

辐射非平衡流的运动论研究 及对气流激光的应用¹⁾

高智

(中国科学院力学研究所)

提要 本文探讨激光介质气体非平衡流的运动论处理,引进了与分子速度有关的新的增益(GMS)、发展了近似求解方法。对CO₂气流激光的算例,本理论的零级近似已较满意。其结果在整个压力范围内适用。高压时与常用的速率方程理论(RET)的结果相一致;流速为零时结果简化为气体(不流动)激光的熟知的相应关系。需要指出的是:在低压加宽常数 $\eta < 0.2$ 时,常用的RET即使引进修正压力效应的线性因子,仍不能正确估计非均匀加宽效应的影响,例如 $\eta = 0.02$, $\xi = 0, 1.0$ 时, \bar{I}_R/\bar{I}_K 分别约为8和20, ξ 是频移参数, \bar{I}_R 和 \bar{I}_K 分别是RET和本理论之无量纲辐射强度。

主要符号表

c 光速	p 气压
c_p 定压比热	$R_i = 1 - a_i - t_i$ 镜子的反射率 a_i 是吸收率, t_i 是透射率
F_i, F_i^0 i 能级粒子的速度分布函数及平衡速度分布函数	T, u 气流温度和流速
$f_i, f_i^0 f_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_i dV_x dV_z,$ $f_i^0 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_i^0 dV_x dV_z$	V, V_T 粒子速度矢量和热速度矢量
f 光子分布函数	$\gamma_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i dV_x dV_z$ 泵浦速率
G 增益系数	$\nu, \nu_{i, i-1}$ 光频, i 到 $(i-1)$ 能级的跃迁频率
G_T 与分子速度相关连的增益	$\Delta\nu_D, \Delta\nu_N$ 非均匀和均匀加宽型线半峰值处的全宽度
h Planck 常数,或气流静焓	ξ 频移参数或变换坐标
J, J_s, J_t 辐射强度、饱和强度和透射辐射强度	η 加宽参数
k_T, k_r 弹性碰撞速率,辐射特征速率	λ_1, λ_2 本征值
k_{ij}, K_{ij} 非弹性碰撞速率	ρ 气流密度
$L_i (i = 1, 2, 3)$ 光腔沿坐标轴方向的长度	δ 常数
l, l_x, l_y, l_z 光传播方向矢量及三个方向余弦	0 右上角标0指沿气流方向,激光振荡的起始位置
m 分子质量	
n_i i 能级粒子数密度	

本文于1980年11月收到。

1) 本文曾先后在第二届全国流体力学会议和第一届亚洲流体力学会议(1980, 12月, Bangalore, India)上交流。

一、引 言

辐射非平衡流研究辐射与气流运动之间的相互作用, 它强调辐射的粒子特性而不考虑波动结构^[1-4]. 大体可分成两类: 1) $K_{cn} > K_r$, 即在物理气体动力学中研究的情况^[1-3], K_{cn} 和 K_r 分别是分子间非弹性碰撞和辐射交换的特征速度, 在这种情况下, 分子在量子能级上的分布为碰撞过程所控制, 能量的辐射传输则是一个非平衡过程. 2) $K_{cn} \leq K_r$ 的情况, 例如气流激光^[4,9], 其特点是存在反 Boltzmann 分布和激光发射. 为了计算激光介质气体的运动及其辐射特性, 通常联立求解流体力学、辐射传输和速率方程组^[4-6](速率方程组描述能级布居数的变化)、方便起见称作速率方程理论 (RET). 在 RET 中, 假设了同一能级内不同速度的粒子能够与单色辐射场等地发生作用, 因而不能正确地反映非均匀加宽效应. 正如文献 [6] 作者们指出的, RET 并不适用于中到低气压情况, 只适用于高气压情况.

按照辐射理论知道, 只有频率共振分子^[7] (即分子的吸收或诱导发射的 Doppler 频率与辐射场频率相近) 才能直接与单色辐射场相互作用. 故若单色辐射场很强、气压又低即非均匀加宽占优势时, 一个能级内的频率共振分子将会“过剩”(吸收情况)或“不足”(发射情况), 即该能级的速度分布函数将分别形成“突起”或“烧孔”^[7]. 要把频率共振分子与那些 Doppler 频移过大不能直接影响辐射场的分子区分开来, 在 RET 中是不可能的. 有必要探讨更合理的模型. Lamb 理论^[8]及其推广对气体性质不随时间和空间而变化的情况、对非均匀加宽效应作了完善的处理. 对气体性质随流向距离而变化的情况即气流激光, 本文做某些运动论的探讨. 运动论方程描述能级粒子的速度分布函数的变化, 运动论研究能够完善地刻划辐射场与处于热和宏观运动的气体粒子之间的相互作用. 不过求解关于流场、弛豫过程和辐射传输相耦合的联立方程组十分困难. 本文在物理上引进与分子热速度相关连的增益的新概念, 同时发展了近似解法来克服遇到的困难, 用于气流激光颇为有效.

二、运动论模型

1. 基本方程组 关于量子能级的运动论方程组和稳态辐射传输方程分别为:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_i}{\partial t} - (\mathbf{V} + \mathbf{V}_{Ti}) \text{grad} F_i &= \Gamma_i + k_T (F_i^0 - F_i) + \int K_{i+1,i} F_{i+1} \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}_i) d\mathbf{V}_{i+1} d\mathbf{V}' \\ &- \int K_{i,i-1} F_i d\mathbf{V}_{i-1} - \int K_{i,i+1} F_i d\mathbf{V}_{i+1} + \int K_{i-1,i} F_{i-1} \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}_i) d\mathbf{V}_{i-1} d\mathbf{V}' \\ &+ \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} f_v \phi_{i+1,i} (B_{i+1,i} \alpha_{i+1} F_{i+1} - B_{i,i+1} \alpha_i F_i) dv d\Omega \\ &- \int_0^{\infty} \int_0^{4\pi} f_v \phi_{i,i-1} (B_{i,i-1} \alpha_i F_i - B_{i-1,i} \alpha_{i-1} F_{i-1}) dv d\Omega \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$c \mathbf{l} \text{grad} f_v = f_v \sum_i \int \phi_{i,i-1} (B_{i,i-1} \alpha_i F_i - B_{i-1,i} \alpha_{i-1} F_{i-1}) dv' \quad (2.2)$$

$$\phi_{i,i-1} = \frac{\Delta v_N}{2\pi} \left\{ \left[v - v_{i,i-1} \left(1 + \frac{1}{c} \mathbf{V}_T \cdot \mathbf{l} \right) \right]^2 + \left(\frac{\Delta v_N}{2} \right)^2 \right\}^{-1} \quad (2.3)$$

方程组 (2.1) 描述初始非平衡分布向局部平衡 Boltzmann-Maxwell 分布的弛豫过程. 在

(2.1)中,弹性碰撞积分已用 B-G-K 模型^[1]取代,非弹性碰撞项采用唯象的表示,在非弹性碰撞及辐射项中只考虑单量子跃迁,多量子跃迁通常可以忽略;辐射压力、自发辐射和散射的贡献也已忽略。 $K_{i+1,i}$ 表示 i 能级给定速度类增加一个粒子、 $(i+1)$ 能级同时失掉一个粒子的碰撞交换速率常数; $K_{i,i-1}$ 表示 $(i-1)$ 能级增加一个粒子、 i 能级给定速度类同时损失一个粒子的交换速率常数, $K_{i+1,i}$ 和 $K_{i,i+1}$ 彼此相关连、它们之间的关系可由细致平衡原理获得。 T_i 为泵浦项,如电子激励、光激励和化学反应激励等。

2. 与分子速度相关连的增益 (GMS) 当特征辐射速率 $K_r (K_r \approx f_v \phi_{i,i-1} B_{i,i-1} \alpha_i)$ 大于特征非弹性碰撞速率 $K_{en} (K_{en} \approx \int K_{i,i-1} d\mathbf{V}_{i-1})$ 且可与弹性碰撞速率 k_T 相比较时,在能级谱线形中只有频率共振分子(即吸收或诱导发射的 Doppler 频率与单色辐射场频率一致的分子)才能与单色辐射场直接发生作用,谱线中其它粒子的 Doppler 频移过大不能直接与辐射场发生作用。故对能级谱线形的局部变形来说,辐射交换可与弹性碰撞交换相竞争,能级速度分布函数可能在局部地方产生“突起”或“烧孔”^[7]。为了描述这一物理过程,我们引入与分子速度相关连的增益 G_{T_i} (GMS), G_{T_i} 的定义为:

$$G_{T_i} = \frac{2}{c\pi\Delta\nu_N} (B_{i,i-1}\alpha_i F_i - B_{i-1,i}\alpha_{i-1} F_{i-1}) \quad (2.4)$$

$G_{T_i}\phi_{i,i-1}$ 表示单位分子速度间隔、单位立体角之增益系数。把 G_{T_i} 对分子表观频率 ν' 从 $-\infty$ 到 ∞ 积分得到通常意义下的均匀加宽增益系数 G_h

$$G_{h,i} = \int G_{T_i} d\nu' \quad (2.5)$$

正像气体动力学中对 G_h 做近似可使问题得到简化一样^[1,2],对 G_{T_i} 做近似有可能使与分子热运动有关的问题得到简化。

3. 近似解法 G_{T_i} 只是分子表观频率 ν' 的函数,故在(2.1)中可把 G_{T_i} 提出到对频率 ν 和对立体角 Ω 双重积分号的外面;若把 G_{T_i} 形式地看成是 f_{ν_i} 和 $(F_i^0 - F_i)$ 的函数,则可由(2.1)求出 G_{T_i} 的近似解。另一方面,我们求(2.1)的如下双参数摄动解:

$$F_i = \sum_{j=0} \sum_{k=0} \left(\frac{u}{L_1 k_T} \right)^j \left(\frac{u}{L_1 k_T} \right)^k F_i^{jk} \quad (2.6)$$

显然 F_i^{00} 是 Maxwell 分布函数, F_i^{10} 为 Chapman-Enskog 解。把 G_{T_i} 的近似解和 F_i 的摄动解代入式(2.2),辐射传输方程(2.2)即可求解,把式(2.2)的解再与宏观运动方程(即运动论方程的矩)联立求解,即可求出流场变量 p 、 T 和流速。

利用上述概念和方法能够处理如下的问题: 1) 弱辐射情况, 2) 速度分布函数的时、空变化为次要的情况, 3) 辐射强度高、频率为分立且分立数目为有限的情况。对于 CO_2 气流激光的情况,零级解已比常用的速率方程理论 (RET)^[4-6] 的结果为好。

三、气流激光

CO_2 气流激光中光束方向垂直于流动方向(见图 1),光腔内的流动近似为一维流、粘性影响可以忽略,泵浦作用均匀连续。 CO_2 激光气体混合物的分子弛豫模型与文献[5]一致,弛豫模型由五个能级群组成(见图 2),故需要引进五个速度分布函数,即 $F_i (i = 0, 1, 2, 3)$ 和 $F_{0'}$, 0 指 CO_2 振动基态, 1 和 2 分别指 CO_2 对称-弯曲和非对称振动模, 0' 和

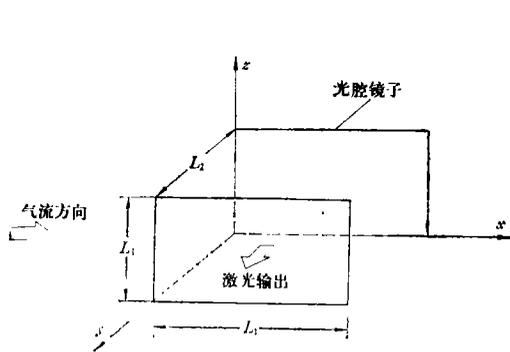


图 1 光腔示 图和坐标系

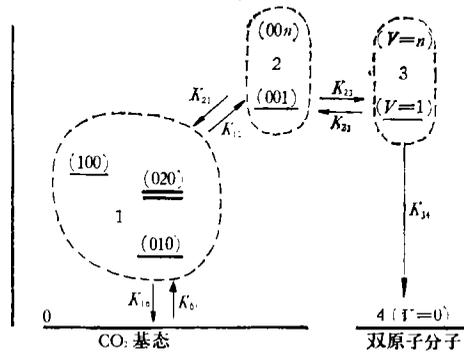


图 2 分子系统弛豫模型

3 指双原子分子的基态和振动模。CO₂ 的 P 分支激光跃迁发生在振转能级 (0, 0, 1; j) 和 (1, 0, 0; j + 1) 之间, j 是转动量子数。叠置在每一振动能级上的一系列转动能级未在图 3 示出, 但转动能级的影响已吸收在因子 α_1 和 α_2 中。

激光束与 y 轴平行 $\mathbf{l} \cdot \mathbf{V}_r = V_{T_y}$, 分子热速度的 x 和 z 分量不影响辐射场, 故可把式(2.1)对 V_{T_x} 和 V_{T_z} 取积分, 得到关于 $f_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_i dV_{T_x} dV_{T_z}$ 的运动论方程

$$u \frac{\partial f_1}{\partial x} = \gamma_1 + k_T(f_1^0 - f_1) + k_{21}f_2 - k_{10}f_1 + f_y \phi_{21}(B_{21}\alpha_2 f_2 - B_{12}\alpha_1 f_1) \quad (3.1)$$

$$u \frac{\partial f_2}{\partial x} = \gamma_2 + k_T(f_2^0 - f_2) + k_{32}f_3 - k_{23}f_2 - k_{21}f_2 - f_y \phi_{21}(B_{21}\alpha_2 f_2 - B_{12}\alpha_1 f_1) \quad (3.2)$$

$$u \frac{\partial f_3}{\partial x} = \gamma_3 + k_T(f_3^0 - f_3) - k_{32}f_3 + k_{23}f_2 \quad (3.3)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} (f_0 + f_1 + f_2) dV_{T_y} = \text{常数}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} (f_{0'} + f_3) dV_{T_y} = \text{常数} \quad (3.4)$$

$$\frac{\partial f_y}{\partial y} = \frac{f_y}{c} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_{21}(B_{21}\alpha_2 f_2 - B_{12}\alpha_1 f_1) d\nu' \quad (3.5)$$

在式 (3.1)–(3.3) 的推导中采用了如下的近似

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{V}_{T_i} \text{grad} F_i dV_{x_i} dV_{z_i} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\iint V_{T_{xi}} F_i dV_{x_i} dV_{z_i} \right) \\ &+ \frac{\partial}{\partial y} \left(\iint V_{T_{yi}} F_i dV_{x_i} dV_{z_i} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\iint V_{T_{zi}} F_i dV_{x_i} dV_{z_i} \right) \\ &\approx V_{T_{yi}} \frac{\partial f_i}{\partial y} \approx 0 \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\int K_{i+1,i} F_{i+1} \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}_i) d\mathbf{V}_{i+1} d\mathbf{V}' \approx k_{i+1,i} F_{i+1} \quad (3.7)$$

$$\begin{aligned} \int K_{i-1,i} F_{i-1} \delta(\mathbf{V}' - \mathbf{V}_i) d\mathbf{V}_{i-1} d\mathbf{V}' &\approx k_{i-1,i} F_{i-1} \ll \int K_{i,i-1} F_i d\mathbf{V}_{i-1} \\ &\approx k_{i,i-1} F_i \end{aligned} \quad (3.8)$$

式(3.6)表示 f_i 沿 y 方向的变化已被忽略。式(3.7)是非弹性碰撞项的另一种唯象表示, 它实际上与上节的唯象表示是一致的。式 (3.8) 表示 i 到 (i - 1) 能级的跃迁速率大于逆

过程即 $(i-1)$ 到 i 能级跃迁的速率。但 $k_{23}F_2$ 可与 $k_{32}F_3$ 相比较, 这是因为双原子分子振动模与 CO_2 非对称振动模之间的交换为近共振。

辐射在镜面上满足如下边界条件

$$y = 0, J_0^+ = R_1 J_0^-; y = L_2, J_{L_2}^- = R_2 J_{L_2}^+ \quad (3.9)$$

其中 J^+ 和 J^- 分别为沿 y 正和负方向传播的辐射强度, $J = J^+ + J^-$, $J = ch\nu f_\nu$ 。

四、求 解

对于单色辐射, 为了运算的方便把 G_T 改写为

$$G_T = \frac{1}{c} \phi_{21} (B_{21} \alpha_2 f_2 - B_{12} \alpha_1 f_1) \quad (4.1)$$

利用(3.1), (3.2)和(4.1)导出 G_T 的控制方程为

$$\begin{aligned} s_0 \frac{\partial G_T}{\partial \xi} + \left[s_0 (k_{21} + s_2 k_{23} + s_1 k_{10}) + \frac{J}{h\nu} \right] G_T \\ = s_2 r_2 - s_1 r_1 - \sum_{\lambda=1}^2 s_i k_{i\lambda} (f_i^0 - f_i) + s_2 k_{32} f_3 - s_1 (k_{21} + s_2 k_{23} - s_2 k_{10}) f_b \end{aligned} \quad (4.2)$$

其中 $\xi = \int \frac{1}{u} dx$

$$f_b = f_1 + f_2, f_2 = s_1 f_b + s_0 G_T, f_1 = s_2 f_b - s_0 G_T$$

$$s_0 = c [(B_{21} \alpha_2 + B_{12} \alpha_1) \phi_{21}]^{-1}, s_1 = B_{12} \alpha_1 (B_{21} \alpha_2 + B_{12} \alpha_1)^{-1}, s_1 + s_2 = 1 \quad (4.3)$$

按照式(2.4), f_i 的双参数展开应为

$$\begin{aligned} f_i = \sum_{j=0} \sum_{k=0} \left(\frac{u}{L_1 k_T} \right)^j \left(\frac{u}{L_1 k_r} \right)^k f_i^{jk} \quad (i = 1, 2) \\ f_3 = \sum_{j=0} \left(\frac{u}{L_1 k_T} \right)^j f_3^j \end{aligned} \quad (4.4)$$

把式(4.4)代入式(3.1)–(3.3)以及式(4.1), 得到 f_i 和 G_T 的零级解为

$$f_1^0 - f_2^0 = -(f_2^0 - f_1^0) \approx \frac{f_2 \phi_{21}}{k_T} (B_{21} \alpha_2 f_2^0 - B_{12} \alpha_1 f_1^0) \approx 0 \quad (4.5)$$

$$G_T^0 = \frac{\phi_{21}}{c} (B_{21} \alpha_2 f_2^0 - B_{12} \alpha_1 f_1^0) \approx \frac{\phi_{21}}{c} (B_{21} \alpha_2 f_2^0 - B_{12} \alpha_1 f_1^0) \quad (4.6)$$

f_i^0 为 Maxwell 分布, 即

$$f_i^0 \approx f_i^0 = n_i M(T) \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$M(T) = \left(\frac{m}{2\pi k T} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left(- \frac{m}{2kT} V_{T,y}^2 \right) \quad (4.7)$$

把 G_T^0 对分子表观频率 ν' 积分得到通常采用的增益系数^[4,5]。我们由式(4.2)求出 G_T 的比 G_T^0 更精确的近似解 G_T^0 。称 G_T^0 为半阶解; 为此先求得 n_i 即 f_i^0 的具体表达式, 对式(3.1)和(3.2)做运算得到

$$\frac{\partial^2 f_b^0}{\partial \xi^2} + A_1 \frac{\partial f_b^0}{\partial \xi} + A_2 f_b^0 = s_0 (k_{10} - k_{23}) \frac{\partial G_T^0}{\partial \xi} + A_3 G_T^0 + A_4$$

$$\frac{\partial^2 f_3^0}{\partial \xi^2} + B_1 \frac{\partial f_3^0}{\partial \xi} + B_2 f_3^0 = s_0 k_{23} \frac{\partial G_T^0}{\partial \xi} + B_3 G_T^0 + B_4 \quad (4.8)$$

其中 A_i 和 B_i 是 k_{ij} 和 γ_i 的函数, k_{ij} 又是 p 和 T 的函数, 试验及分析表明 $k_{ij} \propto p T^\beta$ ($0 < \beta < 1$)^[1,9,10], 因此 (4.8) 的求解需要与气体宏观运动方程组联立进行. 为求出式 (4.8) 的近似解, 引进如下数学变换:

$$\zeta = \int^x \sqrt{\mu} d\xi = \int^x \frac{\sqrt{\mu}}{u} dx, \quad \mu = s_0 k_{32} k_{10}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi} = \sqrt{\mu} \frac{\partial}{\partial \zeta}, \quad \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} = \mu \frac{\partial^2}{\partial \zeta^2} + \frac{\partial \sqrt{\mu}}{\partial \xi} \frac{\partial}{\partial \zeta} \quad (4.9)$$

把式 (4.9) 代入式 (4.8), 略去 $\frac{u}{L_1 \sqrt{\mu}}$ 量阶的小项后得到

$$\frac{\partial^2 f_b^0}{\partial \zeta^2} + \frac{k_{32} + s_1 k_{23} + s_2 k_{10}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial f_b^0}{\partial \zeta} + f_b^0 = \frac{s_0(k_{10} - k_{23})}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial G_T^0}{\partial \zeta} + \frac{s_0}{s_2} G_T^0 + \frac{1}{s_2 k_{10}} \sum_{i=1}^3 \gamma_i$$

$$\frac{\partial^2 f_3^0}{\partial \zeta^2} + \frac{k_{32} + s_1 k_{23} + s_2 k_{10}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial f_3^0}{\partial \zeta} + f_3^0 = \frac{s_0 k_{23}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial G_T^0}{\partial \zeta} + \frac{s_0 k_{23}}{s_2 k_{32}} G_T^0$$

$$+ \frac{s_1 k_{23}}{\sqrt{\mu}} \sum_{i=1}^3 \gamma_i + \frac{\gamma_3}{k_{32}} \quad (4.10)$$

式 (4.10) 中一阶偏导数的系数以及本征值 (取负号) 满足如下的关系

$$\frac{k_{32} + s_1 k_{23} + s_2 k_{10}}{\sqrt{\mu}} = \sqrt{\frac{k_{32}}{s_2 k_{10}}} + \left(1 + \frac{s_1 k_{23}}{s_2 k_{10}}\right) \sqrt{\frac{s_2 k_{10}}{k_{32}}} \approx \text{常数}$$

$$\lambda_1 \approx \sqrt{\frac{k_{32}}{s_2 k_{10}}}, \quad \lambda_2 \approx \sqrt{\frac{s_2 k_{10}}{k_{32}}} \quad (4.11)$$

本征值与 ζ 近似无关等于常数. 下面讨论 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 的解, $\lambda_1 = \lambda_2$ 的解可类似地进行讨论.

$$f_b^0 = \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-\lambda_i \zeta}}{\lambda_j - \lambda_i} \left\{ \frac{\gamma_1^0 + \gamma_2^0}{\sqrt{\mu^0}} + \left[n_3^0 \sqrt{\frac{k_{32}}{s_2 k_{10}}} + \left(\lambda_j - \frac{s_1 k_{23}}{\sqrt{\mu}} - \sqrt{\frac{s_2 k_{10}}{k_{32}}} \right) n_6^0 \right] M(T) \right.$$

$$+ \left. \frac{s_0(k_{10} - k_{23})}{\sqrt{\mu}} G_T^0 \Big|_{\zeta=0} + \int_0^\zeta e^{\lambda_i \xi} \left[\frac{1}{s_2 k_{10}} \sum_i \gamma_i + \frac{s_0(k_{10} - k_{23})}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial G_T^0}{\partial \xi} + \frac{s_0}{s_2} G_T^0 \right] d\xi \right\}$$

$$f_3^0 = \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-\lambda_i \zeta}}{\lambda_j - \lambda_i} \left\{ \frac{\gamma_3^0}{\sqrt{\mu^0}} + \left[\left(\lambda_j - \sqrt{\frac{k_{32}}{s_2 k_{10}}} \right) n_3^0 + \frac{s_1 k_{23}}{\sqrt{\mu}} n_6^0 \right] M(T) \right.$$

$$+ \left. \frac{s_0 k_{23}}{\sqrt{\mu}} G_T^0 \Big|_{\zeta=0} + \int_0^\zeta e^{\lambda_i \xi} \left[\frac{s_1 k_{23}}{\mu} \sum_i \gamma_i + \frac{\gamma_3}{k_{32}} + \frac{s_0 k_{23}}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial G_T^0}{\partial \xi} + \frac{s_0 k_{23}}{s_2 k_{32}} G_T^0 \right] d\xi \right\} \quad (4.12)$$

G_T^0 与 ζ 的关系 将式(3.5)对 y 积分,利用辐射边界条件(3.9),可以推得

$$\frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} \int_{-\infty}^{\infty} G_T^0 dv' dy = -\frac{1}{2} \ln R_1 R_2 \quad (4.13)$$

镜子反射率 $R_i (i=1, 2)$ 不随 x 而变化^[4-6], 故可一般地假设为: $\ln R_1 R_2 = e^{\delta \zeta} \ln R_1^0 R_2^0$, 这里 δ 为常数或为零. 在运动论方程中热速度 V_{T_y} 与空间坐标无关, 故最终有

$$G_T^0 \propto \ln R_1 R_2 = e^{\delta \zeta} \ln R_1^0 R_2^0 \quad (4.14)$$

此外由于 $\lambda_i = O(1)$, $\frac{1}{\lambda_i} \frac{\partial F}{\partial \zeta} = O\left(\frac{uF}{\lambda_i L \sqrt{\mu}}\right) \ll O(F)$, 故有

$$\int_0^{\zeta} e^{\lambda_i \zeta} F d\zeta = \left(\frac{F}{\lambda_i} e^{\lambda_i \zeta}\right) \Big|_0^{\zeta} - \int_0^{\zeta} \frac{e^{\lambda_i \zeta}}{\lambda_i} \frac{\partial F}{\partial \zeta} d\zeta \approx \frac{1}{\lambda_i} [e^{\lambda_i \zeta} F(\zeta) - F(0)] \quad (4.15)$$

利用式(4.14), (4.15)把式(4.12)中的积分积出得到:

$$\begin{aligned} f_b^0 &= f_{bp} + s_0 w_b G_T^0 + \sum_{i=1 (i \neq j=1,2)}^2 \frac{e^{-\lambda_i \zeta}}{\lambda_j - \lambda_i} \left\{ s_0 G_T^0 e^{-\delta \zeta} \left[\frac{k_{10} - k_{23}}{\sqrt{\mu}} - (\lambda_i + \delta) w_b^0 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\gamma_1' + \gamma_2'}{\sqrt{\mu^0}} - \lambda_j n_{b0}^0 + n_3^0 \sqrt{\frac{k_{32}}{s_0 k_{23}}} + \left(\lambda_j - \frac{s_1 k_{23}}{\sqrt{\mu_1}} - \sqrt{\frac{s_0 k_{10}}{k_{32}}} \right) n_b^0 \right] M(T) \right\} \\ f_3^0 &= f_{3p} + s_0 w_3 G_T^0 + \sum_{i=1 (i \neq j=1,2)}^2 \frac{e^{-\lambda_i \zeta}}{\lambda_j - \lambda_i} \left\{ s_0 G_T^0 e^{-\delta \zeta} \left[\frac{k_{23}}{\sqrt{\mu}} - (\lambda_i + \delta) w_3^0 \right] \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\gamma_3'}{\sqrt{\mu^0}} - \lambda_j n_{3p}^0 + \left(\lambda_j - \sqrt{\frac{k_{32}}{s_2 k_{10}}} \right) n_3^0 + \frac{s_1 k_{23}}{\sqrt{\mu}} n_b^0 \right] M(T) \right\} \end{aligned} \quad (4.16)$$

其中 $\gamma_i = \gamma_i' M(T)$

$$\begin{aligned} f_{bp} &= \frac{1}{s_0 k_{10}} \sum_i^3 \gamma_i \quad f_{3p} = \frac{s_1 k_{23}}{\mu} \sum_i^3 \gamma_i + \frac{\gamma_3}{k_{32}} \\ w_b &= \frac{1}{(\lambda_1 + \delta)(\lambda_2 + \delta)} \left[\frac{1}{s_2} + \frac{(k_{10} - k_{23})\delta}{\sqrt{\mu}} \right], \\ w_3 &= \frac{1}{(\lambda_1 + \delta)(\lambda_2 + \delta)} \left(\frac{k_{23}\delta}{\sqrt{\mu}} + \frac{k_{23}}{s_2 k_{32}} \right) \end{aligned} \quad (4.17)$$

把式(4.14)和(4.16)代入式(4.2), 求出 G_T 的半阶解 G_T^0 为

$$G_T^0 = G_{on} M(T) \left(\bar{I} + \frac{2}{\pi \Delta v_N \phi_{21}} \right)^{-1} \quad (4.18)$$

其中 $\bar{I} = \frac{J}{J_i}$, J_i 和 G_{on} 的具体表达式见(5.3).

流场解 利用 f_i^0 和 G_T^0 的解, 式(4.16)和(4.18)可求出一维非绝热流方程即方程(3.1)~(3.4)之矩方程的解为:

$$\rho u A = \text{常数}$$

$$\rho u^2 + p = \text{常数}$$

$$h - h^0 + \frac{u^2 - u^0^2}{2} - \int_0^{\zeta} u^2 \frac{\partial \ln A}{\partial \zeta} d\zeta = \int_0^{\zeta} \frac{Q}{\rho} d\zeta - \int_0^{\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J G_T^0}{\rho \sqrt{\mu}} dV_{T_y} d\zeta$$

$$h = C_p T + \sum_i^3 \frac{\varepsilon_i n_i}{\rho}, \quad p = \rho \frac{k}{m} T \quad (4.19)$$

其中 ε_i 为振动能级能量。至此对 CO_2 气流激光求得运动论和辐射交换联立方程组 (3.1)–(3.5) 的零级近似解, 给定 $\ln R_1 R_2$, γ_i 及初始条件, 即可由 (3.4)、(4.3)、(4.5)、(4.12) 和 (4.18) 共 12 个关系式, 确定 ρ 、 u 、 p 、 T 、 h 、 J 、 $f_i^0 (i = 0, 1, 2, 3)$ 、 f_b^0 和 G_T^0 共 12 个未知量。下面导出一些有用的关系。

五、增益、强度和功率

1. 增益-强度关系 把 G_T^0 的解 (4.18) 对分子表观频率 ν' 积分, 得到增益-强度关系为

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} G_T^0 d\nu' = \frac{G_{0n} \Phi(\xi, \eta, \bar{I})}{1 + \bar{I}} \quad (5.1)$$

其中

$$\Phi(\xi, \eta, \bar{I}) = \frac{\eta^2(1 + \bar{I})}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{\eta^2(i + \bar{I}) + (\xi - t)^2} dt \quad (5.2)$$

$$\xi = \frac{2(\nu' - \nu_0)}{\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2}, \quad t = \frac{2(\nu' - \nu_0)}{\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2}, \quad \nu' = \nu_0 \left(1 + \frac{1}{c} V_{Ty}\right)$$

$$\eta = \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_D} \sqrt{\ln 2}$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi \Delta\nu_N} \cdot \frac{J_s}{h\nu\sqrt{\mu}} &= \frac{cs_2}{B_{21}\alpha_2} \left\{ \frac{k_{21} + s_2 k_{23} + s_1 k_{10}}{\sqrt{\mu}} + \delta - \omega_3 \sqrt{\frac{s_2 k_{32}}{k_{10}}} + \frac{s_1 H}{\sqrt{\mu}} \omega_b \right. \\ &- \sum_{i=1}^2 \frac{s_0^0 e^{-(\lambda_i + \delta)\xi}}{s_0(\lambda_j - \lambda_i)} \left(\left[\frac{k_{23}}{\sqrt{\mu}} - (\lambda_j + \delta)\omega_3^0 \right] \sqrt{\frac{s_2 k_{32}}{k_{10}}} \right. \\ &\left. \left. - \frac{s_1 H}{\sqrt{\mu}} \left[\frac{k_{10} - k_{23}}{\sqrt{\mu}} - (\lambda_j + \delta)\omega_b^0 \right] \right) \right\} \\ \frac{G_{0n} J_s}{h\nu\sqrt{\mu}} &= \frac{1}{\sqrt{\mu}} \left(\gamma_2' + \gamma_3' - \frac{s_1 k_{21}}{s_2 k_{10}} \sum_i^3 \gamma_i' \right) + \sum_{i=1}^2 \frac{e^{-\lambda_i \xi}}{\lambda_j - \lambda_i} \left\{ \left(\frac{\gamma_3'}{\sqrt{\mu^0}} - \lambda_j n_{3p}^0 \right) \right. \\ &\cdot \sqrt{\frac{s_2 k_{32}}{k_{10}}} - \frac{s_1 H}{\sqrt{\mu}} (\gamma_1' + \gamma_2' - \lambda_j n_{bp}^0) + \left[\frac{s_1 k_{23}}{k_{10}} - \frac{s_1 H}{\sqrt{\mu}} \left(\lambda_j - \frac{s_1 k_{23}}{\sqrt{\mu}} \right) \right. \\ &\left. \left. - \sqrt{\frac{s_2 k_{10}}{k_{32}}} \right] n_b^0 + \left[\left(\lambda_j - \sqrt{\frac{k_{32}}{s_2 k_{10}}} \right) \sqrt{\frac{s_2 k_{32}}{k_{10}}} - \frac{s_1 H}{s_2 k_{10}} \right] n_3^0 \right\} \quad (5.3) \end{aligned}$$

$$H = k_{21} + s_2 k_{23} - s_2 k_{10}$$

当光频与线中心频率一致 $\nu = \nu_0$ 时, 式 (5.2) 简化为

$$G = \frac{G_{0n} \eta \sqrt{\pi}}{\sqrt{1 + \bar{I}}} \exp[\eta^2(1 + \bar{I})] \cdot [1 + \text{erf}(\eta \sqrt{1 + \bar{I}})] \quad (5.4)$$

式 (5.2)、(5.4) 当增益等于耗损时适用。

2. 强度 根据定义和关系 (3.5), 导出透射强度为

$$J_s = t_1 J_0^- + t_2 J_{L_2}^+ = \frac{(t_1 \sqrt{R_2} + t_2 \sqrt{R_1}) L_2 J_s}{(\sqrt{R_1} + \sqrt{R_2})(1 - \sqrt{R_1 R_2})} - \frac{G_{0n} \bar{I} \Phi(\xi, \eta, \bar{I})}{1 + \bar{I}} \quad (5.5)$$

若一端为无耗损的全反射镜即 $R_2 = 1$, 另一端为透射输出镜时, 对 $\nu = \nu_0$, 均匀和非均匀加宽为主的情况分别得到

$$J_s = \frac{t_1 J_s}{a_1 + t_1} \left(G_{0n} L_2 + \frac{1}{2} \ln R_1 \right) \quad (5.6)$$

$$J_s = \frac{t_1 J_s}{a_1 + t_1} \left(\pi \eta^2 L_2 \frac{G_{0n}^2}{G} + \frac{1}{2} \ln R_1 \right) \quad (5.7)$$

当 $u = 0$, p 和 T 为常数时, 以上公式简化为气体(不流动)激光的熟知关系^[11], 但必须注意到它们之间的区别, 这里 $G_{0n} = G_{0n}(\zeta)$.

3. 功率 把 J_s 对 x 积分得到功率. 对 $\nu = \nu_0$ 和一端输出的情况, 由式(5.5)求得输出功率 P 为

$$P = \frac{V_D}{L_1} \int_0^{\zeta_1} \frac{t_1 u J_s G_{0n}}{(a_1 + t_1) \sqrt{\mu}} \frac{\bar{I} \eta \sqrt{\pi} \exp[\eta^2(1 + \bar{I})]}{\sqrt{1 + \bar{I}}} [1 - \text{erf}(\eta \sqrt{1 + \bar{I}})] d\zeta \quad (5.8)$$

其中 $V_D = L_1 L_2 L_3$, 均匀和非均匀加宽为主时式(5.9)化为

$$P = \frac{t_1}{a_1 + t_1} \frac{V_D I_s^*}{L_2} \left(G_{0n}^* L_2 + \frac{1}{2} \ln R_1^0 \right) \quad (5.9)$$

$$P = \frac{t_1}{a_1 + t_1} \frac{V_D I_s^*}{L_2} \left(\frac{G_{0n}^{*2} L_2}{G_0^*} + \frac{1}{2} \ln R_1^0 \right) \quad (5.10)$$

其中

$$I_s^* = \frac{1}{L_1} \int_0^{\zeta_1} \frac{u J_s e^{\delta \zeta}}{\sqrt{\mu}} d\zeta, \quad G_{0n}^* = \int_0^{\zeta_1} \frac{u J_s G_{0n}}{\sqrt{\mu}} d\zeta \left[\int_0^{\zeta_1} \frac{u J_s e^{\delta \zeta}}{\sqrt{\mu}} d\zeta \right]^{-1}$$

$$\frac{G_{0n}^{*2}}{G^*} = \int_0^{\zeta_1} \frac{u G_{0n}^2 J_s \eta^2 \pi}{\sqrt{\mu}} d\zeta \left[\int_0^{\zeta_1} \frac{u J_s e^{\delta \zeta}}{\sqrt{\mu}} d\zeta \right]^{-1}$$

PL_2/V_D 是对输出镜面积取平均的透射辐射强度, 式(5.9)、(5.10)与气体(不流动)激光的相应功率关系^[11]一致, 但这里 I_s^* 、 G_{0n}^* 和 G_{0n}^{*2}/G^* 都是沿流动方向平均量. 利用(4.15)和(5.3)诸式, 可以导出 I_s^* 、 G_{0n}^* 和 G_{0n}^{*2}/G^* 的近似显式表达式.

六、分析与讨论

1. 与精确数值解之比较 精确数值解使用的参数见表 1. 相应的加宽参数 η 值等于 2.5, 是均匀加宽为主的情况. 精确结果由流体力学方程和速率方程的联立求解获得, 计算时使用了增益等于耗损的条件. 近似解与精确数值结果符合良好, 见图 4—6. 应该指出, 能量方程解(4.18)中的双重积分项可用与功率积分相同的办法积出.

2. 与速率方程理论 (RET) 之比较 常用的 RET^[4,5] 联立求解流体力学和速率方程组. 为了比较起见下面简要导出与式(5.1)相应的 RET 的结果.

对 CO_2 激光气体混合物速率方程组为

$$\left. \begin{aligned} u \frac{dn_1}{dx} &= r_1 + k_{21} n_2 - (k_{10} + k_{12}) n_1 + h\nu GJ \\ u \frac{dn_2}{dx} &= r_2 + k_{32} n_3 - (k_{23} + k_{21}) n_2 + k_{12} n_1 - h\nu GJ \\ u \frac{dn_3}{dx} &= r_3 - k_{32} n_3 + k_{23} n_2 \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

表 1 计算条件和光腔人口参数

$s_1 + s_2 = 1, s_2 = 0.96$ $\frac{s_1}{s_0} = \frac{718}{NT}$ (厘米 ²) $g = \frac{-1}{2L_2} \ln R_1 = 5 \times 10^{-3}$ (厘米 ⁻¹) $A = \text{常数}$ $\sigma_1 = 2.8 \times 10^{-13}$ (尔格/粒子) $\sigma_2 = \sigma_3 = 4.7 \times 10^{-13}$ (尔格/粒子) $h\nu = \sigma_2 - \sigma_1 = 1.9 \times 10^{-13}$ $m = 2.92 \times 10^{-23}$ (克) $c_p = 1.4 \times 10^7$ (尔格/克, °K) $\sum_{i=0}^3 N_i/N = 0.5$ $(K_{32}, K_{21}, K_{10}) = (K_{32}^0, K_{21}^0, K_{12}^0) \frac{p}{p^0} \sqrt{\frac{T}{T^0}}$ $K_{23} = K_{32} \exp\left(-\frac{300}{T}\right)$	$N_3^0 = 7.73 \times 10^{16}$ (粒子/厘米 ³) $N_2^0 = 2.30 \times 10^{16}$ (粒子/厘米 ³) $N_0^0 = 3.83 \times 10^{17}$ $N^0 = 9.66 \times 10^{17}$ $p^0 = 4.0 \times 10^4$ (达因/厘米 ²) $u^0 = 1.4 \times 10^5$ (厘米/秒) $T^0 = 300^\circ\text{K}$ $K_{10}^0 = 5.68 \times 10^4$ (秒 ⁻¹) $K_{32}^0 = 2.77 \times 10^4$ $K_{23}^0 = 1.02 \times 10^4$ $K_{21}^0 = 4.02 \times 10^3$ $\text{CO}_2/\text{N}_2/\text{He} = 1/4/5$
---	---

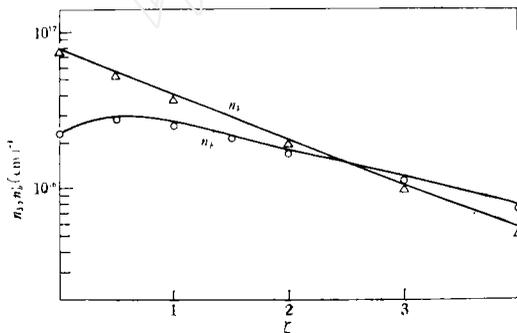


图 3 n_3, n_b 随 ζ 的变化

— 精确数值解 $\triangle \circ$ 本文近似解
 $\triangle n_3 \quad \circ n_b$

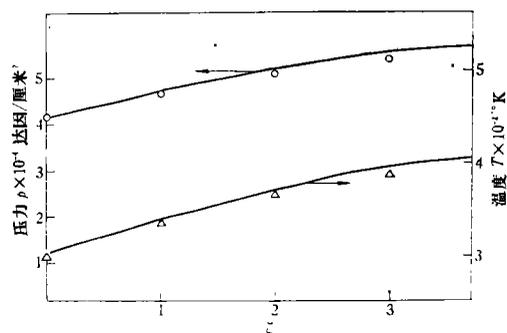


图 4 压力和温度随 ζ 的变化

— 精确数值解 $\circ \triangle$ 本文近似解
 \circ 压力 \triangle 温度

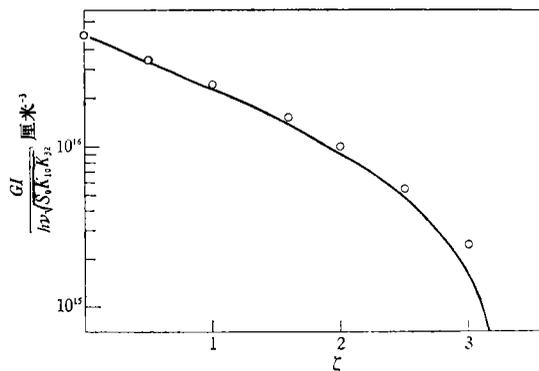


图 5 功率密度随 ζ 的变化

— 精确数值解
 \circ 本文近似解

引进修正压力效应的线形因子^[4,5]后增益系数为

$$G = \frac{1}{\pi \Delta \nu_N} \Phi(\xi, \eta, 0) (B_{21} \alpha_2 n_2 - B_{12} \alpha_1 n_1) \quad (6.2)$$

通过类似于第四部分的推导,利用增益等于耗损的条件导出如下结果

$$G = \frac{G_{0n} \Phi(\xi, \eta, 0)}{1 + \bar{I}_R \Phi(\xi, \eta, 0)} \quad (6.3)$$

该式与文献[5, 6]的结果一致,增益等于耗损时适用。高压 $\eta \gg 1$ 时,式(6.3)与(5.1)等价。在两个理论中 G_{0n} 相同,耗损 G 相同,故由式(5.1)和(6.3)导出

$$\bar{I}_R = \frac{1 + \bar{I}_K}{\Phi(\xi, \eta, \bar{I}_K)} = \frac{1}{\Phi(\xi, \eta, 0)} \quad (6.4)$$

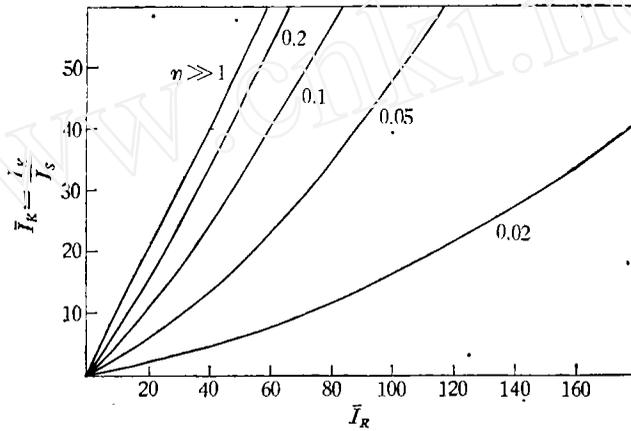


图6 \bar{I}_K 和 \bar{I}_R 的关系 ($\xi = 0$)

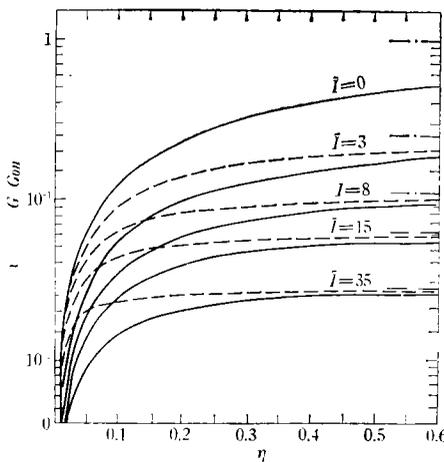


图7 G/G_{0n} 随 η 的变化 ($\xi = 0.5$)

——本理论 - - - - RET 理论
- · - - 均匀加宽极限

可见对 ξ 和 η 的所有可能值,RET 的强度 \bar{I}_R 均大于本理论的强度 \bar{I}_K , 见图 6。进一步的说明见图 7, 图中以 \bar{I} 和 ξ 为参数给出 G/G_{0n} 随 η 的变化关系, 本理论曲线均位于相应 RET 曲线的下方, 两个理论曲线又都位于均匀加宽极限线的下方, 说明 RET 对低压影响即对非均匀加宽效应的影响估计不足。对于加宽参数 $\eta < 0.2$ 的情况, 采用运动论结果是十分必要的。

3. 与气体(不流动)激光理论之比较 f_i^0 等参量对 ζ 的明显依赖为指数 $e^{-\lambda_i \zeta}$ 形式, 如式(4.16), 故当 $\lambda_i \zeta \gg 1$ 时, 式(4.16)和(5.3)诸关系简化为

$$\begin{aligned} \bar{f}_b^0 &= \frac{1}{s_2 k_{10}} \sum_i^3 \gamma_i \\ &+ \frac{s_0 G_T^0}{1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \delta} \left[\frac{(k_{10} - k_{23}) \delta}{\sqrt{\mu}} + \frac{1}{s_2} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{f}_3^0 &= \frac{\gamma_3}{k_{32}} + \frac{s_1 k_{23}}{\mu} \sum_i^3 r_i + \frac{s_0 k_{23} G_T^0}{1 + (\lambda_1 + \lambda_2) \delta} \left(\frac{\delta}{\sqrt{\mu}} + \frac{k_{10}}{\mu} \right) \\ \bar{j}_s &= \frac{\pi \Delta \nu_N}{2} \frac{c h \nu s_2}{B_{21} \alpha_2} \frac{k_{21} k_{32} k_{10} + [k_{21} k_{32} + (k_{32} + k_{23} + k_{21}) k_{10}] \delta \sqrt{\mu}}{s_2 k_{32} k_{10} + (k_{32} + s_1 k_{23} + s_2 k_{10}) \delta \sqrt{\mu}} \\ \bar{G}_{0n} \bar{j}_s &= h \nu \left(r'_2 + r'_3 - \frac{s_1 k_{21}}{s_2 k_{10}} \sum_i^3 r'_i \right) \end{aligned} \quad (6.5)$$

其中保留了 δ 的一阶项、略去了 δ 的二阶和高阶项(可以证明 $\delta \ll 1$)。当镜子反射率不随 x 而变化即 $\delta = 0$ 时,式(6.5)及与它对应的式(5.1)正好是气体(不流动)激光的熟知关系^[11],可见气体(不流动)激光的熟知关系^[11]是本理论在 $u = 0$ 或 $\lambda_i \zeta \gg 1$ 时的特例。但应注意到式(6.5)适用于气体性质随流动方向而变化的情况,从 $x = 0$ 到满足关系(6.5)时,气体流经的距离 x_p 为

$$x_p \approx \frac{2z}{\lambda_1 \sqrt{\mu}} \approx \frac{4}{\sqrt{s_2 k_{32} k_{10}}} \quad (6.6)$$

七、结 束 语

本文的近似理论结果在整个压力范围内适用,近似结果与精确数值结果很好相符,高压时与常用的速率方程理论结果一致。气体(不流动)激光的熟知关系[11]又可作为本文结果的特例而得到。这些都说明现在的运动论处理,与分子速度相关连的增益的引入以及相应的近似求解方法能够比较精确地计算气体的宏观和微观运动以及与辐射场三者之间的相互作用特性。

参 考 文 献

- [1] Vincenti, W. G., Kruger, C. R. Jr., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley, New York, (1965).
- [2] Зельдовиц, Я. Б., Райзер, Ю. П., *Физика Ударный Волн и Высокотемпературных Гидродинамических*, М. Наука (1966).
- [3] Carlo, Ferrari, *Lectures on Radiating Gasdynamics* (1974).
- [4] Gross, R. W. F., Bott, J. F., *Handbook of Chemical Lasers*, John Wiley (1976).
- [5] Cool, T. A., *J. Appl. Phys.*, **40**, 9(1969), 3563.
- [6] Gacla, J. S., Healy, J. J., Morse, T. F., *J. AIAA*, **13**, 12(1975), 1629.
- [7] Feld, M. S., et al., *Scientific American*, 12(1973), 20.
- [8] Lamb, W. E., Jr., *Phys. Rev.*, **134** A1429—50 (1964).
- [9] Anderson, J. D., Jr., “*Gasdynamic Lasers: An Introduction*”, John Wiley (1976)
- [10] Taylor, R. L., Bitterman, S., *Rev. Mod. Phys.*, **41**, 26(1969), 19.
- [11] Maitland, A., Dunn, M. H., *Laser Physics* (1969).
- [12] 高智, 赵庶陶, *力学学报*, 2(1980).
- [13] 高智, 林烈, 孙文超, *物理学报*, **28**, 6(1979), 807.

A KINETIC APPROACH TO RADIATIVE NONEQUILIBRIUM FLOW WITH APPLICATION TO GAS FLOW LASERS

Gao Zhi

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

A kinetic approach to radiative nonequilibrium flow of lasing gas is presented. We introduce a new gain related to molecular speed (GMS) and develop an approximate method of solution. These treatments make it possible to exactly describe the interaction between radiation field, macroscopic flow and microscopic molecular motion. In the case of CO₂ gas flow lasers, the zero-order solutions of this theory are already satisfactory in that they are valid for the whole pressure range. The results of the zero-order solutions agree well with numerical results, and are in accordance with those of the currently accepted rate-equation theory in high pressure range. For zero flow speed, this theory leads to the wellknown theory of non-flow gas lasers^[1]. One of the present conclusions is specially worth noting, i.e., the rate-equation theory, although in which the line shape factor was introduced^[4,5], can not correctly account for the effects of inhomogeneous broadening. For example, for $\eta=0.02$, \bar{I}_R/\bar{I}_K are about 8 for $\xi=0$ and 20 for $\xi=1.0$, where η is the broadening parameter, ξ the frequency shift parameter, \bar{I}_R and \bar{I}_K are the dimensionless intensities of RET and this theory respectively.