

变粘度柱状地幔上涌流对称轴上的 温度、速度和粘度分布

李 荫 亭

(中国科学院力学研究所,北京)

R. O. Meissner

(西德基尔大学地球物理研究所)

薛 恩

(北 京 医 学 院)

摘 要

本文对地幔粘度随温度和压力变化的牛顿流体,求得了控制上涌流动的流体力学方程组在对称轴处的渐近解。从而得到了对称轴上温度、上涌速度和粘度随深度的变化。计算结果对二组有代表性的地幔流变参数给出。结果表明,对称轴上的温度分布几乎与流变参数无关,而上涌速度则强烈依赖流变参数。

1972年, Morgan^[1]提出了地幔上涌流的概念,用以解释地表热点和火山岛链。但是,变粘度柱状地幔上涌流的流体力学结构和热结构至今未获圆满解决。本文给出了粘度随温度和压力变化的牛顿流体柱状上涌流动流体力学方程组在对称轴处的渐近解。从而给出了对称轴上流动参数的分布,为研究柱状上涌流的细致结构提供了一个重要的,必须给出的边界条件,使得用流体力学方法研究柱状上涌流的细致结构成为可能。

我们将在另一篇文章中给出变粘度牛顿流体柱状上涌流的流体力学结构和热结构。

一、数学分析

控制变粘度柱状上涌流的流体力学方程组可以写成^[2]。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\mu r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \rho g \alpha (T - T_{\infty}) = 0, \quad (1)$$

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial r} = K \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right), \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv) + \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (3)$$

其中 x 轴竖直向上, $x = 0$ 在岩石圈底, r 为径向坐标, $r = 0$ 为柱状上涌流的对称轴, u 为上涌速度, v 为径向速度, T 为温度, T_{∞} 为上涌流外缘地幔温度, ρ 是地幔物质的密度, g 是重

本文 1983 年 1 月 25 日收到, 7 月 7 日收到修改稿。

力加速度, k 为热导率, α 是膨胀系数, μ 是地幔粘度. 它们可表成温度和压力的函数^[3]

$$\begin{aligned}\mu &= \mu(T, p_0) = \frac{T}{2B} \exp \frac{E^* + p_0 V^*}{RT}, \\ &= \mu(T, x) = \frac{T}{2B} \exp \frac{g_{m_1} - g_{m_2} x}{T}.\end{aligned}\quad (4)$$

其中 $g_{m_1} = \frac{E^*}{R}$, $g_{m_2} = \frac{\rho g V^*}{R}$, E^* 是活化能, V^* 是活化体积, R 是气体常数, B 是一常数.

为了得到方程组(1)–(3)在 $r = 0$ 邻域的渐近解, 可写出 $T(x, r)$, $u(x, r)$ 在 $r = 0$ 关于 r 的 Maclaurin 展开

$$\begin{aligned}T(x, r) &= T_w(x) + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_w r + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_w r^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_w r^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_w r^4 + \dots, \\ u(x, r) &= u_w(x) + \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_w r + \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_w r^2 + \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_w r^3 + \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right)_w r^4 + \dots.\end{aligned}$$

其中下标 w 表示参数在 $r = 0$ 取值.

为了方便, 令

$$\begin{aligned}a_1(x) &= \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)_w, & a_2(x) &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)_w, \\ a_3(x) &= \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 T}{\partial r^3}\right)_w, & a_4(x) &= \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 T}{\partial r^4}\right)_w, \\ b_1(x) &= \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)_w, & b_2(x) &= \frac{1}{2!} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\right)_w, \\ b_3(x) &= \frac{1}{3!} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial r^3}\right)_w, & b_4(x) &= \frac{1}{4!} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial r^4}\right)_w.\end{aligned}$$

由于温度 T 和上涌速度径向分布在 $r = 0$ 处的轴对称性和光滑性, 我们得到

$$a_1 = a_3 = 0; \quad b_1 = b_3 = 0.$$

因此, 我们有

$$T(x, r) = T_w(x) + a_2(x)r^2 + a_4(x)r^4 + \dots, \quad (5)$$

$$u(x, r) = u_w(x) + b_2(x)r^2 + b_4(x)r^4 + \dots. \quad (6)$$

由方程(3), 可以推出 $v(x, r)$ 关于 r 在 $r = 0$ 的 Maclaurin 展开式为

$$v(x, r) = -\frac{1}{2} \frac{du_w}{dx} r - \frac{1}{4} \frac{db_2}{dx} r^3 + \dots. \quad (7)$$

利用方程(4), $\mu(x, r)$ 关于 r 在 $r = 0$ 的 Maclaurin 展开式可以写成

$$\mu(x, r) = \mu_w + a_2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_w r^2 + \left[\frac{1}{2} a_2^2 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_w + a_4 \left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_w \right] r^4 + \dots. \quad (8)$$

其中

$$\left(\frac{\partial \mu}{\partial T}\right)_w = \frac{\mu_w}{T_w} \left(1 - \frac{g_{m_1} - g_{m_2} x}{T_w}\right), \quad (9)$$

$$\left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2}\right)_w = \frac{\mu_w}{T_w^2} \left(\frac{g_{m_1} - g_{m_2} x}{T_w}\right)^2. \quad (10)$$

本文中, T, u, v, μ 的展开式中高于 r^4 的项忽略, 只保留展开式中的前面三项或二项. 将

T, u, v, μ 的近似展开式代入方程(1)和(2)。由于方程必须在 $r=0$ 邻域内任一点上满足,因此每个方程中 r^0, r^2, r^4 项的系数必须为零,从而可以推出方程组

$$4\mu_w b_2 + n(T_w - T_\infty) = 0, \quad (11)$$

$$2b_4\mu_w + a_2 b_2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_w + \frac{1}{8} n a_2 = 0, \quad (12)$$

$$4a_2 b_4 \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_w + 2a_4 b_2 \left(\frac{\partial \mu}{\partial T} \right)_w + a_2^2 b_2 \left(\frac{\partial^2 \mu}{\partial T^2} \right)_w + \frac{1}{6} n a_4 = 0, \quad (13)$$

$$u_w \frac{dT_w}{dx} = 4K a_2, \quad (14)$$

$$u_w \frac{da_2}{dx} + b_2 \frac{dT_w}{dx} - a_2 \frac{du_w}{dx} = 16K a_4, \quad (15)$$

$$u_w \frac{da_4}{dx} + b_2 \frac{da_2}{dx} + b_4 \frac{dT_w}{dx} - 2a_4 \frac{du_w}{dx} - \frac{1}{2} a_2 \frac{db_2}{dx} = 0, \quad (16)$$

其中 $n = \rho g \alpha$ 。

从方程(11)–(13)可得到

$$b_2 = -\frac{n}{4\mu_w} (T_w - T_\infty), \quad (17)$$

$$b_4 = G_1 a_2, \quad (18)$$

其中

$$G_1 = \frac{n}{8\mu_w} \left[(T_w - T_\infty) \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial T_w} - \frac{1}{2} \right], \quad (19)$$

$$a_4 = G_2 a_2^2. \quad (20)$$

其中

$$G_2 = \frac{\frac{1}{2\mu_w} \left[(T_w - T_\infty) \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial \mu_w}{\partial T_w} - \frac{1}{2} \right] \frac{\partial \mu_w}{\partial T_w} - \frac{1}{4} (T_w - T_\infty) \frac{1}{\mu_w} \frac{\partial^2 \mu_w}{\partial T_w^2}}{\frac{1}{2\mu_w} (T_w - T_\infty) \frac{\partial \mu_w}{\partial T_w} - \frac{1}{6}}. \quad (21)$$

将方程(17),(18)和(20)代入方程(14)–(16),可以得到三元非线性一阶常微分方程组

$$\frac{dT_w}{d\tilde{x}} = \frac{2K a_2}{u_w}, \quad (22)$$

$$\frac{da_2}{d\tilde{x}} = m_1 \frac{a_2^2}{u_w} + m_2 a_2^3 + m_3 a_2 + m_4 u_w a_2^2, \quad (23)$$

$$\frac{du_w}{d\tilde{x}} = n_1 \frac{1}{u_w} + n_2 a_2 + n_3 u_w a_2^2 + n_4 u_w + n_5 u_w^2 a_2. \quad (24)$$

边界条件

$$\left. \begin{aligned} T_w &= T_{w_0}, \quad u_w = 0, \quad \text{在 } \tilde{x} = 0, \\ T_w &= T_{w_0} + \Delta T_w, \quad \text{在 } \tilde{x} = -1, \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

其中 $\tilde{x} = \frac{x}{L}$ (L 是柱状上涌流的高度),

$$m_1 = \frac{2K}{b_2} \frac{\partial b_2}{\partial T_w} - \frac{4K}{b_2} G_1 + 8KG_2,$$

$$m_2 = - \left(\frac{4K}{b_2} \frac{\partial G_2}{\partial T_w} + 32K \frac{G_2^2}{b_2} \right),$$

$$m_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{g_{m_1}}{T_w L} - \frac{\frac{dT_\infty}{d\tilde{x}}}{T_w - T_\infty} \right),$$

$$m_4 = - \frac{1}{b_2} \left(\frac{\partial G_2}{\partial T_\infty} \frac{dT_\infty}{d\tilde{x}} + \frac{\partial G_2}{\partial \tilde{x}} \right),$$

$$n_1 = 4Kb_2, \quad n_2 = m_1 - 16KG_2, \quad n_3 = m_2, \quad n_4 = m_3, \quad n_5 = m_4.$$

求解方程(22)–(25)的问题是常微分方程组的边值问题。并且这个方程组是所谓病态(stiff)常微分方程组。我们采用向后隐式差分格式,用牛顿叠代程序用计算机求解。

二、计算结果

本文采用典型地幔参数数据^[3]: $\rho = 3.3$ 克/厘米³, $g = 10^3$ 厘米/秒², $\alpha = 3.5 \times 10^{-5}$ /度, $K = 1 \times 10^{-2}$ 厘米/秒, $L = 600$ 公里, $T_{w_0} = 1450^\circ\text{K}$, $\Delta T_w = 600^\circ\text{K}$, $T_\infty = T_{w_0} - \beta x$, $\beta = 10^{-5}^\circ\text{K}/$ 厘米,并对二组典型的地幔流变参数(以克·厘米·秒单位制给出)

牛顿流体 I:

$$\frac{1}{2B} = 0.208 \times 10^3, \quad g_{m_1} = 4.770 \times 10^4, \quad g_{m_2} = 0.430 \times 10^{-3}.$$

牛顿流体 II:

$$\frac{1}{2B} = 2.760 \times 10^3, \quad g_{m_1} = 5.222 \times 10^4, \quad g_{m_2} = 0.352 \times 10^{-3}$$

进行计算。计算结果表示在图 1—4 中。

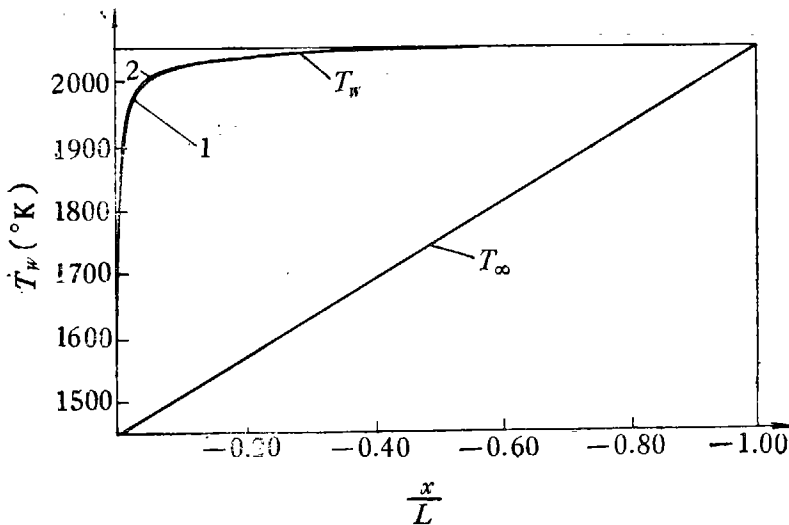


图 1 对称轴上的温度分布
1——牛顿流体 I; 2——牛顿流体 II.

图 1 给出了对称轴上的温度 T_w ，随无量纲深度 $\frac{x}{L}$ 的变化曲线。可以看出，在接近岩石圈底部时， T_w 变化十分显著，而在远离岩石圈的深度上， T_w 变化很少。对牛顿流体 I 和牛顿流体 II 两组流变参数， T_w 曲线彼此相差无几以致于我们可以认为二条曲线是相同的。这表明，对称轴上温度随深度变化的曲线几乎与流变参数无关。

图 2 给出对称轴粘度随深度的变化曲线。在对称轴的每一个深度上，牛顿流体 II 的粘度值总比牛顿流体 I 的粘度值高出 1—2 个量级，并且可以看出，在接近岩石圈底处存在着对称轴上粘度分布的极小值。

图 3 和图 4 分别给出牛顿流体 I 和牛顿流体 II 在对称轴上的上涌速度分布曲线。可以看出：二条曲线形状十分相似，但幅度差别很大，牛顿流体 I 的上涌速度峰值约为 350 厘米/年，牛顿流体 II 的上涌速度峰值约为 37 厘米/年。这个结果表明，对称轴上的上涌速度强烈依赖于地幔物质的流变参数。

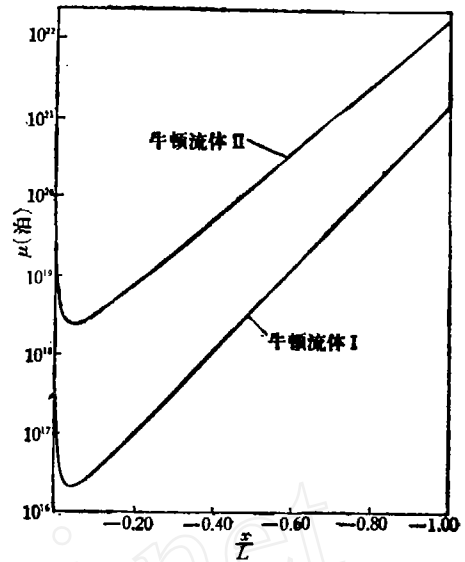


图 2 对称轴上粘度 μ_w 的分布

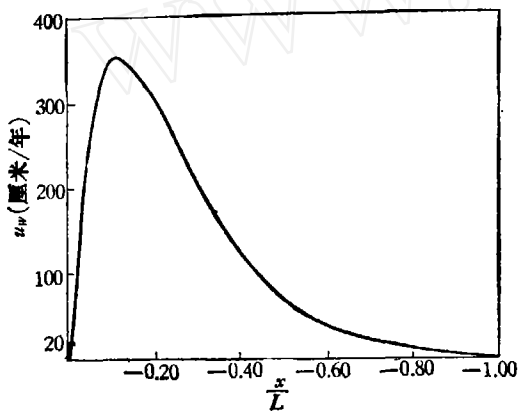


图 3 对称轴上的上升速度分布(牛顿流体 I)

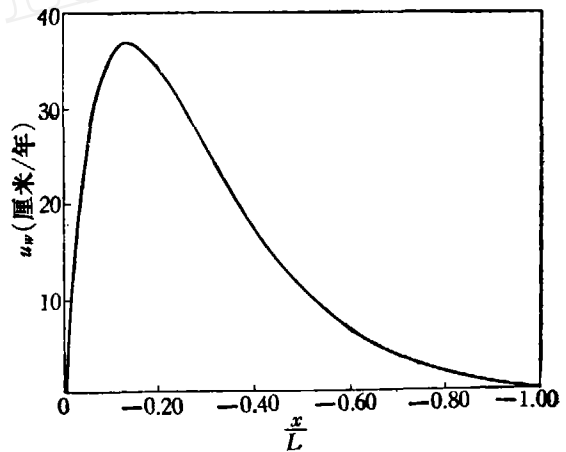


图 4 对称轴上的上升速度分布(牛顿流体 II)

参 考 文 献

- [1] Morgan, W. J., *Am. Assoc. Petrol. Geol. Bull.*, 56(1972), 203—213.
- [2] 关德相等, *中国科学*, 1979, 7: 689—697.
- [3] Yuen, D. A. & Schubert, G., *Journal of Geophysical Research*, 81(1976), 2499—2510.