中国科学

1983 年 9 月 A 辑 第 9 期

具任意横截面的振荡柱体的二维短表面波

陈嗣熊

(中国科学院力学研究所，北京)

摘　　要

本文讨论了水面上柱体的任意振荡运动所产生的二维短表面波，得到了适合于水线处各种壁面情形的均匀有效解．指出了在垂直振荡情形，Holford[1] 所求得的解的不完全性和不能过渡到在水线处壁面垂直情形的解的原因．

一、引　　言

关于水面上振荡物体所产生的水波的研究，一直受到人们广泛的重视。人们希望由物体的振荡条件来确定所产生的表面波．这可使我们进一步了解造波机理，流体与振荡物体的相互作用．这也是海洋工程中所关心的一个问题．早在 1953 年 Ursell[2] 就开始了由振荡物体产生的短波的研究．但是他只研究了半浸润圆柱体的情形．Grim[3], Ursell[4], Karp, Kotik, Lurye 与 Margulis[5] 用造波器理论对垂直振荡柱体产生的波作了进一步的研究．在七十年代，Rhodes-Robinson[6—8] 进一步证明了 Ursell 方法的正确性，并讨论了常数有限深度流体的情形．Leppington[9], Hermans[10], Alker[11] 用匹配渐近展开法对这一问题进行了研究．Davis[12] 与 Evans[13] 分别对半浸润圆柱体的摇动运动与垂直平板的水平振荡运动产生的波进行了研究．最近，Rhodes-Robinson[14] 分别对于半浸润柱体的垂直与摇动振荡情形，严格地导出了波振幅的渐近展式的前三项．但是，所有这些研究都是针对着水线处柱体壁面是垂直的情形而做的．Holford[1] 研究了在水线处柱体壁面不是垂直的振荡柱体产生的波．但是，当水线处柱体壁面的斜度趋向于垂直时，他对于非垂直情形的研究结果并不与垂直情形的结果相一致．这说明他的结果在斜度接近于垂直时并不正确．而且他仅研究了垂直振荡的情形．本文的讨论包括了柱体的各种振荡运动的情形．我们指出，当考虑了 Holford 所忽略的高阶项，我们得到了适合于水线处各种壁面情形的均匀有效解．Holford 的对于垂直振荡情形的解是不完全的，只有在水线处离开壁面垂直情形较远时，他的解才是正确的．本文的结果对于研究三维振荡物体产生的短表面波，是极其有用的．我们将在另一文中用本文的结果来讨论三维振荡物体的短表面波．

二、问题的公式表达

我们假定流体为不可压缩，无粘性的，并且自静止开始运动，因此，运动是无旋的．设流体

本文于 1983 年 1 月 15 日收到．

的运动是由部分浸润的柱体的小振幅周期运动所产生.我们用C表示柱体横截面的湿润曲线.假定坐标轴Ox沿着未扰动的自由表面，Oy垂直向下指向流体，坐标原点O在柱体内部沿x轴的中点．设坐标原点到曲线C与x轴的交点的距离为a．流体在下半平面（$y>0$）以角频率ω的运动,可以用速度势 $\phi(x,y)\exp(-i\omega t)$ 来描述，这里t表示时间变量． $\phi(x,y)$ 满足以下方程:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}=0,\qquad \text{在}C\text{外},\ y\geqslant 0; \tag{2.1}$$

$$k\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,\qquad \text{在}C\text{外},\ y=0; \tag{2.2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=V(x,y),\qquad \text{在}C\text{上}; \tag{2.3}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}=0,\qquad \text{在}(a,0)\text{点与}(-a,0)\text{点}; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial r}-ik\phi\to 0,\qquad \text{当}\ r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\to\infty. \tag{2.5}$$

这里(2.2)式中，$k=\frac{\omega^2}{g}$，g为重力加速度．(2.3)式中，$V(x,y)$ 表示在柱体表面曲线C上(x,y)点的法向速度，$\frac{\partial}{\partial n}$表示在$C$上沿$C$的外法线方向的导数；正则性条件(2.4)式中，$\rho$表示离开（$a$，0）点或（$-a$，0）点的距离．如果$C$完全包含在过水线点($a$，0)和($-a$，0)的二条垂直于$x$轴的垂线之中，John[15] 证明了问题(2.1)—(2.5)的解的唯一性．显然，对于垂直振荡柱体，$V(x,y)=U\cos\delta$，这里U为常数，δ是C上点的外法向矢量与y轴的夹角.这就是 Holford 考虑的情形．我们考虑一般的振荡运动，$V(x,y)$ 可以为任意解析函数．辐射条件(2.5)式表示在无穷远处波是向外传播的．我们也可把它写成另一形式:

$$\phi(x,y)\to\bar{A}\exp[ik(x-a)-ky],\qquad \text{当}\ x\to+\infty \tag{2.6}$$

与

$$\phi(x,y)\to\bar{A}'\exp[-ik(x+a)-ky],\qquad \text{当}\ x\to-\infty. \tag{2.7}$$

这里复振幅$\bar{A}$与$\bar{A}'$为分别与柱体横截面曲线形状有关的待定常数． 我们的目的是希望求得当 $ka\to\infty$ 时，$\bar{A}$与$\bar{A}'$的渐近形式.

设

$$\phi(x,y)\sim\phi_0(x,y),\qquad \text{当}\ k\to\infty.$$

如果分别用k除以(2.2)式与(2.5)式的二边，并且在(2.1)—(2.5)式中形式地令 $k\to\infty$，可以得到ϕ_0所满足的方程:

$$\nabla^2\phi_0=0,\qquad \text{在}C\text{外},\ y\geqslant 0; \tag{2.8}$$

$$\phi_0(x,0)=0,\qquad |x|\geqslant a; \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n}=V(x,y),\qquad \text{在}C\text{上}; \tag{2.10}$$

$$\phi_0\to 0,\qquad \text{当}\ r\to\infty; \tag{2.11}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial\rho}=0,\qquad 在\ (a,0)\ 点与\ (-a,0)\ 点. \tag{2.12}$$

由条件 (2.9) 式，可以令 $\phi_0(x,-y)=-\phi_0(x,y)$，则 $\phi_0(x,y)$ 被延拓到 $y<0$ 的区域. 因此，问题 (2.8)—(2.12) 式相当于物体使得在物体表面的法向速度为 $V(x,y)$，而在流体中运动时的位势流问题. 它远比原始问题 (2.1)—(2.5) 式容易求解. 设已求得关于 ϕ_0 问题 (2.8)—(2.12) 式的解，则令

$$\phi(x,y)=\phi_0(x,y)+\psi(x,y), \tag{2.13}$$

把 (2.13) 式代入 (2.1)—(2.4), (2.6), (2.7) 式，可得 $\psi(x,y)$ 所满足的方程:

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}=0,\qquad 在 C 外,\ y\geqslant 0; \tag{2.14}$$

$$k\psi+\frac{\partial\psi}{\partial y}=p(x),\qquad |x|\geqslant a,\ y=0; \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial n}=0,\qquad 在 C 上. \tag{2.16}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial\psi}{\partial\rho}=0,\qquad 分别在\ (a,0)\ 点和\ (-a,0)\ 点, \tag{2.17}$$

$$\psi(x,y)\to\bar{A}\exp[ik(x-a)-ky],\qquad 当\ x\to+\infty. \tag{2.18}$$

$$\psi(x,y)\to\bar{A}'\exp[-ik(x+a)-ky],\qquad 当\ x\to-\infty. \tag{2.19}$$

这里 $p(x)=-\left(\frac{\partial\phi_0}{\partial y}\right)_{y=0}$. ϕ_0 求出后，$p(x)$ 就已知. 现集中注意于沿 x 正方向运动的波，也就是我们希望求得波振幅 $\bar{A}$ 当 $k\to\infty$ 时的渐近值. 对于沿 x 负方向运动的波，可有类似的讨论. 设 ψ_1 为 ψ 当 k 趋向于无穷大时的渐近函数. 令

$$x'-a=k(x-a),\qquad y'=ky. \tag{2.20}$$

这里引入伸展变量 x', y', 是为了刻划当 k 很大时，仅仅在水线点 $(a,0)$ 点附近的边界条件 (2.16) 式与 $(a,0)$ 点附近的 $p(x)$ 值起着重要作用. 设柱体横截面的浸润曲线 C 的方程为 $y=b(x)$. 用新变量 x', y' 来表示曲线 C 的方程，则 C 的方程成为:

$$y'=kb\left(a+\frac{x'-a}{k}\right).$$

假定 c 为光滑曲线，则用 Taylor 展开，可得

$$y'=b'(a)(x'-a)+O\left(\frac{1}{k}\right). \tag{2.21}$$

这里 $b'(a)$ 为函数 $b(x)$ 在 a 点的导数. 这说明曲线 C 在 $k\to\infty$ 时，可用通过 $(a,0)$ 点沿 C 在 $(a,0)$ 点的切线方向的直线 C_1 来代替. C 上的边界条件 (2.16) 式在 $k\to\infty$ 时，变成直线 C_1 上的条件. 因此，ψ 的渐近函数 ψ_1 满足以下方程:

$$\frac{\partial^2\psi_1}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\psi_1}{\partial y'^2}=0,\qquad 在\ x'\ 轴与\ C_1\ 所夹的扇角内,\ y'\geqslant 0; \tag{2.22}$$

$$\psi_1+\frac{\partial\psi_1}{\partial y'}=\frac{1}{k}p\left(a+\frac{x'-a}{k}\right),\qquad x'\geqslant a,\ y'=0; \tag{2.23}$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial n'}=0,\qquad 在\ C_1\ 上; \tag{2.24}$$

$$\lim_{\rho'\to 0}\rho'\frac{\partial\phi_1}{\partial\rho'}=0,\qquad 在\ (a,\ 0)\ 点; \tag{2.25}$$

$$\phi_1(x',\ y')\to A\exp[i(x'-a)-y']\qquad 当\ x'\to+\infty. \tag{2.26}$$

这里直线 C_1 为 $y'=b'(a)(x'-a)$; $\frac{\partial}{\partial n'}$ 表示在 C_1 上沿 C_1 的法线指向流体的导数; ρ' 表示在 $(x',\ y')$ 坐标系下离开 $(a,\ 0)$ 点的距离; A 是 $\bar{A}$ 当 $k\to\infty$ 时的渐近表式. 在 (2.23) 式中，我们仍保留了非齐次项而未简化它，这是因为函数 ϕ_0 在 $(a,\ 0)$ 点需满足二个边界条件 (2.9) 与 (2.10) 式，因此，通常 ϕ_0 在 $(a,\ 0)$ 点是奇异的，也即 $p(x)$ 在 a 点是奇异的，故不能用 Taylor 展开来简化. 如果我们把方程 (2.22)—(2.26) 变回到原始变量 x, y，再与方程 (2.14)—(2.18) 比较，我们将发现，两者的唯一差别是用直线 C_1 来代替曲线 C. 这是 Holford[1] 所作的假定，我们给予了证明.

为了确定振幅 A，我们采用 Holford[1] 的方法. 首先，我们引入函数 $\theta_1[(x'-a),\ y']$，它满足

$$\frac{\partial^2\theta_1}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2\theta_1}{\partial y'^2}=0,\qquad 在\ x'\ 轴与\ C_1\ 所夹的扇角内，y'\geqslant 0; \tag{2.27}$$

$$\theta_1+\frac{\partial\theta_1}{\partial y'}=0,\qquad x'\geqslant a,\ y'=0; \tag{2.28}$$

$$\frac{\partial\theta_1}{\partial n'}=0,\qquad 在\ C_1\ 上; \tag{2.29}$$

$$\theta_1(0,\ 0)=1; \tag{2.30}$$

$$\lim_{\rho'\to 0}\rho'\frac{\partial\theta_1}{\partial\rho'}=0,\qquad 在\ (a,\ 0)\ 点. \tag{2.31}$$

Holford 已求得了函数 $\theta_1[(x'-a),\ y']$，它有渐近性质:

$$\theta_1[(x'-a),y']\sim\mu^{-\frac{1}{2}}\cos[(x'-a)-(1-\mu)\pi/4]\exp(y'),\qquad 当\ x'\to\infty. \tag{2.32}$$

这里设 α 为在 $(a,\ 0)$ 点曲线 C 的指向流体的切矢量与 x 正方向的夹角，则 $\mu=\pi/2\alpha$. 我们对函数 $\theta_1[(x'-a),\ y']$ 与 $\phi_1(x',\ y')$ 在扇角 $y'=0$ 与 $y'=b'(a)(x'-a)$ 内用 Green 定理，可得

$$\int_a^\infty\left(\theta_1\frac{\partial\phi_1}{\partial y'}-\phi_1\frac{\partial\theta_1}{\partial y'}\right)dx'=\lim_{x'\to\infty}\int_0^\infty\left(\theta_1\frac{\partial\phi_1}{\partial x'}-\phi_1\frac{\partial\theta_1}{\partial x'}\right)dy'.$$

把 (2.23), (2.26), (2.28), (2.32) 式代入上式，并解出 A，最后可得

$$A=2ik^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}\exp[-i(1-\mu)\pi/4]\int_a^\infty p\left(a+\frac{x'-a}{k}\right)\theta_1[(x'-a),0]dx'. \tag{2.33}$$

这里用 Holford 的结果:

$$\theta_1(x',\ 0)=\mu^{-\frac{1}{2}}\cos[x'-(1-\mu)\pi/4]-\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_0^\infty\frac{e^{-x'\tau}d\tau}{\tau f(\tau)[\tau^{2\mu}-2\cos\mu\pi+\tau^{-2\mu}]} \tag{2.34}$$

与

$$f(\tau)=\exp\left\{\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\ln\left(\frac{1-\sigma^{-2}}{1-\sigma^{-2\mu}}\right)\frac{\tau}{\sigma^2+\tau^2}d\sigma\right\}. \tag{2.35}$$

公式 (2.33)—(2.35) 就是问题 (2.22)—(2.26) 对于振幅 A 的形式解. 我们希望求出 A 的渐近

表达式.

三、水线点附近 ϕ_{oy} 的行为

引入极坐标 (R, θ)

$$x = R\cos\theta, \qquad y = R\sin\theta.$$

这里 R 表示 (x, y) 点至原点的距离，θ 为原点至 (x, y) 点的矢量与 x 轴的夹角.

设

$$\phi_0(x, y) = \mathrm{Re}\{f_0(z)\}.$$

这里 $z = x + iy$，$f_0(z)$ 在流体区域内是 z 的解析函数. 边界条件 (2.10) 式可写为:

$$\mathrm{Re}\left\{\exp(\theta i)\cdot f_0'(z)\cdot\frac{R - iR'}{\sqrt{R^2 + R'^2}}\right\}_{R=R(\theta)} = V(R,\theta), \tag{3.1}$$

这里 $R = R(\theta)$ 表示曲线 C 在极坐标 (R, θ) 下的方程，$R' = \dfrac{dR}{d\theta}$. 由于我们仅需要水线点，$(a, 0)$ 附近 ϕ_0 的行为，因此，θ 可以考虑为小的变量. 把 (3.1) 式中出现的所有函数在 $\theta = 0$ 对 θ 展开，我们得到

$$R = a + R_0'\theta + \frac{R_0''}{2!}\theta^2 + \cdots, \tag{3.2}$$

$$R' = R_0' + R_0''\theta + \frac{R_0'''}{2!}\theta^2 + \cdots, \tag{3.3}$$

$$e^{\theta i} = 1 + \theta i - \frac{1}{2!}\theta^2 + \cdots, \tag{3.4}$$

$$z = Re^{\theta i} = R_0 + (R_0 i + R_0')\theta + \left(\frac{1}{2}R_0'' + R_0' i - \frac{1}{2}R_0\right)\theta^2 + \cdots. \tag{3.5}$$

这里 $R_0 = R(a)$，$R_0' = R'(a)$，$R_0'' = R''(a)$，$\cdots$. 假定 $f_0(z)$ 有展式:

$$\begin{aligned} f_0(z) &= iA_0'(z - a) + \frac{iA_1'}{2}(z - a)^2 + \frac{iA_2'}{3}(z - a)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{iB_0'}{\mu}(z - a)^{\mu} + \frac{iB_1'}{\mu + 1}(z - a)^{\mu+1} + \cdots. \end{aligned} \tag{3.6}$$

这里 $A_0', A_1', A_2', \cdots, B_0', B_1', \cdots$ 都是常数. 由条件 (2.9) 式，我们可以看到，所有的 $A_i'(i = 0, 1, 2, \cdots)$，$B_i'(i = 0, 1, 2, \cdots)$ 应为实数. 由 (3.6) 式，可得

$$\begin{aligned} f_0'(z) &= iA_0' + iA_1'(z - a) + iA_2'(z - a)^2 + \cdots \\ &\quad + iB_0'(z - a)^{\mu-1} + iB_1'(z - a)^{\mu} + \cdots. \end{aligned} \tag{3.7}$$

$V[R(\theta), \theta]$ 也可以展开为:

$$V[R(\theta), \theta] = V_0 + V_0'\theta + \frac{V_0''}{2!}\theta^2 + \cdots. \tag{3.8}$$

这里 $V_0 = V[R(0), 0]$，$V_0' = \dfrac{dV[R(0), 0]}{d\theta}$，$V_0'' = \dfrac{d^2V[R(0), 0]}{d\theta^2}$，$\cdots$. 把公式 (3.2)—(3.5)，(3.7)，(3.8) 代入 (3.1) 式，并使 (3.1) 式两边 θ 的同次幂的系数相等，最后我们得到

$$A_0' = V_0 R_0'^{-1}(R_0^2 + R_0'^2)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.9}$$

$$A'_1=\frac{A'_0(R''_0-R_0)}{R_0^2-R_0'^2}-\frac{A'_0R_0'^2(R_0+R''_0)}{(R_0^2-R_0'^2)(R_0^2+R_0'^2)}-V_1, \tag{3.10}$$

$$B'_1=-\frac{B'_0}{\rho_1^2\cos\alpha(\mu+1)}\Big[\cos\{\alpha(\mu-1)\}\cdot(R''_0-R_0)-2R'_0\sin\{\alpha(\mu-1)\}$$
$$-\frac{R'_0}{\rho_1}(R_0+R''_0)\cdot\cos\alpha\mu\Big]. \tag{3.11}$$

这里 $\rho_1=(R_0^2+R_0'^2)^{\frac{1}{2}}$，$B'_0$ 可以为任意实数．由于 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$，由 (3.7)，(3.9)—(3.11) 式，我们看到在 $(a,0)$ 点附近，ϕ_{oy} 的头二项为：

$$p(x)=-\phi_{oy}(x,0)=V_0B_0\left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu-1}+V_0B_1\left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu}$$
$$+o\left[\left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu}\right], \tag{3.12}$$

这里 V_0，B_0，B_1 为实常数．我们引入 V_0 是为了与 Holford 的关于 $p(x)$ 的表达式相比较．公式 (3.12) 适用于柱体的任意振荡运动．指定 V_0 后，常数 B_0，B_1 将由关于 ϕ_0 问题的整体解所确定．

四、波振幅的确定

由 (2.33) 式，我们看到当 k 趋向于无穷大时，仅仅在接近 $x=a$ 区域的 $p(x)$ 是重要的．因此，当 $k\to\infty$ 时，可以用 (3.12) 式来代替 (2.33) 式中的 $p\left(a+\frac{x'-a}{k}\right)$．但必须注意，由于 (2.11) 式，当 $x\to\infty$ 时，$\frac{\partial\phi_0(x,0)}{\partial y}\to 0$，也即 $p(x)\to 0$．把(3.12) 式代入 (2.33) 式，得到

$$A=2ik^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}\exp[-i(1-\mu)\pi/4]\int_a^\infty\left\{V_0B_0\left(\frac{x'-a}{ka}\right)^{\mu-1}+V_0B_1\left(\frac{x'-a}{ka}\right)^{\mu}\right.$$
$$\left.+o\left[\left(\frac{x'-a}{ka}\right)^{\mu}\right]\right\}\theta_1[(x'-a),0]dx'. \tag{4.1}$$

(4.1) 式的第一项为 $A_0(ka)^{-\mu}$ 的形式，这里 A_0 定义为

$$A_0=2i\mu^{\frac{1}{2}}a\exp[-i(1-\mu)\pi/4]\cdot V_0B_0\int_0^\infty x^{\mu-1}\theta_1(x,0)dx. \tag{4.2}$$

这里我们暂时只考虑 $\frac{1}{2}\leqslant\mu<1$，考虑到 $\theta_1(x,0)$ 当 $x\to\infty$ 时的渐近表式 (2.32)，积分 (4.2) 式是收敛的．显然，A_0 与 k 无关，仅依赖于 μ．Holford[1] 用 Laplace 变换的方法求出了这一积分值．把他的结果代入 (4.2) 式，我们得到

$$A_0=\frac{-i\pi aV_0B_0}{\mu^{\frac{1}{2}}(-\mu)!}\exp[-i(1-\mu)\pi/4]. \tag{4.3}$$

(4.1) 式中剩下的积分为：

$$A-A_0(ka)^{-\mu}=2ik^{-1}\mu^{\frac{1}{2}}\exp[-i(1-\mu)\pi/4]\cdot\int_0^\infty\left\{V_0B_1\left(\frac{x}{ka}\right)^{\mu}+o\left[\left(\frac{x}{ka}\right)^{\mu}\right]\right\}$$

$$\cdot\left\{\mu^{-\frac{1}{2}}\cos\left[x-(1-\mu)\frac{\pi}{4}\right]-\frac{\sin\mu\pi}{\pi}I(x)\right\}dx. \tag{4.4}$$

这里

$$I(x)=\int_0^\infty\frac{e^{-\tau x}}{\tau f(\tau)[\tau^{2\mu}-2\cos\mu\pi+\tau^{-2\mu}]}d\tau. \tag{4.5}$$

由于 $x\to\infty$ 时，$p(x)\to 0$，因此，在(4.4)式的被积函数的第一组括号内的项，在 $x=\infty$ 应取为零. 我们对下列积分用分部积分:

$$\int_0^\infty\left\{V_0B_1\left(\frac{x}{ka}\right)^\mu+o\left[\left(\frac{x}{ka}\right)^\mu\right]\right\}\cdot\cos[x-(1-\mu)\pi/4]dx$$

$$=\left\{V_0B_1\left(\frac{x}{ka}\right)^\mu+o\left[\left(\frac{x}{ka}\right)^\mu\right]\right\}\cdot\sin[x-(1-\mu)\pi/4]\Big|_0^\infty$$

$$-\int_0^\infty\{\mu V_0B_1x^{\mu-1}(ka)^{-\mu}+o[x^{\mu-1}(ka)^{-\mu}]\}\sin[x-(1-\mu)\pi/4]dx,$$

右边第一项在积分限 0 与 ∞ 处都为零，因此，

$$\int_0^\infty\left\{V_0B_1\left(\frac{x}{ka}\right)^\mu+o\left[\left(\frac{x}{ka}\right)^\mu\right]\right\}\cdot\cos[x-(1-\mu)\pi/4]dx$$

$$=-\mu V_0B_1(ka)^{-\mu}\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin[x-(1-\mu)\pi/4]dx+o[(ka)^{-\mu}]$$

$$=\mu V_0B_1(ka)^{-\mu}\Gamma(\mu)\sin[(1-3\mu)\pi/4]+o[(ka)^{-\mu}]. \tag{4.6}$$

将(4.6)式代入(4.4)式，我们得到

$$A=A_0(ka)^{-\mu}+A_1(ka)^{-\mu-1}+o[(ka)^{-\mu-1}]. \tag{4.7}$$

这里 A_1 定义为:

$$A_1=2i\mu^{\frac{1}{2}}V_0B_1a\exp[-i(1-\mu)\pi/4]\cdot\left\{\mu^{\frac{1}{2}}\Gamma(\mu)\sin[(1-3\mu)\pi/4]\right.$$

$$\left.-\frac{\sin\mu\pi}{\pi}\int_0^\infty[x^\mu+o(x^\mu)]I(x)dx\right\}. \tag{4.8}$$

由文献 [1]，$f(\tau)$ 有渐近性质:

$$f(\tau)\sim\begin{cases}\tau^{\mu-1}, & 当\ \tau\to 0,\\ 1, & 当\ \tau\to\infty.\end{cases} \tag{4.9}$$

我们考虑(4.8)式中的积分. 由(4.9)式，积分(4.5)式有渐近性质:

$$I(x)\sim\frac{D}{x^{\mu+1}},\qquad 当\ x\to\infty, \tag{4.10}$$

这里 D 为常数. 显然，$I(x)$ 对于 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$，$x\geqslant 0$ 的所有值都收敛. 考虑到(4.10)式与 $x^\mu+o(x^\mu)$ 在 $x=\infty$ 处为零，因此，(4.8)式中的积分

$$E=\int_0^\infty[x^\mu+o(x^\mu)]I(x)dx. \tag{4.11}$$

对于 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$ 的所有值都收敛.

我们在 $\frac{1}{2}\leqslant\mu<1$ 的假定下，导出了(4.3)式. 但当 $\mu=1$ 时，由于 $1/(-\mu)!=0$，

因此，由(4.3)式，$A_0(\mu=1)=0$. (4.3)式可用于 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$ 的整个范围.

现在我们来比较(4.8)式中各项的量级大小. 设 $\mu=1-\varepsilon$，其中 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$. 如果 ε 离开 0 较远，即 $\varepsilon=O(1)$，则由(4.3)，(4.7)式，$A_0=O(1)$，振幅 A 的首项为 $A_0(ka)^{-\mu}$. 即对于 $\varepsilon=O(1)$，

$$A\sim A_0(ka)^{-\mu}. \tag{4.12}$$

假定 ε 为可以与 $(k)^{-\delta}$ 相比较的小量，这里 δ 为正实数，则由 Taylor 展开，可得

$$\sin\mu\pi=\pi\varepsilon+O(\varepsilon^2). \tag{4.13}$$

$$\sin[(1-3\mu)\pi/4]=-1+O(\varepsilon^2), \tag{4.14}$$

$$\exp[-i(1-\mu)\pi/4]=1-\frac{\pi}{4}i\varepsilon+O(\varepsilon^2), \tag{4.15}$$

$$\mu^{\frac{1}{2}}=1+O(\varepsilon); \tag{4.16}$$

$$\Gamma(\mu)=1+O(\varepsilon). \tag{4.17}$$

把(4.13)—(4.17)式代入(4.8)式，我们得到 A_1 的表达式

$$A_1=[2iV_0B_1a+O(\varepsilon)]\cdot\{[-1+O(\varepsilon)]-\varepsilon E\}. \tag{4.18}$$

由于积分 E 对所有的 ε 都收敛，并且由(4.10)式，$I(x)$ 在 $x\to\infty$ 时小于 $\frac{D}{x^{1+1/3}}$; $x^\mu+o(x^\mu)$，当 $x\to\infty$ 时趋向于零，因此，它在 $x\to\infty$ 时有界. 由(4.11)式，我们看到积分 E 对于 ε 一致收敛，因此，在区间 $0\leqslant\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$ 上，E 是 ε 的连续函数，故 E 有界. 由(4.18)式，我们看到，当 $\varepsilon=O\left(\frac{1}{k^\delta}\right)$ 时，(4.8)式中包含积分的项可以忽略. 由(4.12)式，当 $\varepsilon=O(1)$ 时，(4.7)式中整个 $A_1(ka)^{-\mu-1}$ 项较 $A_0(ka)^{-\mu}$ 为高阶小量，可以忽略. 而且由(4.3)式(4.7)与(4.18)式，我们看到，只要 $\varepsilon=O\left(\frac{1}{k^\delta}\right)$，$0\leqslant\delta<1$，(4.12)式总是成立. 因此，对于 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$，在(4.8)式中省略包含积分的项，将不会影响 A 的渐近展式的首项. 由此，对于 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$ 的整个范围，我们得到

$$A\sim\frac{-iaV_0\exp[-i(1-\mu)\pi/4]}{(ka)^\mu}\left\{\frac{\pi B_1}{\mu^{\frac{1}{2}}(-\mu)!}+\frac{2B_1\mu\Gamma(\mu)\sin[(3\mu-1)\pi/4]}{ka}\right\}. \tag{4.19}$$

振幅表达式(4.19)在 $\frac{1}{2}\leqslant\mu\leqslant 1$ 的整个范围均匀有效. 当柱体壁面在水线点处垂直时，即 $\mu=1$，(4.19)式中第一项变为零，这时(4.19)式中第二项变成主要项；当 $\mu=1-O\left(\frac{1}{k}\right)$ 时，(4.19)式中的二项有相同的量级，因此，必须同时保留二项. Holford[1] 对于水线点壁面倾斜的情形，并且在柱体仅作垂直振荡的假定下，求得了(4.19)式中的第一项，但当令 $\mu\to 1$，即假定壁面趋向垂直时，他的结果并不能过渡到垂直壁面的结果. 但从我们的结果可以看到，当 μ 接近到等于 $1-O\left(\frac{1}{k}\right)$ 时，他的结果已不再适用；当 μ 再进一步接近 1 时，我们必须

用(4.19)式中的第二项作为首项.

让我们再来看一个例子. 对于半径为 a 的半浸润圆柱体,以最大速度为 V_0 作垂直振荡的情形,这时

$$\phi_0(x, y) = -\frac{a^2 V_0 \sin\theta}{R},$$

因此

$$p(x) = -\frac{\partial \phi_0(x,0)}{\partial y} = \frac{V_0 a^2}{x^2}. \tag{4.20}$$

对函数 $p(x)$, 在 $x = a$ 作 Taylor 展开

$$p(x) = V_0 - \frac{2V_0}{a}(x-a) + \cdots. \tag{4.21}$$

由于此时 $\mu = 1$, 比较(4.21)与(3.12)式,可得 $B_0 = 1$, $B_1 = -2$. 由(4.19)式,得

$$A \sim \frac{-iaV_0}{ka}\left\{\frac{-4\sin\frac{\pi}{2}}{ka}\right\} = \frac{4iaV_0}{(ka)^2}.$$

这正是 Ursell[2] 与 Grim[3] 所获得的结果.

公式(4.19)适用于柱体的任何振荡运动.

本文大部分工作是作者在 1982 年访问美国斯坦福大学数学系期间在 J. B. Keller 教授的直接指导与资助下完成的,作者在此表示深切的感谢. 回国后,对于谈镐生教授的热情的鼓励也表示感谢.

参 考 文 献

[1] Holfold, R. L., *Technical Report Dept. Math.*, Stanford University, 1965, No. 4,
[2] Ursell, F., *Proc. Roy. Soc.*, Ser. A, **220**(1955), 90—103.
[3] Grim, O., *Jahrbuch der Schiffbautechnischen Gesellschaft*, **47**(1953), 277—299.
[4] Ursell, F., *Quart J. Mech. Appl. Math.*, **7**(1954), 427—437.
[5] Karp, S. & Kotik, J., et al., *Technical Report*, No. 1, Technical Research Group, Inc., Melville, N. Y., 1960.
[6] Rhodes-Robinson, P. F., *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, **67** (1970), 423—442.
[7] ——————, *ibid.*, **67**(1970), 443—468.
[8] ——————, *ibid.*, **72**(1972), 83—94.
[9] Leppington, F. G., *J. Fluid Mech.*, **56**(1972), 101—119.
[10] Hermans, A. J., *J. Engng Math.*, **6**(1972), 323—330.
[11] Alker, G., *ibid.*, **9**(1975), 197—205.
[12] Davis, A. M. J., *J. Fluid Mech.*, **75**(1976), 791—807.
[13] Evans, D. V., *J. Inst. Math. Applications*, **17**(1976), 135—140.
[14] Rhodes Robinson, P. F., *Tech. Rep. Dept. Math.*, Stanford University, 1982.
[15] Tohn, F., *Comm. Pure. Appl. Math.*, **3**(1950), 45—101.