde{\phi}^{(l)}}{dz^2} - k^2 \tilde{\phi}^{(l)} = 0, \quad -(h_1 + h_2) < z < -h_1 \quad (1.2')$$

相应的边界条件为:

$$\frac{d \tilde{\phi}^{(u)}}{dz} + \frac{s^2}{g} \tilde{\phi}^{(u)} = \tilde{F}(k, s), \quad z = 0 \quad (1.8')$$

$$\frac{d \tilde{\phi}^{(u)}}{dz} = \frac{d \tilde{\phi}^{(l)}}{dz}, \quad z = -h_1 \quad (1.5')$$

$$\begin{aligned} & \rho^{(u)} \left[\frac{d \tilde{\phi}^{(u)}}{dz} + \frac{s^2}{g} \tilde{\phi}^{(u)} - \frac{s}{g} \tilde{\phi}^{(u)}(k, -h_1, +0) + \xi(k, 0) \right] \\ & = \rho^{(l)} \left[\frac{d \tilde{\phi}^{(l)}}{dz} + \frac{s^2}{g} \tilde{\phi}^{(l)} - \frac{s}{g} \tilde{\phi}^{(l)}(k, -h_1 + 0) + \xi(k, 0) \right], \quad z = -h_1 \quad (1.9') \end{aligned}$$

$$\frac{d \tilde{\phi}^{(l)}}{dz} = \tilde{W}(k, s) \quad z = -(h_1 + h_2) \quad (1.7')$$

式 (1.8) 中, $\tilde{F}(k, s) = -\tilde{\eta}(k, 0) + \frac{s}{g} \tilde{\phi}^{(u)}(k, 0, +0) - \frac{s}{\rho^{(u)} g} \tilde{p}_a$, $\tilde{\eta}(k, 0)$ 为自由面初始位移 $\eta_0(x, 0)$ 的 Fourier 变换, \tilde{p}_a 为大气扰动的 Laplace-Fourier 变换; $\phi^{(u)}(x, 0, +0)$ 为自由面上速度势的初值, 从 (1.4) 式不难看出, 它是压力脉冲的度量, $\tilde{\phi}^{(u)}(k, 0, +0)$ 则为该初值的 Fourier 变换. 类似地, $\xi(k, 0)$ 为界面初位移 $\zeta_0(x, 0)$ 的 Fourier 变换, $\phi^{(u)}(x, -h_1, +0)$, $\phi^{(l)}(x, -h_1, +0)$ 为速度势在界面上的初值, $\rho^{(u)} \phi^{(u)} - \rho^{(l)} \phi^{(l)}$ 也是界面上压力脉冲的一种度量.

我们取满足方程 (1.1')(1.2') 及条件 (1.7') 之解为如下形式:

$$\tilde{\phi}^{(u)} = A \operatorname{ch} kz + B \operatorname{sh} kz \quad (1.15)$$

$$\tilde{\phi}^{(l)} = C \operatorname{ch} k(z + h_1 + h_2) + \frac{\tilde{W}}{k} \operatorname{sh} k(z + h_1 + h_2) \quad (1.16)$$

从条件 (1.8') 易知

$$B = -\frac{s^2}{kg} A + \frac{1}{k} \tilde{F}(k, s) \quad (1.17)$$

考虑到这一关系式,从界面条件(1.5'),(1.9')即可导出:

$$\begin{aligned} -\left(\operatorname{sh} kh_1 + \frac{s^2}{kg} \operatorname{ch} kh_1\right) A - \operatorname{sh} kh_2 C &= \frac{\tilde{W}}{k} \operatorname{ch} kh_2 - \frac{\tilde{F}}{k} \operatorname{ch} kh_1 \\ \rho^{(u)} \operatorname{sh} kh_1 \left(\frac{s^4}{k^2 g^2} - 1\right) A - \rho^{(l)} \left(\operatorname{sh} kh_2 + \frac{s^2}{kg} \operatorname{ch} kh_2\right) C \\ &= \frac{\rho^{(l)}}{k} \left(\operatorname{ch} kh_2 + \frac{s^2}{kg} \operatorname{sh} kh_2\right) \tilde{W} - \frac{\rho^{(u)}}{k} \left(\operatorname{ch} kh_1 - \frac{s^2}{kg} \operatorname{sh} kh_1\right) \tilde{F} + \frac{\tilde{E}}{k} \end{aligned} \quad (1.18)$$

其中 $\tilde{E} = (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \zeta(k, 0) + (\rho^{(u)} \tilde{\phi}^{(u)}(k, -h_1 + 0) - \rho^{(l)} \tilde{\phi}^{(l)}(k, -h_1 + 0)) \frac{s}{g}$

$$\begin{aligned} \text{令 } G(k, s) &= \frac{s^4}{k^2 g^2} (\rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2) + \frac{s^2}{kg} \rho^{(l)} \operatorname{sh} k(h_1 + h_2) \\ &+ (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2 \end{aligned} \quad (1.20)$$

这样便可求出系数 A 、 B 、 C 的表达式

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{kG(k, s)} \left[\operatorname{sh} kh_2 \tilde{E} + \left\{ \frac{s^2}{kg} (\rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{sh} kh_2 \right\} \tilde{F} - \rho^{(l)} \frac{s^2}{kg} \tilde{W} \right] \end{aligned} \quad (1.21)$$

$$\begin{aligned} B &= \frac{1}{kG(k, s)} \left[-\operatorname{sh} kh_2 \frac{s^2}{kg} \tilde{E} + \left\{ \frac{s^2}{kg} (\rho^{(l)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 + \rho^{(u)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{sh} kh_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2 \right\} \tilde{F} + \rho^{(l)} \frac{s^4}{k^2 g^2} \tilde{W} \right] \end{aligned} \quad (1.22)$$

$$\begin{aligned} C &= \frac{1}{kG(k, s)} \left[-\left(\operatorname{sh} kh_1 + \frac{s^2}{kg} \operatorname{ch} kh_1\right) \tilde{E} - \left\{ \frac{s^4}{k^2 g^2} (\rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{sh} kh_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{ch} kh_2) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{s^2}{kg} \rho^{(l)} \operatorname{ch} k(h_1 + h_2) + (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 \right\} \tilde{W} + \rho^{(u)} \frac{s^2}{kg} \tilde{F} \right] \end{aligned} \quad (1.23)$$

以及速度势的表达式:

$$\phi^{(u)}(x, z, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} ds e^{st} (A \operatorname{ch} kz + B \operatorname{sh} kz) \quad (1.24)$$

$$\begin{aligned} \phi^{(l)}(x, z, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} ds e^{st} \left[C \operatorname{ch} k(z + h_1 + h_2) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\tilde{W}}{k} \operatorname{sh} k(z + h_1 + h_2) \right] \end{aligned} \quad (1.25)$$

由(1.4)(1.6)即得波高的表达式

$$\begin{aligned} \eta &= -\frac{p_0}{\rho^{(u)} g} - \frac{1}{2\pi g} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} ds s e^{st} A \right] \\ \zeta &= \frac{1}{2\pi (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) g} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} ds s e^{st} \left\{ \rho^{(u)} (A \operatorname{ch} kh_1 - B \operatorname{sh} kh_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho^{(l)} \left(C \operatorname{ch} kh_2 + \frac{\tilde{W}}{k} \operatorname{sh} kh_2 \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.26)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) g} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} ds s e^{st} \left\{ \rho^{(u)} (A \operatorname{ch} kh_1 - B \operatorname{sh} kh_1) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \rho^{(l)} \left(C \operatorname{ch} kh_2 + \frac{\tilde{W}}{k} \operatorname{sh} kh_2 \right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (1.27)$$

对于自由振荡情况,也即(1.18)(1.19)右端为零时, A, B, C 有非平凡解的条件为

$$G(k, s) = 0 \quad (1.28)$$

二、近似色散关系

从(1.20)(1.28)可解得

$$\frac{s^2}{kg} = \frac{-\rho^{(l)} \operatorname{sh} k(h_1 + h_2) \pm \sqrt{[\rho^{(l)} \operatorname{sh} k(h_1 + h_2)]^2 - 4(\rho^{(l)})}}{-\rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 (\rho^{(l)} \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{ch} k h_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2)} \quad (2.1)$$

对于稳定的密度分布, $\rho^{(l)} > \rho^{(u)}$, 上式有四个纯虚根 $s_1 = \omega_1 i, s_2 = -\omega_1 i, s_3 = \omega_3 i, s_4 = -\omega_3 i$.

从速度势、波高表达式(1.21—1.27)可见,上述几个根刚好是 Laplace 逆演函数分母的极点,所以逆演后会出现 $e^{i(kx \pm \omega t)}$ 之项。这样看来,

$$G(\omega i, k) = 0 \quad (2.2)$$

必是上述波动问题的色散关系,这是不言而喻的。该色散关系在一定条件下可求出其近似表达式,现一一讨论如下:

1) $\rho^{(u)} = \rho^{(l)} (1 - \sigma)$, σ 为小量。在温跃层处,海水密度约从 1.024g/cm^3 增加到 1.028g/cm^3 , 所以 σ 为 $0.3\text{--}0.5\%$, 这是本文着重讨论的情况。这时

$$\frac{s^2}{kg} = \begin{cases} -\operatorname{th} k(h_1 + h_2)(1 - \alpha_1 \sigma) & (2.3) \\ -\sigma \frac{\operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2}{\operatorname{sh} k(h_1 + h_2)} (1 + \alpha_2 \sigma) & (2.4) \end{cases}$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{\operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2}{\operatorname{sh}^2 k(h_1 + h_2) \cdot \operatorname{ch} k(h_1 + h_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{\operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 \operatorname{ch} k(h_1 + h_2)}{\operatorname{sh}^2 k(h_1 + h_2)}$$

所以当上下层密度相差不远时,快模式可看作界面不存在时,深度为 $(h_1 + h_2)$ 的单层流体模式;慢模式则恰好是介于两固壁间、深度分别为 h_1, h_2 时界面波的传播模式。

2) $\rho^{(u)}/\rho^{(l)} = \varepsilon \ll 1$ 。譬如,空气与水的界面就是这种情况,这时 $\varepsilon \sim 10^{-3}$ 。在该近似下,我们有:

$$\frac{s^2}{kg} = \begin{cases} -\operatorname{th} k h_1 (1 + \beta_1 \varepsilon) & (2.5) \\ -\operatorname{th} k h_2 (1 + \beta_2 \varepsilon) & (2.6) \end{cases}$$

其中

$$\beta_1 = \frac{\operatorname{sh} k h_2 (\operatorname{ch} k h_2 + \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 \operatorname{ch} k h_1)}{\operatorname{ch} k h_2 \operatorname{ch} k h_2 \operatorname{sh} k(h_1 - h_2)}, \quad \beta_2 = \frac{\operatorname{sh} k h_1 (\operatorname{ch} k h_1 + \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 \operatorname{ch} k h_2)}{\operatorname{ch} k h_1 \operatorname{ch} k h_2 \operatorname{sh} k(h_2 - h_1)}$$

这一情况相当两层流体系统各自独立存在时的传播模式。

同样地,可在各种不同水深时得到不同的近似关系:

3) 浅水近似, $k h_1 \ll 1, k h_2 \ll 1$ ($kh \sim 0.3$ 或 $\frac{h}{\lambda} < 0.05$ 即可)

$$\frac{s^2}{kg} = \frac{k[-(h_1 + h_2) \pm \sqrt{(h_1 - h_2)^2 + 4\varepsilon h_1 h_2}]}{2} (1 + O(k^2 h_1, k^2 h_1 h_2, k^2 h_2^2)) \quad (2.7)(2.8)$$

4) 深水近似, $kh_1 \gg 1, kh_2 \gg 1$ ($kh > 3$, 或 $\frac{h}{\lambda} > 0.5$ 即可)

$$\frac{s^2}{kg} = \begin{cases} -1 (1 + O(e^{-kh_1}, e^{-kh_2})) & (2.9) \\ -\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon} (1 + O(e^{-kh_1}, e^{-kh_2})) & (2.10) \end{cases}$$

5) 上浅下深或上深下浅, h_j 为浅层深度

$$\frac{s^2}{kg} = \begin{cases} -1 (1 + O(kh_j)) & (2.11) \\ -(1-\varepsilon)kh_j (1 + O(kh_j)) & (2.12) \end{cases}$$

式中 O 为量阶符号

三、各种因素所激励的表面波与内波

现在,我们可以根据式(1.24—1.27)来确定速度势与波高,其中 $G(k, s)$ 由(1.20)色散关系确定,系数 A, B, C 由(1.21—1.23)确定. 在求 Laplace 逆演公式时,需要计算积分

$$I_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{s^n e^{st}}{G(k, s)} ds \quad (3.1)$$

若添上 C_R 上的积分后,即形成封闭围道,便可采用留数积分. 根据 Jordan 引理, $t > 0$ 时, C_R 上的积分是趋于零的,所以

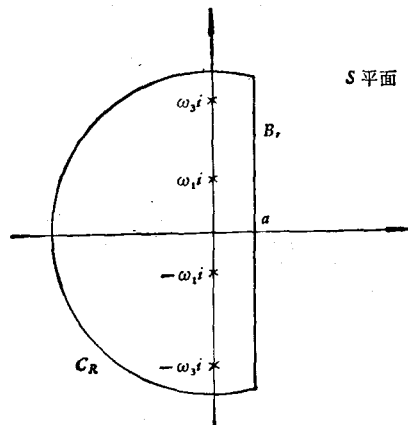


图2 积分围道

$$I_n = \frac{k^2 g^2}{\rho^{(u)} \text{sh } kh_1 \text{ sh } kh_2 + \rho^{(l)} \text{ch } kh_1 \text{ ch } kh_2} \text{Res} \sum_{m=1}^4 \frac{s^n e^{st}}{(s - \omega_1 i)(s + \omega_1 i)(s - \omega_3 i)(s + \omega_3 i)} \quad (3.2)$$

容易证明

$$I_{2N} = \frac{(-1)^N k^2 g^2}{\rho^{(u)} \text{sh } kh_1 \text{ sh } kh_2 + \rho^{(l)} \text{ch } kh_1 \text{ ch } kh_2} \times \left[\frac{\omega_1^{2N-1}}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \sin \omega_1 t + \frac{\omega_3^{2N-1}}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \sin \omega_3 t \right] \quad (3.3)$$

$$I_{2N+1} = \frac{(-1)^N k^2 g^2}{\rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 + \rho^{(l)} \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{ch} k h_2} \times \left[\frac{\omega_1^{2N}}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{\omega_3^{2N}}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \quad (3.4)$$

对于线性问题, 我们可以对各种因素分别予以考虑, 再进行叠加:

1) 自由面初位移产生的波. 这时仅 $\tilde{F}(k, s) = -\tilde{\eta}(k, 0) \approx 0$, $\tilde{E} \tilde{W}$ 皆为零. 所以

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}^{(u)}(k, z, s) = & \frac{-\tilde{\eta}(k, 0)}{kG(k, s)} \left[\left\{ \frac{s^2}{kg} (\rho^{(l)} \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{ch} k h_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2) \right. \right. \\ & \left. \left. + (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 \right\} \operatorname{ch} k z + \left\{ (\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{s^2}{kg} (\rho^{(u)} \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 + \rho^{(l)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{ch} k h_2) \right\} \operatorname{sh} k z \right] \quad (3.5) \end{aligned}$$

$$\tilde{\phi}^{(l)}(k, z, s) = \frac{-\tilde{\eta}(k, 0)}{kG(k, s)} \rho^{(u)} \frac{s^2}{kg} \operatorname{ch} k(z + h_1 + h_2) \quad (3.6)$$

根据(1.26)(1.27)及积分公式(3.4)(3.5), 即可导出:

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\eta}(k, 0) \left[\frac{(\omega_1^2 - kgT)}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t + \frac{(\omega_3^2 - kgT)}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \cos \omega_3 t \right] \quad (3.7)$$

式中, 系数 $T = \frac{(\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{sh} k h_2}{\rho^{(l)} \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{ch} k h_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2}$.

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\eta}(k, 0) \frac{\rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_2 kg}{\rho^{(u)} \operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 + \rho^{(l)} \operatorname{ch} k h_1 \operatorname{ch} k h_2} \\ & \times \left[\frac{\cos \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_3^2} + \frac{\cos \omega_3 t}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \right] \quad (3.8) \end{aligned}$$

在 $\sigma \ll 1$ 时, (3.7)(3.8)可简化为

$$\eta(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\eta}(k, 0) \left[\cos \omega_1 t + \sigma (\cos \omega_3 t - \cos \omega_1 t) \frac{\operatorname{sh}^2 k h_2}{\operatorname{sh}^2 k(h_1 + h_2)} \right] \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \zeta(x, t) = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{\eta}(k, 0) \frac{\operatorname{sh} k h_2}{\operatorname{sh} k(h_1 + h_2)} \\ & \times \left[1 + \sigma \frac{\operatorname{sh} k h_1 \operatorname{sh} k h_2 - \operatorname{sh}^2 k(h_1 + h_2) \operatorname{ch} k(h_1 + h_2)}{\operatorname{ch} k(h_1 + h_2) \operatorname{sh}^2 k(h_1 + h_2)} \right] (\cos \omega_1 t - \cos \omega_3 t) \quad (3.10) \end{aligned}$$

所以, 自由面的初始位移在自由面上产生的波是以快模式为主的, 在界面上则同时存在着波高相当的两种模式的波. 当 $\varepsilon = \rho^{(u)}/\rho^{(l)} \ll 1$ 时, 可进行同样的分析. 因为这时 $T \rightarrow \operatorname{th} k h_2 = \frac{\omega_3^2}{kg}$ 由(3.7)可见, $\eta(x, t)$ 仅以快模式为主. 同时, 由于 $\rho^{(u)}$ 小, 积聚的势能亦小, 所以产生的界面波也小(含 ε 因子).

2) 界面初位移产生的波. 这时, 仅在 \tilde{E} 中 $\tilde{\xi}(k, 0) \approx 0$, 相应的速度势为:

$$\tilde{\phi}^{(u)} = \frac{\rho^{(l)} - \rho^{(u)}}{kG(k, s)} \tilde{\xi}(k, 0) \operatorname{sh} k h_2 \left(\operatorname{ch} k z - \frac{s^2}{kg} \operatorname{sh} k z \right) \quad (3.11)$$

$$\tilde{\phi}^{(l)} = \frac{-(\rho^{(l)} - \rho^{(u)})}{kG(k, s)} \xi(k, 0) \left(\text{sh } kh_1 + \frac{s^2}{kg} \text{ch } kh_1 \right) \text{ch } k(z + h_1 + h_2) \quad (3.12)$$

同样可导出波高公式

$$\eta = -\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \xi(k, 0) \frac{(\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \text{sh } kh_1 kg}{\rho^{(u)} \text{sh } kh_1 \text{sh } kh_2 + \rho^{(l)} \text{ch } kh_1 \text{ch } kh_2} \times \left[\frac{\cos \omega_1 t}{\omega_3^2 - \omega_1^2} + \frac{\cos \omega_3 t}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \right] \quad (3.13)$$

以及

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \xi(k, 0) \left[\frac{\omega_1^2 - kgR}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \cos \omega_1 t + \frac{\omega_3^2 - kgR}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_3 t \right] \quad (3.14)$$

其中 $R = \frac{\rho^{(u)} \text{sh } kh_2 \text{ch } kh_1 + \rho^{(l)} \text{sh } kh_1 \text{ch } kh_2}{\rho^{(u)} \text{sh } kh_1 \text{sh } kh_2 + \rho^{(l)} \text{ch } kh_1 \text{ch } kh_2}$ 。当 $\sigma \ll 1$ 时

$$\zeta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \xi(k, 0) \left[-\cos \omega_3 t + \frac{\text{sh}^2 kh_2}{\text{sh}^2 k(h_1 + h_2)} (\cos \omega_3 t - \cos \omega_1 t) \sigma \right] \quad (3.15)$$

$$\eta = -\frac{\sigma}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \xi(k, 0) \frac{\text{sh } kh_2}{\text{ch } k(h_1 + h_2)} kg \left[\frac{\cos \omega_1 t}{\omega_3^2 - \omega_1^2} + \frac{\cos \omega_3 t}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \right] \quad (3.16)$$

这时,情况与刚才恰恰相反,在界面上主要以慢模式传播,而在自由面上有相同波高的两种模式同时进行传播。由于密度差 $\rho^{(l)} - \rho^{(u)}/\rho^{(l)} = \sigma$ 为小量,由界面初位移所积聚的势能小,所以它所激励的自由面的波高也小(含 σ 因子)。当 $\rho^{(u)} \ll \rho^{(l)}$ 时,也可进行类似的讨论。

3) 压力、压力脉冲产生的波。在实际上,压力由大气扰动产生,压力脉冲由瞬时的冲击作用或爆炸产生。由于后者在 \tilde{F} , \tilde{E} 中与 $\xi(k, 0)$, $\eta(k, 0)$ 有相同的地位,所以只要在公式中以 $\frac{s}{g} \tilde{\phi}^{(u)}(k, 0, +0)$ 及 $[\rho^{(u)} \tilde{\phi}^{(u)}(k, -h_1, +0) - \rho^{(l)} \tilde{\phi}^{(l)}(k, -h_1, 0)] \frac{s}{g}$ 代替 $-\eta(k, 0)$, $(\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \zeta(k, 0)$ 即可,在此不予赘述。

还要注意的是:在(1.26)式压力引起的波动公式中,表面波还要增加一项静水压力项,它完全与压力分布“同步”,不同于由积分形式表达的传播项(第二项)。

现在来讨论有周期性压力作用于自由面上的情况。若

$$p_a = p(x) \sin \omega_a t \quad (3.17)$$

ω_a 为常数,这时

$$\tilde{p}_a = \tilde{p}(k) \frac{\omega_a}{s^2 + \omega_a^2} \quad (3.18)$$

在求 Laplace 逆变换时,会增加两个单极点 $\pm \omega_a i$ 。

$$\begin{aligned} \eta(x, z) &= \frac{p_a}{\rho^{(u)} g} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{\tilde{p}(k)}{\rho^{(u)} g} \omega_a \left[\frac{\rho^{(l)} \text{ch } kh_1 \text{ch } kh_2 + \rho^{(u)} \text{sh } kh_1 \text{sh } kh_2}{k^2 g^2} \right. \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{ds s^4 e^{st}}{(s^2 + \omega_a^2) G(k, s)} + \frac{(\rho^{(l)} - \rho^{(u)}) \text{ch } kh_1 \text{sh } kh_2}{kg} \\ &\quad \times \left. \frac{1}{2\pi i} \int \frac{ds s^2 e^{st}}{(s^2 + \omega_a^2) G(k, s)} \right] - \frac{p_a}{\rho^{(u)} g} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{\tilde{p}(k)}{\rho^{(u)} g} \omega_a \left[\frac{\omega_a (\omega_a^2 - kgT) \sin \omega_a t}{(\omega_3^2 - \omega_a^2) (\omega_1 - \omega_a^2)} \right] \end{aligned}$$

$$+ \frac{\omega_1(\omega_1^2 - kgT) \sin \omega_1 t}{(\omega_a^2 - \omega_1^2)(\omega_3^2 - \omega_1^2)} + \frac{\omega_3(\omega_3^2 - kgT) \sin \omega_3 t}{(\omega_a^2 - \omega_3^2)(\omega_1^2 - \omega_3^2)} \quad (3.19)$$

这时,在某些 k 处, $\omega_1^2 = \omega_a^2$ 或 $\omega_3^2 = \omega_a^2$, 这是奇点,计算积分时应取 Cauchy 主值. 若压力扰动也是一行波且与表面波(或内波)同步,即

$$p_a = P_a e^{ik_a x} \cos \omega_a t \quad (3.20)$$

于是 $\tilde{p}(k) = 2\pi p_a \delta(k - k_a)$, k_a 满足 $\omega_a = \omega_1(k_a)$. 这时,可先作 Fourier 逆变换得

$$\eta(x, t) = \frac{-P_a e^{ik_a x}}{\rho^{(u)} g} \cos \omega_a t + \frac{P_a e^{ik_a x} \omega_a}{\rho^{(u)} g} \times \frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} ds \frac{e^{st}(s^4 + k_a g T_a s^2)}{(s^2 + \omega_1^2)(s^2 + \omega_3^2)} \quad (3.21)$$

这里由于出现二阶极点项,积分会出现与时间成正比之项

$$\frac{t}{2} \left[\frac{P_a e^{ik_a x} \omega_a (\omega_1^2 - k_a g T_a)}{\rho^{(u)} g (\omega_1^2 - \omega_3^2)} \cos \omega_a t \right] \quad (3.22)$$

随着时间流逝,其波幅将线性增长,直至线性理论失效,这也就是一种“共振”现象.

4) 津波. 这时 $w(x, t) \approx 0$, 我们假定地壳有脉冲运动 $w = H_0(x) \delta(t)$, 由(1.21)(1.26)得

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \frac{\rho^{(l)} \tilde{H}_0(k)}{\rho^{(l)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2 + \rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{ch} kh_2} \left[\frac{\omega_1^2 \cos \omega_1 t}{\omega_1^2 - \omega_3^2} + \frac{\omega_3^2 \cos \omega_3 t}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \right] \quad (3.23)$$

同样,由(2.22)(2.23)(2.27)得

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{1}{2\pi(\rho^{(l)} - \rho^{(u)})} \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{e^{ikx}}{kg} \tilde{H}_0(k) \left[\frac{1}{2\pi i} \int_{B_r} \frac{se^{st}}{G(k, s)} \right] \\ & \times \left\{ -\rho^{(l)} \rho^{(u)} \frac{s^2}{kg} \left(\operatorname{ch} kh_1 + \frac{s^2}{kg} \operatorname{sh} kh_1 \right) + \rho^{(l)} \left[\frac{s^4}{k^2 g^2} (\rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{sh} kh_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \rho^{(u)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{ch} kh_2) + \frac{s^2}{kg} \rho^{(l)} \operatorname{ch} k(h_1 + h_2) + (\rho^{(l)} \right. \right. \\ & \left. \left. - \rho^{(u)}) \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 \right] \operatorname{ch} kh_2 - \rho^{(l)} G(k, s) \operatorname{sh} kh_2 \right\} \end{aligned}$$

式中,最后一项为解析函数积分为零再利用色散关系(1.20),上式化简为

$$\begin{aligned} \zeta = & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikx} \tilde{H}_0(k) \frac{\rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1}{\rho^{(l)} \operatorname{ch} kh_1 \operatorname{ch} kh_2 + \rho^{(u)} \operatorname{sh} kh_1 \operatorname{sh} kh_2} \\ & \times \left[\frac{\omega_1^2 - kg \operatorname{th} kh_1}{\omega_1^2 - \omega_3^2} \cos \omega_1 t + \frac{\omega_3^2 - kg \operatorname{th} kh_1}{\omega_3^2 - \omega_1^2} \cos \omega_3 t \right] \quad (3.24) \end{aligned}$$

可以类似于 1) 的情况进行讨论, $\sigma \ll 1$ 时,在自由面上以快模式为主,而在界面上则两种模式兼有. $\varepsilon \ll 1$ 时,自由面上有两种模式,而界面上则只有一种模式. 从(3.23),(3.24)中 $\tilde{H}_0(k)$ 后的因子可见,波高随离开海底的距离呈指数衰减 $O(e^{-kh})$. 因此,津波中仅保存长波部分,短波部分都已衰减掉了.

四、远场波的渐近分析^[1,10]

由于在分层流中,存在着两种模式,其远场波形与单层流体亦有所不同.

从近似色散关系(2.3),(2.4),可以得到 $\omega-k$ 曲线如图 3. 所以当 $x/t > c_f$ 处不存在波动; $c_f > x/t > c_s$ 时,仅有快模式的波存在;当 $c_s > x/t$ 时则有两种模式在传播,

这都是指远场的情况。其中 c_f 是指快模式的最大群速度, c_s 是指慢模式的最大群速度, 它们分别为 $\sqrt{g(h_1 + h_2)}$, $\sqrt{\sigma g \frac{h_1 h_2}{h_1 + h_2}}$ 。

当 $t \rightarrow \infty$ 时在远场 $x/t = \text{const}$ 线上的波幅可以用驻相法进行估算。以自由面初位移引起的界面波为例(仅考虑右行波): 由(3.8)式

$$\zeta(x, t) \sim \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\pi t}} \left\{ \bar{\eta}(k_f, 0) \frac{\rho^{(u)} \text{sh } k_f h_2 k_f g}{\rho^{(u)} \text{sh } k_f h_1 \text{sh } k_f h_2 + \rho^{(l)} \text{ch } k_f h_1 \text{ch } k_f h_2} \right. \\ \cdot \frac{\exp \left[i \left(k_f x - \omega_1(k_f) t - \frac{\pi}{4} \right) \right]}{(\omega_1^2(k_f) - \omega_3^2(k_f)) \sqrt{|\omega_1''(k_f)|}} + \bar{\eta}(k_s, 0) \frac{\rho^{(l)} \text{sh } k_s h_2 k_s g}{\rho^{(u)} \text{sh } k_s h_1 \text{sh } k_s h_2 + \rho^{(l)} \text{ch } k_s h_1 \text{ch } k_s h_2} \\ \left. \frac{\exp \left[i \left(k_s x - \omega_1(k_s) t - \frac{\pi}{4} \right) \right]}{(\omega_1^2(k_s) - \omega_3^2(k_s)) \sqrt{|\omega_3''(k_s)|}} \right\} \quad (4.1)$$

式中, k_f, k_s 分别为群速度等于 x/t 的快、慢波的波数(见图 3), 即

$$\frac{x}{t} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k_f} \text{th } k_f (h_1 + h_2)} \left(1 + \frac{1}{\text{sh } 2k_f (h_1 + h_2)} \right) \\ = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sigma g}{k_s (\text{cth } k_s h_1 + \text{cth } k_s h_2)}} \\ \times \left(1 + \frac{h_1 \text{sh}^2 k_s h_2 + h_2 \text{sh}^2 k_s h_1}{\text{sh } 2k_s h_1 \text{sh } k_s h_2 + \text{sh } 2k_s h_2 \text{sh } k_s h_1} \right) \quad (4.2)$$

色散关系(2.3)(2.4)在 $k=0$ 处的 Taylor 展开为:

$$\omega_1(k) = c_f k - \gamma_f k^3 \quad (4.3)$$

$$\omega_3(k) = c_s k - \gamma_s k^3 \quad (4.4)$$

式中 $c_f = \sqrt{g(h_1 + h_2)}$, $\gamma_f = \frac{1}{6} c_f (h_1 + h_2)^2$; $c_s =$

$\sqrt{\frac{\sigma g h_1 h_2}{h_1 + h_2}}$, $\gamma_s = \frac{1}{6} c_s h_1 h_2$, 在 $k=0$ 处 ω_1, ω_2 之二阶

导数为零, 群速度取最大值, 所以这就是所谓的先导波。由驻相法可知波幅 $\propto t^{-\frac{1}{2}}$, 比其它地方要衰减得慢些。

为方便起见, 假定 $\eta(x, 0)$ 为偶函数, 那么由它产生的界面波在先导波附近为

$$\zeta \sim \frac{1}{4\pi} \bar{\eta}(0, 0) \frac{\rho^{(u)}}{\rho^{(l)}} \frac{h_2 (h_1 + h_2)}{h_1^2 + h_2^2 + (2 - \sigma) h_1 h_2} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ik(x - c_f t) + i\gamma_f k^3 t}$$

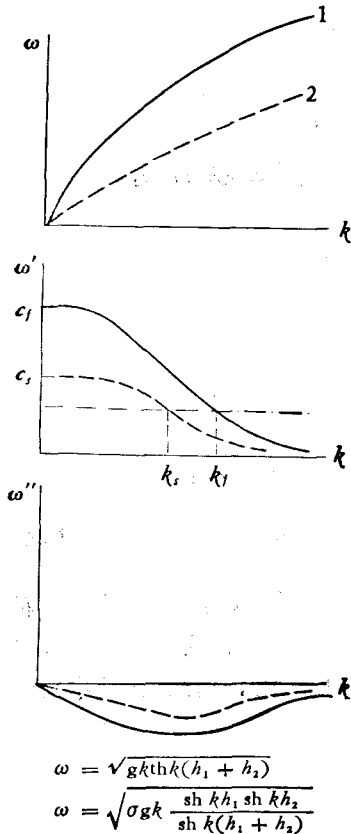


图 3 近似色散关系与群速度

$$\omega = \sqrt{gk \text{th } k (h_1 + h_2)} \\ \omega = \sqrt{\sigma g k \frac{\text{sh } k h_1 \text{sh } k h_2}{\text{sh } k (h_1 + h_2)}}$$

$$= \frac{1}{2} \bar{\eta}(0, 0) \frac{\rho^{(u)} h_2 (h_1 + h_2)}{\rho^{(l)} [h_1^2 + h_2^2 + (2 - \sigma) h_1 h_2]} \frac{1}{(3\gamma_f t)^{1/3}} \text{Ai} \left(\frac{x - c_f t}{(3\gamma_f t)^{1/3}} \right) \quad (4.5)$$

式中, $\text{Ai}(z)$ 为 Airy 函数, 其定义及渐近式为

$$\text{Ai}(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i \left(sz + \frac{s^3}{3} \right) \right\} ds \sim \begin{cases} \frac{1}{2\sqrt{\pi} z^{1/4}} \exp \left(-\frac{2}{3} z^{3/2} \right) & z \rightarrow +\infty \\ \frac{1}{\sqrt{\pi} |z|^{1/4}} \sin \left(\frac{2}{3} |z|^{3/2} + \frac{\pi}{4} \right) & z \rightarrow -\infty \end{cases} \quad (4.6)$$

所以, 在先导波前是指数衰减型的, 在波后是振荡型的。

同样地, 对慢模式有

$$\zeta = -\frac{1}{2} \bar{\eta}(0, 0) \frac{\rho^{(u)} h_2 (h_1 + h_2)}{\rho^{(l)} [h_1^2 + h_2^2 + (2 - \sigma) h_1 h_2]} \frac{1}{(3\gamma_f t)^{1/3}} \text{Ai} \left[\frac{x - c_f t}{(3\gamma_f t)^{1/3}} \right] \quad (4.7)$$

注意

$$\bar{\eta}(0, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(x, 0) dx \quad (4.8)$$

表示初始位移的总体积。

类似于文献 [1], 可以证明, 在反对称情形, 先导波幅 $\propto \frac{1}{t^{1/3}} \frac{d}{dx} \left[\text{Ai} \left(\frac{x - c_f t}{(3\gamma_f t)^{1/3}} \right) \right] \propto \frac{1}{t^{2/3}}$, 所以衰减得要更快些。

五、讨论与结论

从上述分析, 可以归纳如下结论:

- 1) Laplace-Fourier 变换, 可以有效地用于解决连续介质系统的初边值问题;
- 2) 当 $\sigma \ll 1$ 时, 即考虑海洋中温跃层的情况, 自由面的激励源在自由面上产生快模式波, 界面上的激励源则在界面上产生慢模式波。两者在另一界面上则同时产生两种模式的波。
- 3) 表面波、内波的波高取决于它们离开激励源的铅垂距离以及外来的激励能。前者, 从波高表达式中含有 $O(e^{-kh})$ 因子可见; 后者则从波高表达式中含有 ε 或 σ 的因子可以说明。

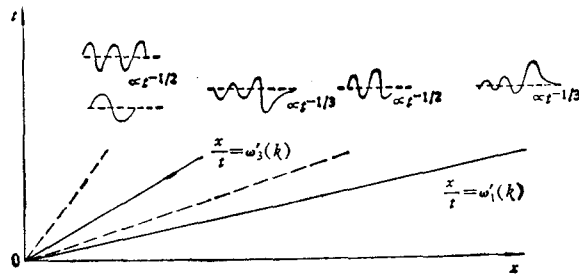


图 4 远场两种模式的波形

4) 在界面上的激励源、与慢模式同步的激励源,可以产生波幅大于表面波的内波,这可以解释平静海面下为何会有惊涛骇浪。当内波波幅足够大时,就可形成内孤立波。

5) 远场波的传播可以分为三个区域。快先导波前不存在波动,快、慢先导波间只有一种模式的波;慢先导波后有两种模式的波。先导波以 $t^{-\frac{1}{2}}$ 律衰减,而其余地区的波以 $t^{-\frac{1}{4}}$ 律衰减(详见图 4)。

致谢: 对谈镐生教授的指导,作者谨致以衷心感谢。

参 考 文 献

- [1] Mei, C. C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, New York (1983).
- [2] Osborne, A. R., *J. Petrol. Tech.*, **30**(1978), 1497--1503.
- [3] Osborne, A. R., *Science*, **208**(1980), 451--460.
- [4] Ekman, V. W., *Phil. Mag.*, **XXXI** (1916), 386.
- [5] Kakutani, T. et al. *J. Phys. Soc. Japan*, **45**(1978), 474--479.
- [6] Su, C. H., *J. Fluid Mech.*, **98** (1980), 509--525.
- [7] 戴世强, *力学学报*, **6**(1983).
- [8] Thorpe, S. A., *J. Geophysical Research*, **20**(1975), 328--338.
- [9] Черкеов, Л. В., *Прп. Мар. Мех.*, **26** (1962), 559--563.
- [10] Черкеов, Л. В., *ИЗВ. АКАД. НАУК СССР, Физ. Атмос. Океан*, **1** (1965), 517--526.
- [11] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, J. Wiley & Sons. Inc. (1974).

TRANSIENT WAVES IN STRATIFIED FLOWS

Li Jiachun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

In this paper, the transient waves in two-layered fluid are examined in detail by means of Laplace-Fourier transformation. Here we analyse the approximate dispersion relations and discuss various cases in which only one mode is dominant. The surface and internal wave elevations due to initial displacement, atmospheric disturbances, underwater explosion and earthquake, and their far field asymptotic expressions are derived.