水面上振荡柱体的附加质量矩阵与辐射阻尼矩阵

陈 嗣 熊

(中国科学院力学研究所,北京)

假定水的运动是由部份浸润的柱体的小振幅周期运动所产生的，水是不可压缩的、无粘性的、无旋的．设C表示柱体横截面的湿润曲线，坐标轴 ox 在C所在的平面沿着未扰动的自由表面，oy 在C平面垂直向下指向流体，坐标原点o在柱体内部沿x轴的中点． o到曲线C与x轴的交点的距离为 a． 流体在 $y\geqslant 0$ 以角频率ω的运动可以用速度势 $\phi(x, y)\exp(-i\omega t)$ 来描述．则 $\phi(x, y)$ 满足以下方程:

$$\nabla^2\phi=0,\ \text{在}C\text{外},\ y\geqslant 0, \tag{1}$$

$$k\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}=0,\ k=\frac{\omega^2}{g},\ \text{在}C\text{外},\ y=0, \tag{2}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=v(x, y),\ \text{在}C\text{上},\ n\text{为}C\text{的外法向单位矢量}, \tag{3}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}=0,\ \rho\text{为离开}(a, 0)\text{点或}(-a, 0)\text{点的距离}, \tag{4}$$

$$\phi(x, y)\to A\exp[ik(x-a)-ky],\ \text{当}\ x\to+\infty, \tag{5}$$

这里g为重力加速度；$v(x, y)$ 为 x, y 的解析函数，由它我们可以考虑任意的振荡运动；对于 $x\to-\infty$，我们有类似于(5)式的辐射条件；对于 $y\to\infty$，有 $\phi(x, y)\to 0$; A为待定常数．令

$$\phi(x, y)=\phi_0(x, y)+\psi(x, y), \tag{6}$$

这里 $\phi_0(x, y)$ 满足以下方程:

$$\nabla^2\phi_0=0,\ \text{在}C\text{外},\ y\geqslant 0, \tag{7}$$

$$\phi_0(x, 0)=0,\ |x|\geqslant a, \tag{8}$$

$$\frac{\partial\phi_0}{\partial n}=v(x, y),\ \text{在}C\text{上}, \tag{9}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial\phi_0}{\partial\rho}=0,\ \text{在}(a, 0)\text{点或}(-a, 0)\text{点}, \tag{10}$$

$$\phi_0\to 0,\ \text{当}\ r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\to\infty. \tag{11}$$

把式(6)代入(1)—(5)式,并考虑到(7)—(11)式,我们可得 $\psi(x, y)$ 所满足的方程:

$$\nabla^2\psi=0,\ \text{在}C\text{外},\ y\geqslant 0, \tag{12}$$

本文 1983 年 1 月 25 日收到.

$$k\phi+\frac{\partial\phi}{\partial y}=p(x),\ |x|\geqslant a,\ y=0, \tag{13}$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=0,\ 在 C 上, \tag{14}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\rho\frac{\partial\phi}{\partial\rho}=0,\ 在(a,0)点或(-a,0)点, \tag{15}$$

$$\phi(x,y)\to A\exp[ik(x-a)-ky],\ 当\ x\to+\infty, \tag{16}$$

这里

$$p(x)=-\left(\frac{\partial\phi_c}{\partial y}\right)_{y=0}.$$

当 ϕ_0 求出后，$p(x)$ 就已知了．关于 ϕ_0 的问题(7)—(11)式是一个位势流问题．我们已由式(7)—(10)式求得了 $p(x)$ 在 $x=a$ 附近的局部表达式*

$$p(x)=-\phi_{0y}(x,0)=v_0B_0\left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu-1}+v_0B_1\left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu}$$
$$+o\left[\left(\frac{x-a}{a}\right)^{\mu}\right], \tag{17}$$

这里 v_0 为振荡最大速度，B_0、B_1 为实常数，$\mu=\frac{\pi}{2\gamma}$，γ 为在 $(a,0)$ 点曲线 C 的指向流体的切矢量与 x 正方向的夹角．对于 $x=-a$ 点，我们可得类似的表达式．用文献[1]的方法与式(17)，我们可求得关于 ϕ 的问题(12)—(16)式当 $ka\to\infty$ 时的渐近解*

$$A\sim\frac{-iav_0\exp[-i(1-\mu)\pi/4]}{(ka)^{\mu}}\left\{\frac{\pi B_c}{\mu^{\frac{1}{2}}(-\mu)!}\right.$$
$$\left.+\frac{2B_1\mu\Gamma(\mu)\sin[(3\mu-1)\pi/4]}{ka}\right\}, \tag{18}$$

这里常数 B_0，B_1 将由问题(7)—(11)式的整体解来确定．

设

$$(n_1,n_2,n_3)=(n_x,n_y,xn_y-yn_x), \tag{19}$$

这里 n_x、n_y 为 $\boldsymbol{n}$ 在 x、y 轴上的投影．假定 $\phi_\alpha(\alpha=1,2,3)$ 满足

$$\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}=n_\alpha,\ 在 C 上, \tag{20}$$

与方程(1)、(2)、(4)、(5)．设柱体沿 x 轴、y 轴的平动速度与绕柱体轴的转动角速度分别为 $v_1\exp(-i\omega t)$、$v_2\exp(-i\omega t)$ 与 $v_3\exp(-i\omega t)$，则显然总速度势 ϕ 满足

$$\frac{\partial\phi}{\partial n}=\sum_{\alpha=1}^{3}v_\alpha n_\alpha,$$

即

$$v(x,y)=\sum_{\alpha=1}^{3}v_\alpha n_\alpha.$$

ϕ_α 满足方程(1)、(2)、(20)、(4)和(5)．对应于分解式(6)，我们有

$$\phi_\alpha(x,y)=\phi_{0\alpha}(x,y)+\psi_\alpha(x,y),\ (\alpha=1,2,3), \tag{21}$$

---

* 详细推导可参考作者的文章"具任意横截面的振荡柱体的二维短表面波"，中国科学(待发表)．

这里 $\phi_{0\alpha}$ 满足(7)—(11)式；ϕ_α 满足(12)—(16)式．这里对应于(16)式中的 A，我们有 A_α 对应于 ϕ_α．由文献[2]，附加质量矩阵的元素 $\mu_{\beta\alpha}(\beta=1, 2, 3;\ \alpha=1, 2, 3)$ 为

$$\mu_{\beta\alpha}=\rho\int_C Re(\phi_\beta n_\alpha)ds=\rho\int_C Re\left(\phi_\beta\frac{\partial\phi_\alpha}{\partial n}\right)ds. \tag{22}$$

把式(21)代人，并利用(14)式，我们得到

$$\mu_{\beta\alpha}=\rho\, Re\left\{\int_C(\phi_{0\beta}+\phi_\beta)\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial n}ds\right\}=\rho Re\left\{\int_C\phi_{0\beta}\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial n}ds\right.$$
$$\left.+\int_C\left(\phi_\beta\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial n}-\phi_{0\alpha}\frac{\partial\phi_\beta}{\partial n}\right)ds\right\}. \tag{23}$$

对(23)式中的最后一个积分，在区域：C 外，$y\geqslant 0$ 与 $x=\pm\infty$ 内，用 Green 定理，并注意到式(8)与(11)，我们可得

$$\mu_{\beta\alpha}=\rho Re\left\{\int_C\phi_{0\beta}\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial n}ds-\int_{-\infty}^{-a}\left(\phi_\beta\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial y}\right)_{y=0}dx\right.$$
$$\left.-\int_a^\infty\left(\phi_\beta\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial y}\right)_{y=0}dx\right\}. \tag{24}$$

我们希望求得 $\mu_{\beta\alpha}$ 当 $ka\to\infty$ 时的渐近表式．为此，令

$$\phi_\beta=-\left(\frac{1}{k}\frac{\partial\phi_{0\beta}}{\partial y}\right)+\frac{1}{k}\phi_{1\beta}, \tag{25}$$

则利用(8)式，由(13)式可得

$$\phi_{1\beta}+\frac{1}{k}\frac{\partial\phi_{1\beta}}{\partial y}=0,\ |x|\geqslant a,\ y=0. \tag{26}$$

类似地，由(12)、(14)、(16)式，我们可获得对应的方程．如果我们用文献[3]中类似的假定

$$\phi_{1\beta}\sim\phi_{10\beta},\ \text{当}\ ka\to\infty, \tag{27}$$

则由(26)式，可得

$$\phi_{10\beta}=0.\ \text{当}\ |x|\geqslant a,\ y=0. \tag{28}$$

把(25)式代人(24)式中，并利用(27)、(28)式，最后可得

$$\mu_{\beta\alpha}\sim\rho Re\left\{\int_C\phi_{0\beta}\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial n}ds+\frac{1}{k}\int_F\frac{\partial\phi_{0\beta}}{\partial y}\frac{\partial\phi_{0\alpha}}{\partial y}dx\right\}. \tag{29}$$

这里 F 表示积分沿自由表面，从 $-\infty$ 至 $-a$，再从 a 至 $+\infty$ 积分．由公式(29)，我们看到附加质量矩阵只和 $\phi_{0\alpha}$、$\phi_{0\beta}$ 有关，而与 ϕ_α、ϕ_β 无关；由(7)—(11)式，我们知道 $\phi_{0\alpha}$、$\phi_{0\beta}$ 是位势流问题的解，它们并没有波的性质．因此，附加质量矩阵只和零级近似的位势流解有关．

由文献[2]，对于辐射阻尼矩阵的元素 $\lambda_{\beta\alpha}(\beta=1, 2, 3;\ \alpha=1, 2, 3)$，我们有

$$\lambda_{\beta\alpha}=\rho\omega\int_C I_m(\phi_\beta n_\alpha)ds=\rho\omega k\int_{x=+\infty}\phi_\alpha\phi_\beta^*ds$$
$$+\rho\omega k\int_{x=-\infty}\phi_\alpha\phi_\beta^*ds. \tag{30}$$

将(18)式与(5)式代人，并设当 $x\to+\infty$ 时，式(18)中的 μ、B_0、B_1 都添加上标"+"；而当 $x\to-\infty$ 时，式(18)中的 μ、B_0、B_1 都添加上标"−"．我们得到

$$\lambda_{\beta\alpha}\sim\frac{\rho\omega a^2v_0^2}{2(ka)^{2\mu^+}}\left\{\frac{\pi B_{0\alpha}^+}{(\mu^+)^{\frac{1}{2}}(-\mu^+)!}+\frac{2B_{1\alpha}^+\mu^+\Gamma(\mu^+)\sin[(2\mu^+-1)\pi/4]}{ka}\right\}$$

$$
\begin{aligned}
&\cdot\left\{\frac{\pi B_{0\beta}^{+}}{(\mu^{+})^{\frac{1}{2}}(-\mu^{+})!}+\frac{2B_{1\beta}^{+}\mu^{+}\Gamma(\mu^{+})\sin[(2\mu^{+}-1)\pi/4]}{ka}\right\}\\
&+\frac{\rho\omega a^{2}v_{0}^{2}}{2(ka)^{2\mu^{-}}}\left\{\frac{\pi B_{0\alpha}^{-}}{(\mu^{-})^{\frac{1}{2}}(-\mu^{-})!}+\frac{2B_{1\alpha}^{-}\mu^{-}\Gamma(\mu^{-})\sin[(2\mu^{-}-1)\pi/4]}{ka}\right\}\\
&\cdot\left\{\frac{\pi B_{0\beta}^{-}}{(\mu^{-})^{\frac{1}{2}}(-\mu^{-})!}+\frac{2B_{1\beta}^{-}\mu^{-}\Gamma(\mu^{-})\sin[(2\mu^{-}-1)\pi/4]}{ka}\right\}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

由式(31)可以看到,如果 $\mu^{+}<\mu^{-}$, 也即在 $(a, 0)$ 点处,C 与 x 轴正方向的夹角较 $(-a, 0)$ 点处,C 与 x 轴负方向的夹角为大, 则对辐射阻尼矩阵的贡献将主要来自沿 x 轴正方向的波,也即对于沿 x 轴负方向传播的波可以忽略.

由(18)式与(5)式,我们也很易求得振荡柱体对流体所做的平均功率,这里不再列出.

致谢: 本工作是作者在 1982 年访问美国斯坦福大学数学系期间,在 J. B. Keller 教授的指导与资助下开始的,作者向他表示衷心的感谢. 回国后,对于谈镐生教授的热情的鼓励,作者也表示感谢.

参 考 文 献

[1] Holford, R. L., Technical Report, Dept. Math., Stanford University, 1965, No. 4.

[2] Mei, C. C., *The Applied Dymamics of Ocean Surface Waves*, Chap. 7, Wiley-Interscience, New York, 1982.

[3] Rhodes-Robinson, P. F., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 70(1971), 311—321.