

二次涡与卡门涡形成过程

凌国灿

尹协远

(中国科学院力学研究所) (中国科技大学近代力学系)

提要 本文用离散涡位流理论与边界层理论相结合的方法,同时考虑到边界层及后剪切层分离的离散涡模型,研究并计算了圆柱非定常运动过程中二次涡的发生、发展与影响。研究了对称主涡发生运动不稳定性的直接原因和条件,分析卡门涡的形成过程。本文提出,在二次涡的影响下对称主涡从有涡量补充的非自由涡变为没有涡量补充的自由涡,这是对对称主涡发生运动不稳定性的条件,在小扰动影响下可诱发出卡门涡。

本文考虑不可压、大雷诺数、层流情况。所得结果与流场显示结果十分相似。

一、引言

突然起动的圆柱非定常运动是一个经典而又复杂的问题。在大雷诺数、层流情况下,随着时间增长,这些复杂的流动现象包括边界层非定常分离、对称涡的形成和发展、旋涡的不对称运动、卡门涡的形成及涡街运动等等。多年来的理论研究对运动开始后很短时间内的流动特征(这基本上是以位流解为条件解非定常边界层问题)以及运动较长时间后的涡街运动特征已作了很成功的分析。但对于中间阶段的运动情况,即从分离开始到卡门涡形成这一阶段中的流动情况,除了很少几个纯粹的N-S方程数值解以外,目前还没有好的理论分析结果。特别是关于1)二次涡与二次涡对的发生、发展以及它们对流动和对主涡的影响;2)对称主涡发展过程中发生运动不稳定性的直接原因和条件;3)卡门涡的形成过程等。对于这些问题并没有都搞得很清楚。在理论上还没有一个完善、满意的解释和描述。

近代实验利用精细的流场显示技术对二次涡及主涡脱落过程作了一定的研究。主要工作见文献[1—4]。文献[1](1969)最先观察到二次涡的存在并指出 $Re=U_\infty d/\nu > 550$ 是出现二次涡的条件。[1]观察到有一对二次涡存在并给出了二次涡形成与破裂的图象。文献[2]中的实验清楚地显示了 Re 数为 $10^2-2 \times 10^3$ 时近尾迹中主涡的形成过程与变化情形;二次涡的形成与变化情形。观察到当 $Re > 10^3$ 时在二次涡与主涡发展变化过程中,到某个时刻主涡涡层会发生间断,而 $Re < 10^3$ 时却不发生间断。[2]曾指出二次涡的状态与主涡的发展与破坏有密切的关系。[3](1979)报导了 Re 数为30—5000的实验研究结果。当 $Re > 500$ 时在靠近主流分离区看到有一个或多个二次涡存在。实验显示了二次涡形成过程中涡附近的流动变化。这些实验研究丰富了人们对圆柱非定常运动时柱后旋涡运动演变过程的认识。有助于对流动过程作机理分析。但目前还没有看到相应的理论分析报告。也没有看到与实验结果很相符合的理论计算结果。

本文于1980年10月收到。

在理论上用精确的数值解方法计算出二次涡的主要工作是文献[5—8]。文献[5]在高雷诺数(4×10^4)情况下对 N-S 方程进行了数值求解,得到了柱后所形成的二次涡。文献[6—8]对中等雷诺数情况(Re 为 500 左右)进行计算,只得到单个二次涡的结构。图象也很不清楚,只是局部地区的流线稍微鼓起而已。它与实验观察到的结果还不一致。已有的数值计算结果在较高雷诺数时还不能与实验显示都相符,尤其在二次涡的发生与发展方面。而且,这些数值解难以清晰地描述出流动的变化过程。文献[9]用离散涡模型并考虑后剪切层分离对流动的影响,计算所得的二次离散涡都进入了尾迹下游,涡的结构不清楚。该文对后剪切层及其分离没有进行理论分析,只给出了一个计算后分离点的经验公式。因此,已有的理论研究都只是一些初步结果。

本文试图用离散涡位流理论与边界层理论相结合的方法,用同时考虑边界层及后剪切层分离的离散涡模型,研究并计算圆柱非定常运动过程中二次涡的发生、发展与影响。研究对称主涡发生运动不稳定的直接原因和条件。分析卡门涡的形成过程。本文所考虑的是在大雷诺数、层流、不可压流体中,圆柱突然起动后作匀速直线运动的情况。

二、理论分析

1. 离散涡模型

在文献[10]中作者已详细介绍了离散涡模型。同时考虑边界层和后剪切层分离的离散涡模型可作如下概括:在大雷诺数情况下边界层较薄。从分离开始到卡门涡形成这一阶段的流动是整个非定常运动的初期阶段,在此阶段中逐渐形成的包括后驻点在内的迴流区剪切层也较薄,粘性影响主要集中在这些薄层内。从开始运动到某个特征时刻边界层开始分离。到一定时候,在一定条件下后剪切层也开始分离。分离点随时间变化。边界层和后剪切层内的涡量通过各自的分离点输送到下游尾迹。这个涡量的连续输送过程可用一定时间间隔产生的、具有一定强度的、离散的无粘位涡的不断脱落和运动来代替。但来自后剪切层的离散涡与边界层产生的离散涡方向相反。离散涡本身的运动由当地位流流场决定。位流流场是由不断增加的离散涡和直匀流圆柱绕流的位流流场两部分叠加而成。它随时间变化,由此得到不同时刻所对应的流场。其物面压力与速度分布又是边界层和后剪切层新的外缘条件。在这些条件下再计算边界层和后剪切层的分离,确定新的分离点和离散涡。构成新的整个位流流场。如此反复进行。这即是描述圆柱大雷诺数非定常初期运动的离散涡模型,其中考虑了边界层、近尾流及外部位流三者间的相互作用。

2. 无粘位流流场

设 $W(Z)$ 为位流流场复位势。 r_k, θ_k 分别为极坐标下任一时刻第 k 个涡的运动位置,则文献[10]给出它们的表达式是:

$$W(Z) = Z + \frac{1}{Z} + \sum_{n=1}^N i\Gamma_n \ln \frac{Z - \frac{1}{Z_n}}{Z - Z_n} \quad (1)$$

$$\frac{dr_k}{dt} = \frac{r_k^2 - 1}{r_k^2} \cos \theta_k + \sum_{n=1}^N \Gamma_n r_n \sin(\theta_k - \theta_n) S_1^{-1}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{n \neq k}^N \Gamma_n r_n \sin(\theta_k - \theta_n) S_2^{-1} \\
\frac{d\theta_k}{dt} = & - \frac{r_k^2 + 1}{r_k^3} \sin \theta_k - \sum_{n=1}^N \Gamma_n [r_k r_n^2 - r_n \cos(\theta_k - \theta_n)] (r_k S_1)^{-1} \\
& + \sum_{n \neq k}^N \Gamma_n [r_k - r_n \cos(\theta_k - \theta_n)] (r_k S_2)^{-1} \quad (2) \\
S_1 = & 1 + r_k^2 r_n^2 - 2 r_k r_n \cos(\theta_k - \theta_n) \\
S_2 = & r_k^2 + r_n^2 - 2 r_k r_n \cos(\theta_k - \theta_n) \\
n = & 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, N
\end{aligned}$$

其中 Z_n 、 Γ_n 分别为第 n 个离散涡的位置及强度。 N 是所有离散涡之总数, 即为边界层分离产生的总的离散涡与后剪切层分离产生的总的离散涡两者之和。 显然 N 随时间变化。 Z_n 也是时间 t 的函数。 Γ_n 由边界层或后剪切层在分离点处的涡流量决定。

物面压力分布 C_p , 速度分布 V_B 以及阻力系数 C_D 的表达式分别是^[10]:

$$\begin{aligned}
C_p(\theta, t) = & 1 - V_B^2 + 2 \sum_{n=1}^N \Gamma_n \frac{\partial}{\partial t} (\theta_{r=1}^* - \theta_{r=1}^*) \\
V_B(\hat{r}) = & -2 \sin \theta + \sum_{n=1}^N \Gamma_n \frac{i - r_n^2}{i - 2 r_n \cos(\theta - \theta_n) + r_n^2} \quad (3) \\
C_D = & -4\pi \sum_{n=1}^N \Gamma_n \left[\left(1 + \frac{1}{r_k^2} \right) \frac{dr_k}{dt} \sin \theta_k + \left(r_k - \frac{1}{r_k} \right) \frac{d\theta_k}{dt} \cos \theta_k \right] \\
\theta_{r=1}^* = & \tan^{-1} \frac{r_n \sin \theta - \sin \theta_n}{r_n \cos \theta - \cos \theta_n} \\
\theta_{r=1}^* = & \tan^{-1} \frac{\sin \theta - r_n \sin \theta_n}{\cos \theta - r_n \cos \theta_n}
\end{aligned}$$

3. 边界层分离

紧挨物面的流动应满足非定常二维不可压边界层方程及相应的初边值条件, 而边界条件即由前述位流速度分布给出。 因此内层外层和近尾迹三者是相互影响的。 在离散涡模型中主要感兴趣的是分离点随时间的变化, 因此问题可归结为非定常边界层分离点的耦合求解。 由于本文着重讨论二次涡问题, 作为对该问题的初步描述希望在具体计算时能减少计算复杂性和工作量, 因此边界层分离点的变化引用作者在文献 [10] 中给出的一个经验关系式而暂不进行耦合求解 (该式根据精确数值解给出。 同时计算边界层分离点和后剪切层分离点的数值结果将在另文给出):

$$\theta_s = 98.0 - 58.0 \exp[-1.1968(t - 0.65)] \quad (4)$$

上式表示圆柱非定常实际流动中分离点随时间的变化规律。 初始分离时刻为 $t = 0.65$, $\theta_s = 40^\circ$ 。

4. 后剪切层分离

文献 [10] 已对非定常运动初期阶段的流动在不考虑二次涡的情况下作了详细分析, 给出了物面压力与速度分布等物面流动特征的变化规律。 本文在此基础上进一步对初期

阶段所形成的后剪切层作机理分析并提出一些合理的假设。

由文献 [10] 可知, 随着对称主涡的形成和发展, 到一定时候柱后物面附近出现回流区。随着时间的增长回流区范围逐渐扩大并包括后驻点在内。此时在物面附近形成了一个包括后驻点在内的后剪切层。从后驻点沿物面的回流流动在一个相当的范围内是减速增压过程。本文假设在这个非定常运动的初期阶段这个剪切层具有层流边界层特性。在逆压梯度的持续(非瞬间)作用下发生边界层分离。在回流区圆柱物面上的最小压力点位置不再继续沿柱面上移的情况下考虑分离。此时假设后剪切层变化趋于准定态。本文将 Stratford 层流边界层分离点计算方法运用到后剪切层, 在后分离点处满足如下关系^[10]:

$$\begin{aligned} \left[C'_p \left(x' \frac{dC'_p}{dx'} \right)^2 \right]_{r_s} &= 0.0104 \\ x' &= \theta - \theta_B \\ \theta_B &= \theta_{p \min(r)} - \int_0^{\theta_{p \min(r)}} \left(\frac{V_B}{V_B^*} \right)^5 d\theta \\ C'_p &= \frac{p - p_{\min(r)}}{\frac{1}{2} \rho (V_B^*)^2} \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $p_{\min(r)}$ 为回流区中柱面上最小压力值, $\theta_{p \min(r)}$ 为该点后驻点的位置, V_B^* 为该处对应的物面外缘位流速度。

5. 离散涡强度

离散涡强度应等于分离点处一个时间步长内的边界层涡流量并可用分离点处的物面位流速度来表示。令 Γ'_n, Γ''_n 分别表示来自边界层和后剪切层的离散涡强度; V_{Bfs}, V_{Brs} 分别为边界层分离点和后剪切层分离点处对应的外缘位流速度; Δt 为计算时间步长, 则^[10]

$$\begin{aligned} \Gamma'_n &= \frac{1}{4\pi} V_{Bfs}^2 \Delta t \\ \Gamma''_n &= -\frac{1}{4\pi} V_{Brs}^2 \Delta t \end{aligned} \quad (6)$$

三、计算简述

式 (2) (4) (5) 和 (6) 为确定 N 个离散涡的运动和强度的联立方程组。联立的常微分方程组用变方程个数的 Rung-Kutta 法进行数值求解。计算中应注意时间步长的选择。步长太大用“离散”的方法去模拟连续分布的涡量或涡量的连续输送过程不会有准确的结果。步长太小将使离散涡的间隔甚密, 利用位流理论计算诱导速度将出现奇性, 而且所需机时甚多。本文参照文献 [10] 做法最后选择步长为 0.125。初始分离时刻也参照 [10] 选取 $t = 0.65$ 。初生涡位于 $\theta_s = 40^\circ$ 。此后每个步长增加两个离散涡增加六个方程 (利用式 (1) 计算复位势时其中已包含了映象涡的贡献)。在 $t = 2.650$ 时开始计算后剪切层分离, 此后每个步长增加四个离散涡, 增加 12 个方程。在每个步长对方程 (2) — (6) 进行数值计算时从边界层分离出来的所有离散涡与从后剪切层分离出来的所有离散涡都必须计及并予以连续编号, 计算后再用程序将该时刻已有的从后剪切层出来的离散涡区分出来, 得到清晰的二次涡图象。新生涡在分离点脱落时离柱面距离应不大于边界层厚

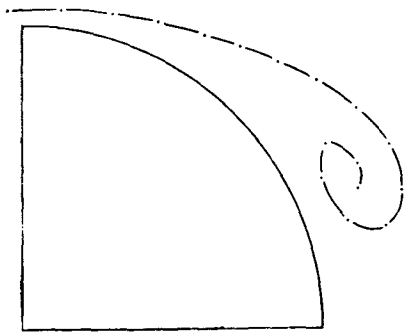
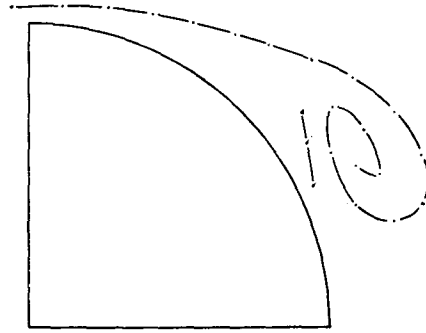
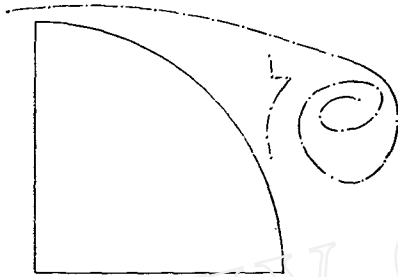
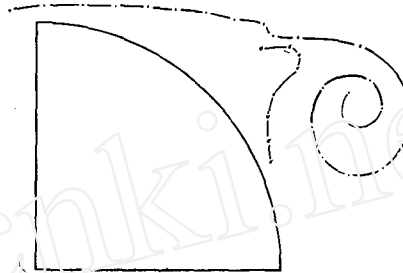
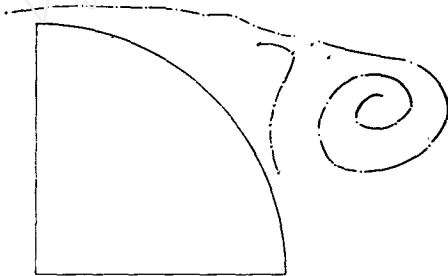
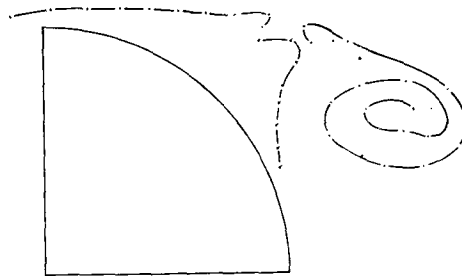
度或后剪切层厚度。为了计算方便本文近似取 $r_n = 1.05^{[10]}$ 。本文计算从边界层分离开始到 $t \sim 4$ 。在最后一个步长计算中有 74 个离散涡 222 个联立方程,其中有 148 个常微分方程。为了在反复计算时能节省机时、减少内存,将非定常过程中的计算结果分段储存,所编写的程序可从有任意个涡作为初始条件而开始起算。利用公式(3)可得沿物面的速度分布与压力分布以及阻力系数。

四、结 果

本文分析和理论计算表明,在圆柱突然起动后保持匀速运动的非定常过程中,在柱后一对主涡的诱导影响下形成后剪切层,在逆压梯度的持续作用下后剪切层发生分离并产生反向的二次离散涡。随着时间增长,二次离散涡在有限的范围内形成一个二次涡面,其涡量逐渐积累、增强。二次涡的发生发展使附近的流动发生明显变化并明显地影响着来流边界层脱落出来的离散涡的运动,影响边界层分离出来的涡量的输送和对称主涡的涡量积累。这种过程发展到一定程度会使主涡面发生断裂。在断裂了的一端,主涡面重新卷起成为第三个涡的涡面。这第三个涡与二次涡在有限的空间范围内形成一个二次涡对。在断裂了的另一端主涡就变成了几乎没有涡量补充的一对自由涡。在文献[11]中已经证明对称排列的自由涡对,它的运动是不稳定的。因此对称的主涡从有涡量补充的非自由涡到没有涡量补充的自由涡这种变化意味着对称涡运动出现了不稳定条件。由于二次涡的影响使主涡变为自由涡是对称的主涡发生运动不稳定的直接原因。此时在小扰动影响下容易发生脉动并开始不对称运动。主涡发生不对称运动后二次涡对将会破裂进而发展为卡门涡。

图(1a—1f)是本文部分计算结果。由于近尾迹区中的旋涡运动在所考虑的时间进程中是对称发展的,因此图中只给出上半平面中的变化情况。图(1a)是后剪切层分离前近尾迹区中对称涡状况。在图(1b)所示时刻已有三个二次离散涡并开始构成二次涡面。由图(1c)起可看到不断增强的二次涡对主涡愈来愈强的影响。二次涡使从边界层到下游的涡量输送及主涡的涡量积累发生明显变化。到达图(1e)所示的时刻,主涡面发生了断裂。此后在断裂了的一端涡面又卷起并形成二次涡对[图(1f)]。此时来自边界层的涡量几乎都积累在新形成的第三个涡中。主涡成为自由涡对就开始进入不稳定状态。这些计算结果形象地描述了二次涡的发生、发展以及由于二次涡的影响使主涡变为自由涡的过程。形象地描述了卡门涡的初期形成过程。文献[2]分别显示了小雷诺数($Re < 520$)、中等雷诺数($520 < Re < 1000$)及大雷诺数($Re > 1000$)时圆柱近尾迹区中的旋涡运动。照片(1a—1g)是其中一组大雷诺数($Re = 1220$)时的结果。从中可清楚地看到圆柱非定常运动过程中二次涡的发展、主涡面的断裂以及二次涡对的形成过程(参看图版 I 照片 1(c—d))。此后由照片(1d)起可看出涡对的运动已逐渐变为不对称的情形。图版 I 照片 2(a—f)为另一组实验显示结果($Re = 1200$)⁹。它所观察到的关于二次涡的发展与主涡变化过程与文献[2]所描述的过程相同。本文分析计算所得结果与大雷诺数情况下的这些实验结果相比两者十分相似。本文计算所得的二次涡对的位置分别

1) 这组照片选自 松井辰弥:“旋涡显示研究”。日本流体力学代表团访华报告, 1979, 北京。

图 (1a) $t = 2.6$ 图 (1b) $t = 2.9$ 图 (1c) $t = 3.4$ 图 (1d) $t = 3.65$ 图 (1e) $t = 3.775$ 图 (1f) $t = 3.9$

位于 $\theta \sim 41^\circ, 51^\circ$, 这与实验显示出来的二次涡对位置 ($\theta \sim 40^\circ, 50^\circ$) 相比也很一致。

五、结 论

本文用同时考虑边界层分离与后剪切层分离的离散涡模型分析和计算了大雷诺数圆柱非定常运动分离近尾迹中的二次涡。描述了二次涡的形成与它对流动及主涡的影响以及对称主涡变为自由涡的过程。提出了对称主涡运动出现不稳定性的条件, 详细地描述了卡门涡形成过程中流动的演变情况。为卡门涡的形成提供机理分析。卡门涡的形成过程对于不同的雷诺数范围可能存在着不同的复杂的细节过程, 本文考虑的是大雷诺数而又是层流条件下从突然起动到主涡出现不对称运动条件这样一段非定常过程中的流动。从主涡开始出现不对称到交替脱落并形成卡门涡列的理论计算还需进一步研究。本

文为了减少计算工作量,边界层分离点的变化规律利用经验关系式给出,在后续的工作中作者已经得到了关于边界层分离及后剪切层分离耦合求解的数值计算结果,并包括考虑了粘性涡核的影响。所有关于二次涡的形成、发展与影响以及主涡变为自由涡的过程与本文所述是一致的。

参 考 文 献

- [1] Hiroyuki Honji & Sadatoshi Taneda, Unsteady Flow Past a Circular Cylinder, *Journal of the Physical Society of Japan* **27**, 6(1969).
- [2] Hiroshi Nagata, Yutaka Kakehi, Masaru Tunekawa and Takeshi Hasegawa, Unsteady Flow Past a Circular Cylinder Started Impulsively, 日本机械学会论文集, **41**, 341, (1975, 1).
- [3] Madeleine Coutanceau et Roger Bouard, Sur la Formation de Tourbillons "Secondaires" dans le Sillage d'un Cylindre Soumis à un Départ Impulsif, *C. R. Acad. Sc. Paris*, T288 (22, Janvier, 1979) Série B-45.
- [4] Sarpkaya, T., Separated Flow about Lifting Bodies and Impulsive Flow about Cylinders *AIAA. J.* **4**, 3(1966).
- [5] Thoman, D. C. & Szweczyk, A. A.: Time Dependent Viscous Flow over a Circular, Cylinder the *Physics of Fluids*, Suppl. 1969, 12 (II-77-86).
- [6] Son, J. S. & Hanratty, T. J, Numerical Solution for the Flow Around a Cylinder at Reynolds Number of 40, 200 and 500 *J. F. M.*, **35**, part 2(1969), pp. 369—386.
- [7] Collins, W. M. & Dennis, S. C. R., Flow Past an Impulsively Started Circular Cylinder, *J. F. M.*, **60**, part 1(1973), pp. 105—127.
- [8] Patel, V. A., Time Dependent Solution of the Viscous Incompressible Flow Past a Circular Cylinder by Method of Series Truncation, *Computers and Fluids* **4**(1976), pp. 13—27.
- [9] Deffenbaugh, F. D & Marshall, F. J., Time Development of the Flow about an Impulsively Started Cylinder, *AIAA. J.* **14**, 7(1976).
- [10] 凌国灿、尹协远, 圆柱高雷诺数层流非定常运动初期流动, 力学学报, 1981年第2期。
- [11] Lamb, H., *Hydrodynamics*, 225—229, Sixth edition, Dover Publications, New York.

SECONDARY VORTEX AND THE PROCEES OF THE FORMATION OF KÁRMÁN VORTEX

Ling Guocan

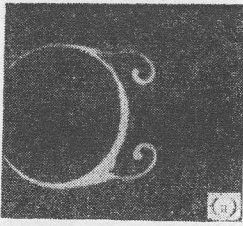
(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Yin Xieyuan

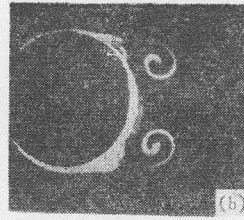
(China University of Science and Technology)

Abstract

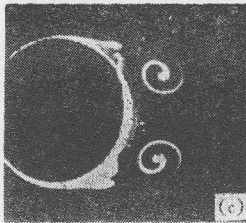
In this paper we have studied and fomulated the formation, growth and the effect of secondary vortex in the near wake of circular cylinder, which is impulsively started from the rest and subsequently moves with constant velocity, studied the immediate cause that leads to the instability of the motion of symmetric main vortices and described the procees of the formation of Kármán vortex. These numerical results are given. In present work a method is used that combines the discrete vortex model with boundary layer theory, the boundary layer separation and the real shear layer separation are simultaneously taken into account. In this paper we suggest that under the effect of secondary vortex while the symmetric main vortices from situation having supplement in vorticity change into free vortices situation having no more supplement in vorticity, the condition that leads to the instability of the motion of symmetric main vortices is just appeared. Then under the action of small disturbance the fluctuation motion may be produced and furthur development leads to Kármán vortex motion. In present work the flow is considered to be laminar and the Reynolds number in high. The results given by present work look very much like the observed features in the flow field visualization.



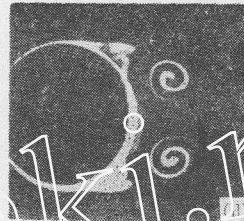
照片 1(a)
 $t = 3.0$



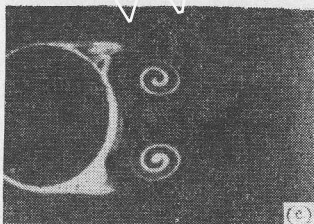
照片 1(b)
 $t = 3.4$



照片 1(c)
 $t = 3.8$



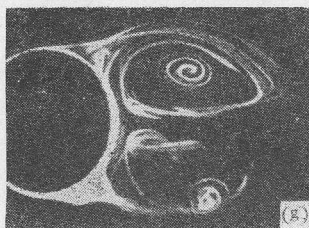
照片 1(d)
 $t = 4.6$



照片 1(e)
 $t = 5.2$



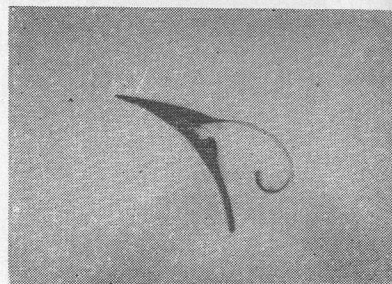
照片 1(f)
 $t = 6.2$



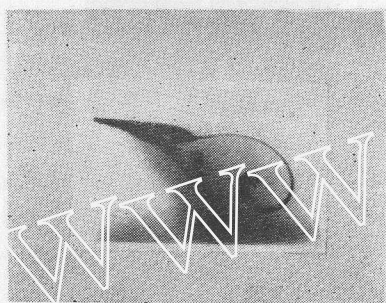
照片 1(g)
 $t = 11.8$



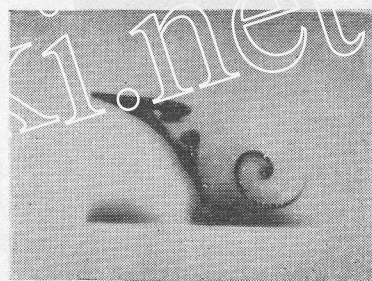
照片 2(a)
 $t = 1.794$



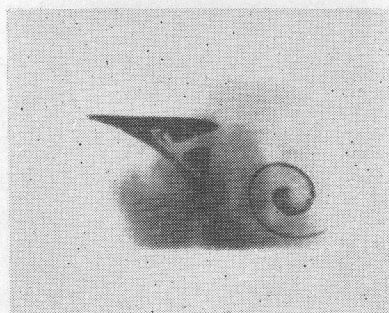
照片 2(b)
 $t = 2.45$



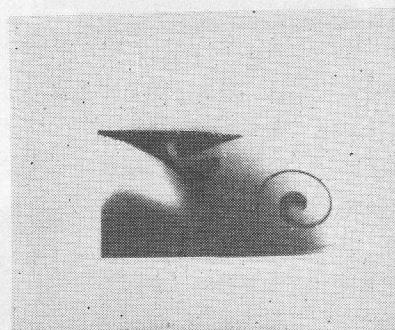
照片 2(c)
 $t = 2.75$



照片 2(d)
 $t = 3.108$



照片 2(e)
 $t = 3.766$



照片 2(f)
 $t = 4.096$