

五层粘弹性阻尼梁的损耗因子和频率

马 邦 安

(中国科学院力学研究所)

为了减少结构上宽频带随机振动和噪声的传递,在最近二十年中,国外广泛采用粘弹性材料和金属材料组成的约束阻尼层,将它粘接在结构上^[1]. 对于三层组合梁,国外已作不少工作;见文献[2]至[12]. 文献[13]利用二层粘弹性材料作核心的四层梁,可加宽有效阻尼的频率范围.

当采用橡胶型的粘弹性材料进行减振时,就需用粘接剂粘贴到金属上,这时实际上是五层组合结构. 若适当采用不同性能的压敏型阻尼胶来粘贴时,既可使五层阻尼梁在较宽的温度、频率范围内有好的阻尼效果,又可使工艺方便. 所以采用在二层金属中夹三层不同性能的线性粘弹性阻尼胶的五层梁,对抑制结构宽频随机振动的响应是较有效的(见图1). 本文利

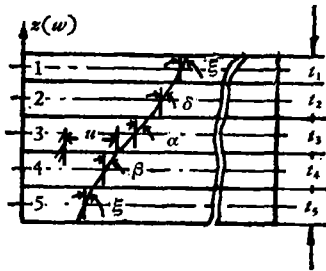


图1 五层阻尼梁

用哈密顿原理推导了五层阻尼梁弯曲振动运动方程式. 计算了具有复刚度的简支五层梁的损耗因子 η 和频率 p . 与实验以及前人的三层、四层阻尼梁的计算作了比较.

运动方程式

对五层梁作如下基本假设:

1. 各层的横向挠度 $w(x, t)$ 是小的, 在任意横截面上各层的 w 相同. 各层横截面的旋转角分别为 $\xi, \delta, \alpha, \beta, \xi$, 忽略各层旋转惯量.

2. 第一、五层完全弹性, 并假设遵照 Euler-Bernoulli 理论忽略剪切及阻尼的影响

$$\left(\xi = \frac{\partial w}{\partial x} \right).$$

3. 第二、三、四层是线性粘弹性, 各层间完全粘接, 位移保持连续. 第三层为软粘弹性, 刚度低, 只考虑剪切效应. 第二、四层可为硬或软的粘弹性, 包括了剪切和拉伸二者的影响.

考虑如图1所示五层梁, 设第三、四层之间交界表面的轴向位移为 u . 在第二、三、四层上剪切应变分别为:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_2 &= \delta - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_3 &= \alpha - \frac{\partial w}{\partial x} \\ \gamma_4 &= \beta - \frac{\partial w}{\partial x} \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

第一、二、四、五层中, 面上轴向位移分别为:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= u + \delta t_2 + \alpha t_3 + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} t_1, \\ u_2 &= u + \frac{1}{2} \delta t_2 + \alpha t_3 \\ u_4 &= u - \frac{1}{2} \beta t_4, \quad u_5 = u - \beta t_4 - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x} t_5 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

将各层应变能相加, 得到梁的总应变能为:

$$\begin{aligned} U &= C_1 \int_0^l \left(\left(u_{,x} + t_2 \delta_{,x} + t_3 \alpha_{,x} + \frac{t_1}{2} \xi_{,x} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. + \frac{t_1^2}{12} \xi_{,x}^2 \right) dx + C_2 \int_0^l \left(\left(u_{,x} + \frac{t_2}{2} \delta_{,x} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + t_3 \alpha_{,x} \right)^2 + \frac{t_2^2}{12} \delta_{,x}^2 \right) dx + D_2 \int_0^l (\delta - \xi)^2 dx \\ &\quad + D_3 \int_0^l (\alpha - \xi)^2 dx + D_4 \int_0^l (\beta - \xi)^2 dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + C_4 \int_0^l \left(\left(u_{,x} - \frac{t_4}{2} \beta_{,x} \right)^2 + \frac{t_4^2}{12} \beta_{,x}^2 \right) dx \\
& + C_5 \int_0^l \left(\left(u_{,x} - t_4 \beta_{,x} - \frac{t_5}{2} \xi_{,x} \right)^2 \right. \\
& \left. + \frac{t_5^2}{12} \xi_{,x}^2 \right) dx \quad (3)
\end{aligned}$$

上式中:

$$\begin{aligned}
C_i &= \frac{1}{2} b t_i E_i \quad (i = 1, 2, 4, 5); \\
D_i &= \frac{1}{2} b t_i G_i \quad (i = 2, 3, 4) \quad (4)
\end{aligned}$$

其中 E_i 、 G_i 分别为各层弹性、剪切模量。 $_{,x} = \frac{\partial}{\partial x}$ 。 l 为梁长, b 为梁宽。

梁的动能:

$$T = \frac{m}{2} \int_0^l \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx, \quad m = b \sum_{i=1}^5 \rho_i t_i \quad (5)$$

假设作用于梁单位长度上的外载荷为 $f(x) \cdot g(t)$, 则外力所作的功为

$$V = g(t) \cdot \int_0^l f(x) \cdot w \cdot dx \quad (6)$$

根据哈密尔顿原理

$$\int (\delta T - \delta U + \delta V) dt = 0 \quad (7)$$

得到下式一组运动方程式

$$\begin{aligned}
& 2D_3 \left(\alpha - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 2C_1 t_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + t_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{t_1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) - 2C_2 t_3 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{t_2}{2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) = 0 \\
& C_4 t_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{2}{3} t_4 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + 2D_4 \left(\beta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& + 2C_5 t_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t_4 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{t_5}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \\
& = 0 \\
& 2C_1 t_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + t_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{t_1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \\
& - 2D_2 \left(\delta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) + C_2 t_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{2}{3} t_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) = 0 \\
& C_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + t_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{t_1}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)
\end{aligned} \quad (8)$$

$$\begin{aligned}
& + C_2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} + \frac{t_2}{2} \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} \right) \\
& + C_4 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{t_4}{2} \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} \right) + C_5 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right. \\
& \left. - t_4 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{t_5}{2} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) = 0 \\
& C_1 t_1 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + t_3 \frac{\partial^3 \alpha}{\partial x^3} + t_2 \frac{\partial^3 \delta}{\partial x^3} + \frac{2}{3} t_1 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\
& + 2D_2 \left(\frac{\partial \delta}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2D_3 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial x} \right. \\
& \left. - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + 2D_4 \left(\frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
& - C_5 t_5 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - t_4 \frac{\partial^3 \beta}{\partial x^3} - \frac{t_5}{2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right) \\
& = g(t) \cdot f(x) - m \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

利用哈密尔顿原理, 还导出其边界条件:

$$\left. \begin{aligned}
& \text{在梁的任一端 } Q = 0 \text{ 或 } w = 0 \\
& N = 0 \text{ 或 } u = 0 \\
& \text{在第一、五层边界 } M_{1,5} = 0 \text{ 或 } \xi = 0 \\
& \text{在第二层边界 } M_\delta = 0 \text{ 或 } \delta = 0 \\
& \text{在第三层边界 } M_\alpha = 0 \text{ 或 } \alpha = 0 \\
& \text{在第四层边界 } M_\beta = 0 \text{ 或 } \beta = 0
\end{aligned} \right\} (9)$$

$$\begin{aligned}
\text{剪力 } Q &= C_5 t_5 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - t_4 \frac{\partial^2 \beta}{\partial x^2} - \frac{2}{3} t_5 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right) \\
& - 2D_2 \left(\delta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - 2D_3 \left(\alpha - \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\
& - 2D_4 \left(\beta - \frac{\partial w}{\partial x} \right) - C_1 t_1 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + t_3 \frac{\partial^2 \alpha}{\partial x^2} \right. \\
& \left. + t_2 \frac{\partial^2 \delta}{\partial x^2} + \frac{2}{3} t_1 \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{轴向力 } N &= 2 \left[C_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + t_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{t_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + C_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{t_2}{2} \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) + C_4 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{t_4}{2} \frac{\partial \beta}{\partial x} \right) \right. \\
& \left. + C_5 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - t_4 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{t_5}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{力矩 } M_{1,5} &= C_1 t_1 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + t_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \right. \\
& \left. + \frac{t_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) + \frac{C_1}{6} t_1^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{C_5}{6} t_5^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -C_5 t_5 \left(\frac{\partial u}{\partial x} - t_4 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{t_5}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_\delta &= 2C_1 t_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + t_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{t_1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 & + C_2 t_2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{2}{3} t_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \\
 M_\alpha &= 2(C_1 + C_2) t_3 \left(\frac{\partial u}{\partial x} + t_3 \frac{\partial \alpha}{\partial x} + \frac{t_2}{2} \frac{\partial \delta}{\partial x} \right) \\
 & + C_1 t_3 \left(t_2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + t_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \\
 M_\beta &= C_4 t_4 \left(\frac{2}{3} t_4 \frac{\partial \beta}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2C_5 t_4 \left(t_4 \frac{\partial \beta}{\partial x} \right. \\
 & \left. + \frac{t_5}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \right)
 \end{aligned}$$

对简支梁讲,二端 $w = 0, N = 0, M_{1,5} = M_\delta = M_\alpha = M_\beta = 0$, 当承受简谐激励时,载荷和变形可分别写成

$$f(x) \cdot g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \sin \frac{n\pi x}{l} e^{j(\omega_n t + \varphi)} \quad (10)$$

$$\begin{bmatrix} u \\ \delta \\ \alpha \\ \beta \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{n=1}^{\infty} u_n^* \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n^* \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^* \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n^* \cos \frac{n\pi x}{l} \\ \sum_{n=1}^{\infty} w_n \sin \frac{n\pi x}{l} \end{bmatrix} \cdot e^{j p^* t}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \text{其中: } u_n^* &= u_{nR} + j u_{nI} \\
 \delta_n^* &= \delta_{nR} + j \delta_{nI} \\
 \alpha_n^* &= \alpha_{nR} + j \alpha_{nI} \\
 \beta_n^* &= \beta_{nR} + j \beta_{nI}
 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

对于第二、三、四层因为是粘弹性,其模量用复模量 E_i^*, G_i^* 来代替。对高阻尼材料,可近似认为 $E_i = 3G_i (i = 2, 3, 4)$; 损耗因子: $\eta_i = \beta_i (i = 2, 4)$; 即

$$\left. \begin{aligned}
 E_i^* &= E_i(1 + j\beta_i) \approx E_i(1 + j\eta_i) \\
 G_i^* &= G_i(1 + j\eta_i) \quad (i = 2, 3, 4)
 \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将(10)、(11)、(12)式代入(8)式得到复代数方

程组

$$\left. \begin{aligned}
 u_n^* J + \delta_n^* K + \alpha_n^* H + w_n M' &= 0 \\
 \beta_n^* Q - 2u_n^* N' + w_n P' &= 0 \\
 u_n^* A + \delta_n^* Y + \alpha_n^* B + w_n Z &= 0 \\
 u_n^* Q_1 + \delta_n^* D_1 + \alpha_n^* J_1 - \beta_n^* N_1 \\
 &+ w_n R_1 = 0 \\
 2u_n^* R_1 + 2\alpha_n^* M_1 + \delta_n^* E' + \beta_n^* P_1 \\
 &+ w_n S_1 = \frac{2}{b} f_n L_1 e^{j\varphi}
 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

其中 $L_2, J, K, H, M', Q, N', P', A, B, Y, Z, Q_1, D_1, J_1, N_1, R_1, M_1, E', P_1, S_1$ 分别为结构材料及尺寸参数, S_1 还包含因子 p^{*2} 项。表达式从略。

求解式(13)可将结果写成下列形式:

$$-p^{*2} m w_n + (P_n + jQ_n) w_n = f_n e^{j\varphi} \quad (14)$$

式(14)齐次方程可写成: $(k^* - p^{*2} m) w_n = 0$

$$p^{*2} = \frac{k^*}{m} = \frac{P_n + jQ_n}{m} = p^2(1 + j\eta_n) \quad (15)$$

由上式可求得五层梁的复频率 p^* ; $j = \sqrt{-1}$;

五层梁第 n 阶损耗因子 $\eta_n = \frac{Q_n}{P_n}$; $\varphi = \text{tg}^{-1} \eta_n$;

p 为梁第 n 阶参考频率 $p^2 = \frac{P_n}{m}$ 。

计算结果及与前人工作的比较

本文推导的运动方程式能够计算三、四或五层阻尼梁。由于粘弹性材料的动态特性是温度和频率的函数,因此,计算时需要迭代。由参考欧拉梁的 p_i 值作为初值 p_{0i} , 将此频率下对应的刚度作为 k_0^* 进行迭代。

本文对五层梁进行计算及实验,其粘弹性材料性能,则采用测定的数据进行计算。从图2看出,用五层梁计算的 η 值及频率比用文献[5]中三层梁的计算更接近实验值。所以,作者认为用五层梁计算更精确。特别当第二、四层

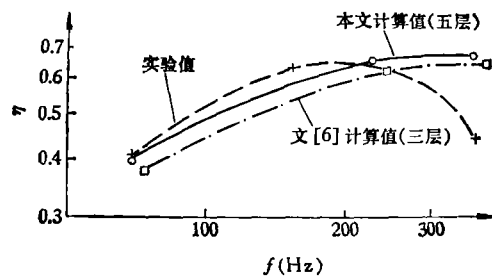


图 2

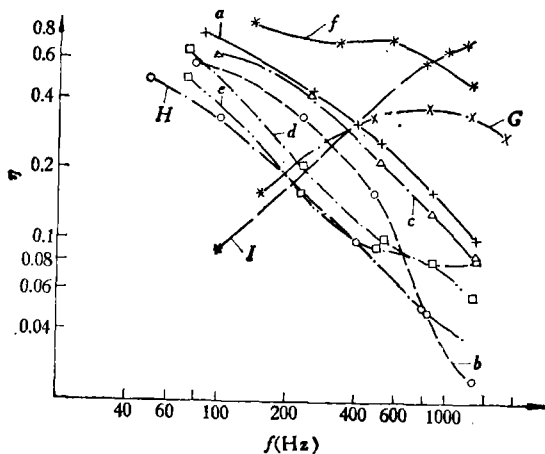


图 3

厚度增加时,则就一定要用五层梁公式计算;如图 3 中 f 曲线 ($t_4 = 3\text{mm}$) 就比 c 曲线 ($t_4 = 0.5\text{mm}$) 的 η 值高。假设对应于 f 曲线的五层梁中的任二层粘弹性层厚度为零,则得到对应的三层梁 G 、 H 、 I 曲线。由图 3 可见: f 曲线 η 值在较宽频带内都较高,而 G 、 H 、 I 曲线仅在较窄频带内 η 值较高。对粘弹性材料而言,温度与频率间有一等效关系。所以适当设计五层梁可使其在较宽的频率和温度范围内获得较高的 η 值。 a 、 c 和 b 、 d 曲线各参数分别相同。但 a 、 b 曲线在计算时采用 E_2 、 E_4 , 而其它曲线都用 E_2^* 、 E_4^* 计算。从 a 、 c 及 b 、 d 曲线互不重合可知,考虑第二、四层的复数杨氏模量与否对阻尼梁的 η 值有一定影响,而对固有频率值影响不大。

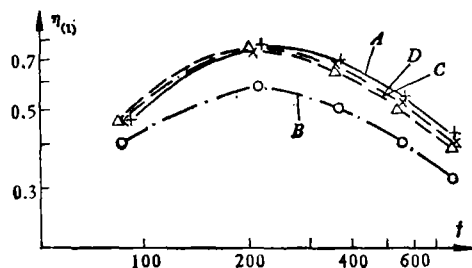


图 4

图 4 分析了粘合剂的影响, A 梁参数为:
 $[E_i] = [7090, 4.8, 0.539, 4.8, 7090]$;
 $[t_i] = [0.46, 0.055, 0.665, 0.055, 0.46]$;
 $[\eta_i] = [0, 0.0084, 1.42, 0.0084, 0]$.

• 42 •

B 梁的 $E_2 = E_4 = 0.539\text{kg/mm}^2$. D 梁的 $t_2 = t_4 = 0.01\text{mm}$, C 梁的 $t_2 = t_4 = 0$. B 、 C 、 D 梁其它参数与 A 梁相同。从 D 比 A 更接近 c 曲线说明当五层梁中第二、四层厚度愈薄则愈接近三层梁 η 值。从 D 比较接近 c 曲线而 B 比 c 曲线的 η 值低得多,说明当粘接剂 G 值与阻尼胶同量级而 β 值很小时,用粘接剂后阻尼梁的 η 值比三层的还小。当粘接剂 G 值比阻尼胶大一量级时,即使其 β 值很小,其五层梁的 η 值接近三层梁,如用 520 胶作粘接剂时就是如此,当第二、四层粘接剂胶愈薄则愈接近。图 5 中 b 梁

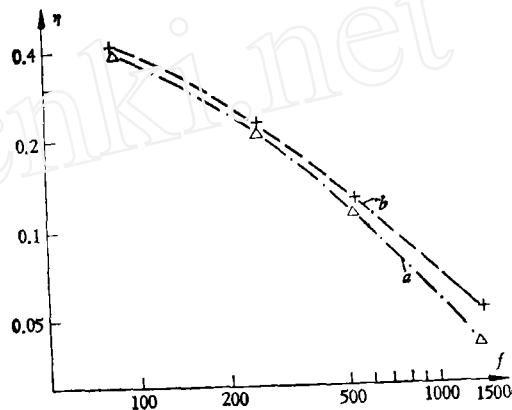


图 5

采用 467* 压敏阻尼胶作粘接剂。其参数为:

$$[E_i] = [7090, 0.141, 0.384, 0.141, 7090];$$

$$[t_i] = [0.975, 0.05, 0.685, 0.05, 0.975];$$

$$[\eta_i] = [0, 1.3, 0.83, 1.3, 0];$$

a 梁为 $t_2 = t_4 = 0$ 的三层梁,其它参数与 b 梁同。从 b 梁比 a 梁的 η 值高,说明当采用 η_2 、 η_4 大的阻尼胶作粘接剂时,五层梁的 η 值将比三层梁的要高。所以选用不同的粘接剂阻尼效果不同。

计算了四层夹层梁,与文献[13]作了比较(见图 6)。计算结果是一致的,说明本文的公式可计算二金属层中间夹一层较硬、一层较软的粘弹性的四层梁。

对短三层不对称阻尼梁进行计算并与文献[9]、[11]中结果进行比较。图 7 中除文献[5]曲线由作者代为计算外,其它曲线由文献[11]

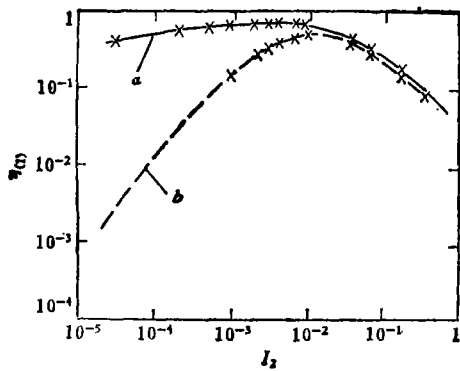


图 6

×, + 分别表示对 a, b 梁本文的计算结果
—, — 分别表示对 a, b 梁文献[15]的计算结果

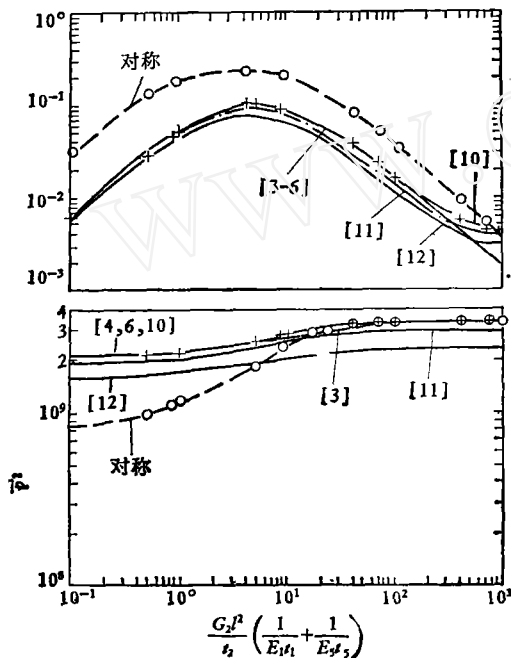


图 7

+ 和 ○ 分别表示对不对称梁和对称梁本文的计算结果

提供。从图 7 可看出：本文的计算结果与文献 [9] 的结果是一致的，但比文献 [11] 结果略偏高，说明考虑旋转惯量后， η 、 p 值将更低。本文也计算了将第一、五层厚度均匀分布时的 η 值。明显看出， η 值比不对称盖板梁的高。说明对称阻尼梁的阻尼效果比不对称的要好。故

本文公式也可计算具有软或硬核心的对称或不对称的三层阻尼梁。

结论

1. 可以适当设计五层阻尼梁，使在较宽温度和频率范围内有较大 η 值，以达到较好的减振效果。若第二、四层采用压敏型阻尼胶，则工艺也很简单。所以五层梁可比四层梁更优越。

2. 本文五层阻尼梁的计算公式，应用范围较广，既可计算短夹层梁的低频，也可计算对称与不对称阻尼梁。作为特例，本文公式也可计算三、四层阻尼梁。

3. 在用粘接剂将橡胶型阻尼胶粘合时，应采用 η_2 、 η_4 值较大的阻尼胶，或者采用 G_2 、 G_4 值较高的粘接剂；否则会影响阻尼效果。当第二、四层胶很薄且较硬时，方可用文献 [5] 的三层梁公式近似计算，否则，必须用本文的五层梁公式进行计算。

参 考 文 献

- [1] Nakra, B. C., *The Shock and Vibration Digest*, **8**(1976), 3—12.
- [2] Kerwin, E. M., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **31**(1959), 952.
- [3] Ditaranto, R. A., *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, **32**(1965), 881.
- [4] Ungar, E. E., *J. Acoust. Soc. Amer.*, **34**(1962), 1082.
- [5] Ruzicka, J. E. and Derby, T. F., NASA CR-1269 (1969).
- [6] Mead, D. J. and Markus, S., *J. Sound Vib.*, **10**(1969), 163.
- [7] Yan, M. J. and Dowell, E. H., *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, **39**(1972), 1041.
- [8] Yan, M. J. and Dowell, E. H., *J. Appl. Mech.*, Trans. ASME, **41**(1974), 526.
- [9] Nakra, B. C. and Grootenhuur, P., *Aeronaut. Quart.*, **25**(1974), 225.
- [10] Sadasiva, Rao, Y. V. K. and Nakra, B. C., *J. Sound Vib.*, **34**(1974), 309.
- [11] Rao, D. K., *J. Sound Vib.*, **52**(2)(1977), 253—263.
- [12] Rao, D. K., *J. Mech. Engng Sci.*, **20**(1978), 271.
- [13] Nakra, B. C. and Grootenhuur, P., *J. Engr. Indust.*, Trans. ASME, **94**(1972), 81.

(本文于 1980 年 1 月 31 日收到)