约化摄动法和非线性波远场分析

中国科学院力学研究所　　戴世强

一、引　言

如所周知，摄动法（特别是奇异摄动法）在研究弱非线性波方面有着广泛的应用〔1—5〕。其中，近年来发展形成的约化摄动法已经成了分析各种非线性波远场的有力工具〔6—8〕。

约化摄动法的实质是，对于一般的描述非线性波的复杂方程组，通过适当的坐标变形和摄动展开，在一阶近似下，把方程组约化成较为简单可解的单个非线性方程（例如Burgers方程、Korteweg-de Vries方程、非线性Schrödinger方程等），从而可以分析远离波的相互作用区的远场。

这一方法的雏形可以追溯到Gardner和Morikawa的早期工作〔9，10〕，他们在研究非线性磁流体力学波时引进了Gardner-Morikawa变换，把磁流体力学方程组约化成KdV方程；接着，Washimi和Taniuti〔11〕用类似的方法研究了离子-声孤立波。苏兆星和Gardner〔12，13〕用此法研究了一般的守恒律方程组，同样导出了KdV方程。此后，一批日本学者把这种摄动法加以系统描述〔6，7〕，并根据此法的约化效果，将其命名为约化摄动法（reductive perturbation method）。

Taniuti等人〔14—17〕首先对这一方法作了严格的数学阐述，不仅把它用于弱色散和弱耗散系统中的非线性波传播，而且用于强色散系统中的非线性波调制。他们得到的关于离子-声孤立波的结果与实验结果相当符合〔18—20〕。

Taniuti等人原先仅考虑非线性波的自相互作用，Oikawa和Yajima〔21—23〕把约化摄动法与PLK方法〔24〕结合起来，讨论了多个非线性波的相互作用，借此研究了两个离子-声孤立波的迎撞问题和Klein-Gordon方程所描述的非线性调制波的相互作用。Tatsumi和Tokunaga〔25—27〕用这种推广的约化摄动法研究了可压缩流体中弱非线性扰动（激波、膨胀波等）的相互作用，他们发现，属于不同族特征线的非线性波几乎是互不相关的，而同族特征线的波受Burgers方程或热传导方程制约。最近，Watanabe〔28〕研究了二维孤立漂移波和Rossby波的追撞问题。

Asano等人〔29—32〕把约化摄动法推广应用到非均匀介质和非稳恒介质中的非线性波传播问题。他们引进了非线性的Gardner-Morikawa变换，约化出变系数的Burgers方程、KdV方程和非线性Schrödinger方程，并借此讨论了变深度浅水波、受弱外力和有小能源的声波、等离子体中的漂移波、电子等离子体波、膨胀或收缩宇宙中的自引力波以及热对流模式等物理问题。

约化摄动法处理通常到一阶近似为止，但为了更精确地描述非线性波的波速、波幅

的变化，近年来陆续有人考虑约化摄动法的高阶近似结果。Ichikawa 等〔33—36〕首先做了这方面的工作，并具体讨论了离子-声孤立波和浅水波。但Sugimoto和Kakutan〔37〕指出，他们的高阶解含有长期项，不是一致有效渐近解，并把导数展开法与约化摄动法结合起来，引进更慢的时空尺度，消除了长期项，得到了一致有效二阶解，同时修正了一阶KdV孤立子解。接着，Kodama和Taniuti〔38—40〕引用了重正化法〔24〕，把约化摄动法推广到任意高阶项，他们的方法不仅适用于讨论单个孤立子，而且适用于讨论任何数目的孤立子。他们用这一方法研究了有高阶色散项的KdV方程、Boussinesq方程和离子声波方程的高阶解，并推广应用于强色散系统和弱耗散系统。Konno，Mitsuhashi和Ichikawa用这种方法重新考察了周期性边界条件下的椭圆余弦离子声波〔41〕。Tokunaga〔42〕用Kodama-Taniuti方法研究了弱激波的二阶近似解，经过重正化后得到的弱激波相速度与用Rankine-Hugoniot关系所得的表达式一致，并重新得到了Becker的定常激波解。苏兆星和Mirie〔43〕运用约化摄动法和坐标变形法（PLK 方法），讨论了浅水中两孤立波的迎撞问题，得到了一致有效的三阶近似结果，他们发现在高阶近似下，孤立波碰撞后发生非均匀的相移，从而导致孤立波变形；他们进而讨论了变形后的非对称波的演化，导得一永形波和尾随的色散波群，与已知的实验结果相符。周清甫〔44〕用这种方法讨论了浅水中两孤立波的垂直相互作用，得到了一致有效三阶解。

Taniuti等人〔45,46,32〕还设法把约化摄动法应用于多维问题，关键是适当选取变形坐标，结果一般归结为垂直于波的传播方向的本征值问题。Van Dam〔47〕考虑了两完全导体平行平板间冷等离子体中电磁波的非线性调制问题。Nozaki等〔48〕用二维约化摄动法处理了低β等离子体中漂移波的非线性调制。Watanabe〔28〕所研究的漂移波和Rossby波也采用了他们的二维模式。

约化摄动法在流体力学、等离子体物理学、弹性力学、晶格动力学、天体物理学中得到了普遍应用。应用得最广泛的是在等离子体动力学方面，文献〔20,49—51〕综述了有关冷等离子体波的工作，文献〔52—55〕综述了约化摄动法在Vlasov等离子体中的应用。近年来有关工作很多，例如，Kono和Yajima〔56〕研究了等离子体声子场中离子声波的非线性调制不稳定性，采用了两个小参数的约化摄动法；Nozaki和Taniuti〔57〕处理了弱非线性波沿θ箍缩的高β细长磁化等离子体的传播，考虑了压缩波与径向等离子体运动相互作用而形成孤立波的情形；Nakata〔58〕用约化摄动法论证了等离子体中计及电子-离子碰撞时的极限激波的存在；Ichikawa等人〔59〕研究了圆偏振Alfvén波中的尖峰孤立子。约化摄动法在流体力学中的应用也很常见，除上面提及过的以外，值得指出有关分层流体方面的工作，Nakata〔60〕和Kakutani-Yamasaki〔61〕用此法讨论了分层流体中的各种孤立波；李麦村〔62〕用两层流体模型分析了大气中雹线形成的非线性过程。Hasimoto和Ono〔63〕用此法结合多重尺度法分析了两层流体界上重力面波的非线性调制，最近，邹启苏〔64〕把这一工作加以推广，考虑了界面上毛细重力波的非线性调制。

下面，我们按上述线索简述约化摄动法及其应用。

二、方法的一般描述

2.1 长波近似〔6,65〕 考虑模型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+\sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}\left(H_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial t}+K_\alpha^\beta\frac{\partial}{\partial x}\right)U=0,\qquad p\geqslant 2 \tag{2.1}$$

其中，U为n元列向量，它的元为$u_1,u_2,\cdots,u_n(n\geqslant 2)$，$A$，$H_\alpha^\beta$，$K_\alpha^\beta$为$n\times n$矩阵，它们的元仅依赖于$U$。假设

(i) 方程(2.1)有常数定态解U_0，解U可在U_0附近展开成小参数ε的幂级数

$$U=U_0+\varepsilon U_1+\varepsilon^2U_2+\cdots \tag{2.2}$$

A，H_α^β，K^β在U_0附近无限次可微；

(ii) $A_0=A(U_0)$有实本征值，且至少有一个非退化、非零的有限本征值λ_0，而相应的本征空间不含不变子空间；

(iii) $x\longrightarrow\infty$时，$U\longrightarrow U_0$，即$U_j\longrightarrow 0(j\geqslant 1)$。

第三个假设仅为了讨论方便而引进。由假设(i)，A，H_α^β，K_α^β可展开成ε的幂级数：

$$A=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^jA_j,\qquad H^\beta=\sum_{j=0}^{\infty}\varepsilon^jH_{\alpha j}^\beta,\qquad K_\alpha^\beta=\sum_{j=1}^{\infty}\varepsilon^jK_{\alpha j}^\beta \tag{2.3}$$

其中，$A_0=A(U_0)$，$H_{\alpha 0}^\beta=H_\alpha^\beta(U_0)$，$K_{\alpha 0}^\beta=K_\alpha^\beta(U_0)$，$A_1=(U_1\cdot\nabla_u A)_0$，

$H_{\alpha 1}^\beta=(U_1\cdot\nabla_u H_\alpha^\beta)_0$，$K_{\alpha 1}^\beta=(U_1\cdot\nabla_u K_\alpha^\beta)_0$ 。这里，∇_u为关于U的梯度算子，下标 0 表示取 $U=U_0$ 时的值。记

$$W_0=-\lambda_0I+A_0,\qquad K_0=\sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}\left(-\lambda_0H_{\alpha 0}^\beta+K^\beta{}_0\right)$$

式中I为单位矩阵。

在长波近似下（即在弱色散情形中），可引进如下的坐标伸展变换（Gardner-Morikawa变换〔9,10〕）：

$$\xi=\varepsilon^a(x-\lambda_0t),\quad \tau=\varepsilon^{a+1}t,\quad a=p-1^{-1} \tag{2.4}$$

令$U=U(\xi,\tau)$，把(2.2)—(2.4)代入(2.1)，得到递推方程

$$W_0\frac{\partial U_1}{\partial\xi}=0 \tag{2.5}$$

$$W_0\frac{\partial U_2}{\partial\xi}=-\frac{\partial U_1}{\partial\tau}-(U_1\cdot\nabla_u A)_0\frac{\partial U_1}{\partial\xi}-K_0\frac{\partial^pU_1}{\partial\xi^p} \tag{2.6}$$

………

令A_0的相应于λ_0的左、右本征向量为L，R，则(2.5)的解为

$$U_1 = u^{(1)}(\xi,\tau)R \tag{2.7}$$

这里已用了假设(iii)，若无此假设，(2.7)右端要加上一项$V_1(\tau)$，由边界条件确定，在以后得到的约化方程中可用局部的Galileo变换消去[14]。$u^{(1)}(\xi,\tau)$待定，取R的一个元为1，$u^{(1)}$就是U_1的一个分量。把(2.7)代入(2.6)，以L左乘所得方程的两端，得(2.6)的可解性条件，即$u^{(1)}$应满足的方程

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi} + \mu\frac{\partial^p u^{(1)}}{\partial \xi^p} = 0 \tag{2.8}$$

其中 $\alpha = L(R\cdot\nabla_{0}A)_0 R/(LR)$ (2.9)

$$\mu = LK_0R/(LR) = L\left[\sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}\left(-\lambda_0 H^{\beta}_{\alpha 0} + K^{\beta}_{\alpha 0}\right)\right]R/(LR) \tag{2.10}$$

当$p=2$时，(2.8)为Burgers方程，$p=3$时，为KdV方程，$p=2m$时为Burgers型方程，$p=2m+1$时为KdV型方程。这里假定$\alpha \neq 0$，$\mu \neq 0$，若不然，需另作讨论。现举若干实例。

[例2.1]弱激波 理想气体Navier-Stokes方程的无量纲化一维形式为

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t} + u\frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho\frac{\partial u}{\partial x} = 0\\
&\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{T}{\gamma\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x} + \frac{1}{\gamma}\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{1}{R_1\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0\\
&\frac{\partial T}{\partial t} + u\frac{\partial T}{\partial x} + (\gamma-1)T\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{R_2 T}\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}\\
&\qquad + \frac{\gamma(\gamma-1)}{R_1\rho}\left[u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right] = 0
\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

无量纲化时所取的长度、速度、时间、密度和温度的特征值为L，a_0(未扰声速)，L/a_0，ρ_0(未扰密度)，T_0(未扰温度)，而

$$R_1 = \frac{\rho_0 a_0 L}{(4/3)\mu_0 + \lambda}, \qquad R_2 = \frac{c_v\rho_0 a_0 L}{R}, \qquad \gamma = \frac{c_p}{c_v}$$

其中，μ_0为剪切粘性系数，λ为体积粘性系数，k为导热率，c_p，c_v为定压比热和定容比热。取

$$U = \begin{pmatrix}\rho\\ u\\ T\end{pmatrix}, \qquad U_0 = \begin{pmatrix}1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$$

容易把(2.11)写成(2.1)的形式($p=2$，$s=2$)，其中

$$A = \begin{pmatrix} u, & \rho, & 0\\ T/(\gamma\rho), & u, & 1/\gamma\\ 0, & (\gamma-1)T, & u\end{pmatrix} \qquad H^{\beta}_{\alpha} = 0 \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2)$$

$$K_1^1=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ 0, & -1/(R_1\rho), & 0\\ 0, & \dfrac{\gamma(\gamma-1)u}{R_1\rho}, & -\dfrac{1}{R_2\rho}\end{pmatrix} \qquad K_2^1=\begin{pmatrix}1, & 0, & 0\\ 0, & 1, & 0\\ 0, & 0, & 0\end{pmatrix}$$

$$K_1^2=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0\\ 0, & -\dfrac{\gamma(\gamma-1)}{R_1\rho}, & 0\end{pmatrix} \qquad K_2^2=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0\\ 0, & u, & 0\end{pmatrix}$$

因此

$$A_0=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0\\ 1/\gamma, & 0, & 1/\gamma\\ 0, & (\gamma-1), & 0\end{pmatrix}$$

其本征值为±1，0。取 $\lambda_0=1$（弱激波），则有

$$R=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ \gamma-1\end{pmatrix} \qquad L=\left(\frac{1}{2\gamma},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2\gamma}\right)$$

经过简单的运算可知，本情形的约化方程（2.8）是Burgers方程

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\tau}+\frac{\gamma+1}{2}u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_1}+\frac{\gamma-1}{\gamma}\ \frac{1}{R_2}\right)\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial\xi^2}=0$$

其中 $\xi=\varepsilon(x-t)$，$\tau=\varepsilon^2t$。而$u^{(1)}$可视作一阶扰动密度或一阶扰动速度。

［例**2.2**］浅水波　描述浅水波的无量纲化Boussinesq方程为

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial h}{\partial t}+u\frac{\partial h}{\partial x}+h\frac{\partial u}{\partial x}=0\\ &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{3}\frac{\partial^3h}{\partial t^2\partial x}=0\end{aligned}\right\}\qquad(2.12)$$

h为水深，u为平均水平流速，无量纲化时取的特征长度为未扰水深h_0（常数），特征速度为线化波速$c_0=\sqrt{gh_0}$，特征时间$\dfrac{h_0}{c_0}=\sqrt{\dfrac{h_0}{q}}$。取$U=\begin{pmatrix}h\\ u\end{pmatrix}$，$U_0=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$，（2.12）可写成（2.1）的形式（$p=3$，$s=1$），其中

$A=\begin{pmatrix}u & h\\ 1 & u\end{pmatrix}$，$H_1^1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1/3\end{pmatrix}$，$H_2^1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$H_3^1=0$，$K_1^1=0$，$K_2^1=0$，$K_3^1=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

于是 $A_0=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，其本征值为±1，取$\lambda_0=1$，则有

$$R=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix},\qquad L=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

（2.4）为　　$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-t)$，　　$\tau=\varepsilon^{3/2}t$　　（2.13）

我们有$U_1=u^{(1)}R$，$u^{(1)}$满足KdV方程

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau}+\frac{3}{2}u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}+\frac{1}{6}\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3}=0 \tag{2.14}$$

［例2.3］非线性色散弦〔8,65〕 基本方程

$$\varphi_{tt}-c^2\varphi_{xx}-\sigma^2\varphi_{xxxx}=0 \tag{2.15}$$

其中$c=c(\varphi_x)$，σ为实常数，令$u=\varphi_t$，$v=\varphi_x$，$U=\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix}$，$U_0=\begin{pmatrix}0\\v_0\end{pmatrix}$，方程（2.15）可改写成

$$U_t+AU_x+KU_{xxx}=0$$

其中

$$A=\begin{pmatrix}0 & -c^2\\-1 & 0\end{pmatrix},\qquad K=\begin{pmatrix}0 & \sigma^2\\0 & 0\end{pmatrix}$$

A_0的本征值为$\pm c_0=\pm c(v_0)$，取$\lambda_0=c_0$，容易得到KdV方程

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \tau}-c_0' u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}-\frac{\sigma^2}{2c_0}\frac{\partial^3 u^{(1)}}{\partial \xi^3}=0$$

其中　$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-c_0t)$，$\tau=\varepsilon^{3/2}t$。

当A_0的本征空间含不变子空间时，可能出现$\mu=0$的情况，上述方法不能直接应用，〔14,15〕中对此作了一般讨论，这时需作如下变换：

$$\xi=\varepsilon^b(x-\lambda_0 t),\quad \tau=\varepsilon^{b+1}t,\quad b=1/[2(p-1)] \tag{2.6}$$

展开式（2.2）也应作适当改变，结果得到KdV型约化方程。现举例说明这一方法。

［例2.4］冷等离子体中的磁流体力学波　设外加均匀磁场$\mathbf{B}_0$为$(B_0\cos\varphi\, B_0\sin\varphi,\ 0)$，忽略位移电流和电荷分离，取如下特征量对一维磁流体力学方程进行无量纲化：长度L，Alfvén速度$v_A=B_0/\sqrt{4\pi n_0(m_i+m_e)}$，时间$L/v_A=w_0^{-1}$，磁场$B_0$，离子数密度$n_0$，就得到基本方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+K\frac{\partial}{\partial x}\left(I\frac{\partial}{\partial t}+uI\frac{\partial}{\partial x}\right)U=0 \tag{2.17}$$

其中

$$U=\begin{pmatrix}U^+\\ \\U^-\end{pmatrix},\quad U^+=\begin{pmatrix}n\\u\\v\\B_y\end{pmatrix},\quad U^-=\begin{pmatrix}w\\ \\B_z\end{pmatrix},\quad U_0=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\sin\varphi\\0\\0\end{pmatrix} \tag{2.18}$$

由$\nabla\cdot\mathbf{B}=0$已知$B_x=\text{const}=\cos\varphi$，$(u,\ v,\ w)$为离子流体速度，$(B_x,\ B_y,\ B_z)$为磁场，而

$$A=\begin{pmatrix}A^+ & B\\ & \\C & A^-\end{pmatrix},\quad A^+=\begin{pmatrix}u, & n, & 0, & 0\\0, & u, & 0, & B_yn^{-1}\\0, & 0, & u, & -B_xn^{-1}\\0, & B_y, & -B_x, & u\end{pmatrix},\quad A^-=\begin{pmatrix}u, & -B_xn^{-1}\\ & \\-B_x, & u\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}0, & 0\\ 0, & B_z n^{-1}\\ 0, & 0\\ 0, & 0\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & 0,\\ & & & \\ & & & \\ 0, & B_z, & 0, & 0,\end{pmatrix} \tag{2.19}$$

$$K=\begin{pmatrix}0, & D^-\\ & \\ D^+, & 0\end{pmatrix},\ D^-=\begin{pmatrix}0, & 0,\\ 0, & 0,\\ 0, & R_e^{-1}n^{-1}\\ -R_i^{-1}, & 0,\end{pmatrix},\ D^+=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & -R_e^{-1}n^{-1}\\ & & & \\ 0, & 0, & R_i^{-1}, & 0\end{pmatrix}$$

其中，$R_e=\omega_{ec}/\omega_0$，$R_i=\omega_{ie}/\omega_0$，ω_{ec}和ω_{ic}分别为电子回旋频率和离子回旋频率。易得

$$A_0=\begin{pmatrix}A_0^+, & 0\\ & \\ 0, & A_0^-\end{pmatrix},\ A_0^+=\begin{pmatrix}0, & 1, & 0, & 0\\ 0, & 0, & 0, & \sin\varphi\\ 0, & 0, & 0, & -\cos\varphi\\ 0, & \sin\varphi, & -\cos\varphi, & 0\end{pmatrix},\ A_0^-=\begin{pmatrix}0, & -\cos\varphi\\ & \\ -\cos\varphi, & 0\end{pmatrix} \tag{2.20}$$

$$K_0=\begin{pmatrix}0, & D_0^-\\ & \\ D_0^+, & 0\end{pmatrix},\ D_0^-=\begin{pmatrix}0, & 0\\ 0, & 0\\ 0, & R_e^{-1}\\ -R_i^{-1}, & 0\end{pmatrix},\ D_0^+=\begin{pmatrix}0, & 0, & 0, & -R_e^{-1}\\ & & & \\ 0, & 0, & R_i^{-1}, & 0\end{pmatrix} \tag{2.21}$$

A_0的本征值为0，±1，$\pm\cos\varphi$，分别对应于接触面、(快)磁声波和Alfvén 波。现讨论磁声波模式$\lambda_0=1$。由于A_0的本征空间有两个不变子空间，容易验证，(2.10) 中的$\mu=0$。故要引进变换 (2.16)，即

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-t),\quad \tau=\varepsilon^{3/2}t \tag{2.22}$$

并作展开

$$U^+=U_0^++\varepsilon U_1^++\cdots,\quad U^-=\varepsilon^{1/2}(\varepsilon U_1^-+\cdots) \tag{2.23}$$

把 (2.22)，(2.23) 代入 (2.19)，得

$$(-\lambda^0 I+A_0^+)\,\partial U_1^+/\partial\xi=0 \tag{2.24}$$

$$(-\lambda_0 I+A_0^-)\,\frac{\partial U_1^-}{\partial\xi}+D_0^+\frac{\partial^2 U_1^+}{\partial\xi^2}=0 \tag{2.25}$$

$$(-\lambda_0 I+A_0^+)\,\frac{\partial U_2^+}{\partial\xi}=-\frac{\partial U_1^+}{\partial\tau}-A_1^+\frac{\partial U_1^+}{\partial\xi}-D_0^-\frac{\partial^2 U_1^-}{\partial\xi^2} \tag{2.26}$$

设A_0^+的对应于$\lambda_0=1$的左、右本征向量为L^+，R^+。由 (2.24) 和 (2.25) 解得

$$U_1^+=u^{(1)+}(\xi,\tau)R^+ \tag{2.27}$$

$$U_1^-=-(-\lambda_0 I+A_0^-)^{-1}D_0^+R^+\partial u^{(1)+}/\partial\xi \tag{2.28}$$

代入 (2.26)，两端左乘以L^+，得$u^{(1)+}$应满足的方程 (KdV方程)

$$\frac{\partial u^{(1)+}}{\partial\tau}+\alpha u^{(1)+}\frac{\partial u^{(1)+}}{\partial\xi}+\mu\frac{\partial^3 u^{(1)+}}{\partial\xi^3}=0 \tag{2.29}$$

其中

$$\alpha=\frac{3}{2},\quad \mu=\frac{1}{2}\sin^{-2}\varphi(R_iR_e)^{-1}\{1+(1-R_iR_e^{-1}-R_eR_i^{-1})\cos^2\varphi\} \tag{2.30}$$

把由(2.29)解得的 $u^{(1)+}$ 代入（2.27），(2.28)，即得一阶解 U_1；当 $\varphi=\pi/2$ 时正好得到〔9〕中的结果。

当φ达到临界角 φ_c 时，即当

$$1+(1-R_iR_e^{-1}-R_eR_i^{-1})\cos^2\varphi=0 \tag{2.31}$$

时，$\mu=0$，上述方法还要做进一步修正，应作变换〔8〕

$$\xi=\varepsilon^{1/2}(x-t),\quad \tau=\varepsilon^{5/2}t \tag{2.32}$$

结果得到 $U_1=0$，$U_2^+=u^{(2)+}R^+$。$u^{(2)+}$ 满足 KdV型方程

$$\frac{\partial u^{(2)+}}{\partial\tau}+\frac{3}{2}u^{(2)+}\frac{\partial u^{(2)+}}{\partial\xi}-\frac{1}{2}\sin^{-2}\varphi_c(R_iR_e)^{-2}\frac{\partial^5u^{(2)+}}{\partial\xi^5}=0 \tag{2.33}$$

用类似的方法可以讨论 Alfvén 波的传播，所得的约化方程为修正的 KdV 方程

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\tau}+[u^{(1)}]^2\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}+\mu\frac{\partial^3u^{(1)}}{\partial\tau^3}=0 \tag{2.34}$$

当计及电子-离子碰撞效应时，磁声波的约化方程为 KdV-Burgers 方程〔66〕

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\tau}+\alpha u^{(1)}\frac{\partial u^{(1)}}{\partial\xi}+\mu\frac{\partial^2u^{(1)}}{\partial\xi^2}+\nu\frac{\partial^3u^{(1)}}{\partial\xi^3}=0 \tag{2.35}$$

2.2 弱非线性波的调制 在弱非线性波的调制问题中，调制波幅通常满足非线性 Schrödinger 方程

$$i\varphi_\tau+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\varphi_{\xi\xi}+Q|\varphi|^2\varphi=0 \tag{2.36}$$

及其各种推广形式。Taniuti 和 Washimi〔67〕在研究冷等离子体中啸声波的传播时首先严格地导得这一方程，后来 Taniuti 和 Yajima〔16,17〕对此作了一般的数学描述，并由一些作者作了各种推广〔46—48〕，〔68〕。

为简单起见，讨论模型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+B(U)=0 \tag{2.37}$$

假定（2.37）有均态解 U_0，即 $B(U_0)=0$。取矩阵

$$W_l=\mp il\omega I\pm ilkA_0+(\nabla_uB)_0,\quad l\in J \tag{2.38}$$

ω为频率，k 为波数，显见，线性色散关系为

$$\det W_{\pm1}=\det[\mp i\omega I\pm ikA_0+(\nabla_uB)_0]=0 \tag{2.39}$$

我们假设

$$|\det W_l|>>O(\varepsilon),\ \text{即}\det W_l\neq0\ (\text{当}|l|\neq1\text{时}) \tag{2.40}$$

当ε为准平面单色波的谱宽时，(2.40）意味着所考虑的是强色散系统。引进慢变量

$$\xi=\varepsilon(x-\lambda t),\quad \tau=\varepsilon^2 t \tag{2.41}$$

其中$\lambda=d\omega/dk$为群速度。现研究准平面波$\propto e^{i(kx-\omega t)}$的非线性调制。设

$$\begin{aligned}U&=U_0+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}U^{(\alpha)}\\&=U_0+\sum_{l=1}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}\sum_{\alpha=-\infty}^{\infty}U_l^{(\alpha)}(\xi,\ \tau)\exp[il(kx-\omega t)]\end{aligned} \tag{2.42}$$

为使$U^{(\alpha)}$取实值，设$U_l^{(\alpha)}$与$U_{-l}^{(\alpha)}$互为共轭。把（2.42）代入（2.37），得$U_l^{(1)}$满足的方程

$$W_l U_l^{(1)}=0 \tag{2.43}$$

由(2.39)，(2.40)得

$$U_1^{(1)}=\varphi^{(1)}R,\ (W_1R=0) \tag{2.44}$$

$$U_l^{(1)}=0,\ (|l|\neq 1\text{时}) \tag{2.45}$$

$U_l^{(2)}$满足

$$W_lU_l^{(2)}+(-\lambda I+A_0)\frac{\partial U_l^{(1)}}{\partial\xi}+\langle(U^{(1)}\cdot\nabla_uA)_0\sum_{l'=-\infty}^{\infty}il'kU_{l'}^{(1)}\exp[il'(kx-\omega t)]\rangle_l$$

$$+\frac{1}{2}\langle U^{(1)}U^{(1)}:\nabla_u\nabla_uB_0\rangle_l=0 \tag{2.46}$$

式中$\langle F\rangle_l$表示F的l次谐波项的系数，由（2.44)，(2.45）可知，(2.46)中的$\langle\ \ \rangle_l$仅当$|l|=2,0$时不为零，因此，$l=1$时的方程为

$$W_1U_1^{(2)}+(-\lambda I+A_0)R(\partial\varphi^{(1)}/\partial\xi)=0 \tag{2.47}$$

由 $\partial W_1/\partial k=i(-\lambda I+A_0)$，$W_1R=0$，易得

$$(-\lambda I+A_0)R=iW_1\partial R/\partial k,\quad L(-\lambda I+A_0)R=0 \tag{2.48}$$

设 $LW_1=0$，(2.47）的可解性条件自动满足，从而有

$$U_1^{(2)}=\varphi^{(2)}R-i(\partial\varphi^{(1)}/\partial\xi)\ (\partial R/\partial k) \tag{2.49}$$

由（2.46)容易解得

$$\begin{aligned}U_0^{(2)}=R_0^{(2)}|\varphi^{(1)}|^2,\ R_0^{(2)}=&-W_0^{-1}\{[ik(R^*\cdot\nabla\cdot A)_0+CC]\\&+\tfrac{1}{2}[(R^*R:\nabla_u\nabla_uB)_0+CC]\}\end{aligned} \tag{2.50}$$

$$\begin{aligned}U_2^{(2)}=R_2^{(2)}[\varphi^{(1)}]^2,\ R_2^2=&-W_2^{-1}\{ik(R\cdot\nabla_uA)_0R\\&+\tfrac{1}{2}(RR:\nabla_u\nabla_uB)_0\}\end{aligned} \tag{2.51}$$

$$U_l^{(2)}=0\qquad |l|\geqslant 3 \tag{2.52}$$

（2.50）中R^*表示R之共轭，CC表示前项之共轭。

$U_l^{(3)}$的方程为

$$W_lU_l^{(3)}+(-\lambda I+A_0)\frac{\partial U_l^{(\ )}}{\partial\xi}+\frac{\partial U_l^{(2)}}{\partial\tau}+\langle(U^{(1)}\cdot\nabla_uA)_0\frac{\partial U^{(1)}}{\partial\xi}\rangle$$

$$+\langle(U^{(1)}\cdot\nabla_u A)_0\sum_{l'} il'kU_{l'}^{(2)}Z_{l'}\rangle_l+\frac{1}{2}\langle(U^{(1)}U^{(1)}:\nabla_u\nabla_u A)_0\sum_{l'} il'kU_{l'}^{(1)}Z_{l'}\rangle_l$$

$$+\langle(U^{(2)}\cdot\nabla_u A)_0\sum_{l'} il'kU_{l'}^{(1)}Z_{l'}\rangle_l+\langle(U^{(1)}U^{(2)}:\nabla_u\nabla_u B)_0\rangle_l$$

$$+\frac{1}{6}\langle(U^{(1)}U^{(1)}U^{(1)}\vdots\nabla_u\nabla_u B)_0\rangle_l=0$$

这里$Z_{l'}=\exp[il'(kx-\omega t)]$。当$l=1$时，(2.53)左乘以$L$，并利用(2.49)—(2.52)，得到

$$i\frac{\partial\varphi^{(1)}}{\partial\tau}+P\frac{\partial^2\varphi^{(1)}}{\partial\xi^2}+Q|\varphi^{(1)}|^2\varphi^{(1)}=0 \tag{2.54}$$

其中 $$P=L(-\lambda I+A_0)\frac{\partial R}{\partial k}\bigg/(LR)=\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2} \tag{2.55}$$

$$Q=\frac{i}{LR}L\{ik[2(R^*\cdot\nabla_u A)_0R_2^{(2)}-(R_2^{(2)}\cdot\nabla_u A)_0R^*+(R_0^{(2)}\cdot\nabla_u A)_0R$$
$$+(RR^*:\nabla_u\nabla_u A)_0R-\frac{1}{2}(RR:\nabla_u\nabla_u A)_0R^*]+[(RR_0^{(2)}+R^*R_2^{(2)}:\nabla_u\nabla_u B]_0$$
$$+\frac{1}{2}(RR^*R\vdots\nabla_u\nabla_u\nabla_u B)_0\} \tag{2.56}$$

于是我们得到结论：基模调制波波幅满足非线性Schrödinger方程（2.54）。

值得注意的是，在实际问题中，$l=0$时的条件（2.40）常常不能得到满足，即常有$\det(\nabla_u B)_0=0$，上述方程须加以修正。通常的做法是寻找附加条件（如补充方程或边界条件）来确定$U_0^{(2)}$。试举一例。

[例2.5]电子等离子体波的调制[6] 对无耗散等温电子流体来说，基本方程为

$$\frac{\partial n}{\partial t}+u\frac{\partial n}{\partial x}+n\frac{\partial u}{\partial x}=0 \tag{2.57}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{a^2}{n}\frac{\partial n}{\partial x}+\frac{e}{m_e}E=0 \tag{2.58}$$

$$(\partial E/\partial t)-4\pi enu=0 \tag{2.59}$$

其中n,u,E分别为电子数密度、电子流体速度和电场强度，$a=(KT_e/m_e)^{1/2}$为电子热速度，e和m_e分别为电子的电荷和质量。此外，还有Poisson方程

$$\partial E/\partial x=4\pi e(n_0-n) \tag{2.60}$$

n_0为背景离子数密度。合并（2.57），(2.59）可知，(2.60）初始时刻成立就永远成立，下面用它作为附加条件。(2.57)—(2.59）可写成（2.37）形式，其中

$$U=\begin{pmatrix}n\\u\\E\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}u, & n, & 0\\ a^2/n, & u, & 0\\ 0, & 0, & u\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0\\(e/m_e)E\\-4\pi n_0 eu\end{pmatrix},\quad U_0=\begin{pmatrix}n_0\\0\\0\end{pmatrix}$$

易见$\det W_0=\det(\nabla\cdot B)_0=0$。由$\det W_1=0$得线性色散关系

$$\omega^2=\omega_p^2+a^2k^2 \tag{2.61}$$

其中$\omega_p=(4\pi ne^2/m_e)^{1/2}$为电子等离子体频率。容易算得

$$P=\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dR^2}=\frac{a^2\omega_p}{2\omega^3} \tag{2.62}$$

$$R_2^{(2)}=\frac{1}{3n_0\omega_p^2}\begin{pmatrix}4\omega^2+2\omega_p^2\\ \omega(4\omega^2-\omega^2)/(n_0k)\\ i4\pi e(2\omega^2+\omega_p^2)/k\end{pmatrix} \tag{2.63}$$

现在用补充条件（2.60）来确定$U_0^{(2)}$，$R_0^{(2)}$。（2.60）的左端为

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial E^{(2)}}{\partial\xi}\right)+\varepsilon^3\left(\frac{\partial E^{(2)}}{\partial\xi}\right)+\cdots=O(\varepsilon^2) \tag{2.64}$$

由此得知$n_0^{(1)}=0$，由$W_0U_0^{(1)}=0$得$U_0^{(1)}=E_0^{(1)}=0$，因此（2.64）应为$O(\varepsilon^2)$，从而有$n_0^{(2)}=0$，由

$$W_0U_0^{(2)}+ik[(R^*\cdot\nabla\cdot A)_0R-(R\cdot\nabla\cdot A)_0R^*]|\varphi^{(1)}|^2=0$$

得到 $$U_0^{(2)}=-\frac{2\omega}{n_0k}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}|\varphi^{(1)}|^2,\qquad R_0^{(2)}=-\frac{2\omega}{n_0k}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \tag{2.65}$$

把（2.63），（2.65）代入（2.56），得

$$Q=-k^2a^2(8\omega^2+\omega_0^{(2)})/(6n_0^{(2)}\omega\omega_0^{(2)}) \tag{2.66}$$

（2.62），（2.66）确定了（2.54）的系数。

三、非线性波的相互作用

本节讨论用于多波系统的推广的约化摄动法[21—23]。

考虑方程（2.1），保留假设(i)—(iii)，并假定A_0有相异的实本征值λ_1，λ_2，…，λ_n。引进经伸展的慢变量

$$\xi_j=\varepsilon^a[(x-\lambda_jt)-\varepsilon^{1-a}\varphi_j(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \tau)],\quad \tau=\varepsilon^{a+1}t \tag{3.1}$$

其中$a=(p-1)^{-1}$。(3.1)中引进φ_j，从数学上看是为了消除高阶解中的长期项，从物理上看是计及由波的相互作用产生的波速的变化；φ_j前的因子ε^{1-a}的引入是由于波速的变化正比于振幅与相互作用时间的乘积，而前者为$O(\varepsilon)$，后者是$O(\varepsilon^{-a})$。把(3.1)，(2.2)代入(2.1)，得到递推方程，U_1的方程为

$$\sum_{l=1}^{n}(-\lambda_lI+A_0)\frac{\partial U_1}{\partial\xi_l}=0 \tag{3.2}$$

设L_l和R_l为A_0的对应于λ_l的归一化左、右本征向量($l=1,2,\cdots,n$)，把U_1关于集合

$\{R_j\}$展开：

$$U_1=\sum_{j=1}^{n}f_j(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \tau)R_j \tag{3.3}$$

代入(3.2)，得到f_j的方程

$$\sum_{l=1}^{n}(\lambda_j-\lambda_l)\frac{\partial f_j}{\partial\xi_l}=0,\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ n) \tag{3.4}$$

因为我们只对准简单波感兴趣，故取(3.4)的解为

$$f_j=f_j(\xi_j,\ \tau),\ (j=1,2,\cdots,n) \tag{3.5}$$

把U_2也关于$\{R_l\}$展开，即

$$U_2=\sum_{l=1}^{n}g_l(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n,\ \tau)R_l \tag{3.6}$$

g_l的方程为

$$-\sum_{j}(\lambda_j-\lambda_l)\frac{\partial g_l}{\partial\xi_j}+\sum_{j\neq l}\sum_{m}\alpha_{lmj}f_m\frac{\partial f_j}{\partial\xi_j}+\sum_{j\neq l}\mu_{lj}\frac{\partial^p f_j}{\partial\xi_j^p}$$

$$+\frac{\partial f_l}{\partial\tau}+\alpha_l f_l\frac{\partial f_l}{\partial\xi_l}+\mu_l\frac{\partial^p f_l}{\partial\xi_l^p}$$

$$+\sum_{j\neq l}\left\{(\lambda_j-\lambda_l)\frac{\partial\varphi_l}{\partial\xi_j}+\alpha_{ljl}f_j\right\}\frac{\partial f_l}{\partial\xi_l}=0\quad(l=1,2,\cdots,n) \tag{3.7}$$

其中 $\alpha_{lmj}=[L_l,\ (R_m\cdot\nabla_u A)_0 R_j]$

$$\mu_{lj}=[L_l,\ \sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}(-\lambda_j H_{\alpha 0}^{\beta}+K_{\alpha 0}^{\beta})R_j]$$

$\alpha_l=\alpha_{lll},\qquad \mu_l=\mu_{ll}$

为避免出现长期项，须令

$$\frac{\partial f_l}{\partial\tau}+\alpha_l f_l\frac{\partial f_l}{\partial\xi_l}+\mu_l\frac{\partial^p f_l}{\partial\xi_l^p}=0 \tag{3.8}$$

$$\sum_{j\neq l}(\lambda_j-\lambda_l)\frac{\partial\varphi_l}{\partial\xi_j}=-\sum_{j\neq l}\alpha_{ljl}f_j \tag{3.9}$$

由(3.8)可见，f_l满足Burgers型方程或KdV型方程，而由(3.9)可解得

$$\varphi_l=\sum_{j\neq l}(\lambda_l-\lambda_j)^{-1}\alpha_{ljl}\int^{\xi_j}f_j(\zeta)d\zeta+\theta_l(\eta_1^{(l)},\ \cdots,\ \eta_n^{(l)},\ \tau) \tag{3.10}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\eta_i^{(l)} &= \xi_i - N_i^{(l)}\sum_{r=1}^{n} N_r^{(l)}\xi_r,\quad N_i^{(l)} = (\lambda_l-\lambda_i)/\Lambda_l \\ \Lambda_l &= \left[\sum_i (\lambda_l-\lambda_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\right\}\qquad(3.11)$$

在条件(3.8)，(3.9)下，不难求得(3.7)的解g_l。

上面得到的描述n个准简单波的方程不仅适用于象孤立波碰撞那样的特殊问题，而且可用于研究非线性波随时间演化等一般问题。准简单波之间的相互作用效应反映在相位修正因子φ_l中。

［例3.1］ *两离子-声孤立波的迎撞问题* 在有冷离子、热电子的无碰撞等离子体中，离子声波的基本方程为［6］

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial n}{\partial t}+u\frac{\partial n}{\partial x}+n\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}\right)\left(\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}\right)=0\\ &\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{n}\frac{\partial n}{\partial x}=0\end{aligned}\right\}\qquad(3.12)$$

其中，n为电子数密度，u为离子流体速度，无量纲化时所用的特征量为平均数密度n_0，离子声波中的声速$(KTe/m_i)^{\frac{1}{2}}$，Debye长度$\lambda_D=[KTe/(4\pi n_0e^2)]^{\frac{1}{2}}$，离子等离子体频率的倒数$\omega_{p_i}^{-1}=[m_i/(4\pi n_0e^2)]^{\frac{1}{2}}$。令$U=\begin{pmatrix}n\\u\end{pmatrix}$，$U_0=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，方程（3.12)可写成（2.1）的形式($s=1$，$p=3$)，易得$\lambda_1=1$，$\lambda_2=-1$，$R_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$，$R_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$，

$$U_1=f_1(\xi_1,\tau)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+f_2(\xi_2,\tau)\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

在一阶近似下可取

$$\left.\begin{aligned}\xi_1&=\varepsilon^{1/2}\left\{(x-t)+\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}\int^{\xi_2}f_2(\zeta)d\zeta\right\}\\ \xi_2&=\varepsilon^{1/2}\left\{(x+t)+\frac{\varepsilon^{1/2}}{2}\int^{\xi_1}f_1(\zeta)d\zeta\right\}\\ \tau&=\varepsilon^{3/2}t\end{aligned}\right\}\qquad(3.13)$$

而f_1，f_2分别满足KdV方程

$$\frac{\partial f_1}{\partial\tau}+f_1\frac{\partial f_1}{\partial\xi_1}+\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_1}{\partial\xi_1^3}=0\qquad(3.14)$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial\tau}-f_2\frac{\partial f_2}{\partial\xi_2}-\frac{1}{2}\frac{\partial^3 f_2}{\partial\xi_2^3}=0\qquad(3.15)$$

对于两个孤立波的迎撞情形，令$f_i=f_i(\xi_i-c_i\tau)$，并在边界条件$f_i=\partial f_i/\partial\xi_i=\partial^2f_i/\partial\xi_i{}^2=0$（$\xi_i=\pm\infty$时）下求解(3.14)，(3.15)，得到

$$
\left.\begin{aligned}
f_1 &= A\,\mathrm{sech}^2\{(A/6)^{1/2}(\xi_1-(1/3)A\tau)\}\\
f_2 &= B\,\mathrm{sech}^2\{(B/6)^{1/2}(\xi_2+(1/3)B\tau)\}
\end{aligned}\right\}\tag{3.16}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \varepsilon^{1/2}\left\{(x-t)+\left(\frac{3}{2}\varepsilon B\right)^{1/2}\tanh\left[\left(\frac{B}{6}\right)^{1/2}\left(\xi_2+\frac{1}{3}B\tau\right)\right]-x_A\right\}\\
\xi_2 &= \varepsilon^{1/2}\left\{(x+t)+\left(\frac{3}{2}\varepsilon A\right)^{1/2}\tanh\left[\left(\frac{A}{6}\right)^{1/2}\left(\xi_1-\frac{1}{3}A\tau\right)\right]-x_B\right\}
\end{aligned}\right\}\tag{3.17}
$$

其中x_A和x_B为两孤立波的初相。由(3.17)可算出两孤立波迎撞之后的相移

$$
\delta_A=[x-t]_{\xi_1=0,\ \xi_2=\infty}-[x-t]_{\xi_1=0,\ \xi_2=-\infty}=-(6\varepsilon B)^{1/2}
$$

$$
\delta_B=[x+t]_{\xi_1=-\infty,\ \xi_2=0}-[x+t]_{\xi_1=\infty,\ \xi_2=0}=(6\varepsilon A)^{1/2}
$$

Oikawa 和 Yajima[22，23]用类似的方法讨论了非线性调制波的相互作用，其基本思想是，对调制波的振幅和相位同时引进附加的坐标变形，以确定相互作用引起的波包轨道和群速度的改变。所讨论的模型方程仍为(2.37)，并保留有关假设。为了简单起见，只讨论两个基模(ω_1,k_1)(ω_2,k_2)，它们满足线性色散关系

$$
\det(-i\omega_j I+ik_jA_0+\nabla_u B_0)=0,\qquad (j=1,2)\tag{3.18}
$$

设解为

$$
U=U_0+\sum_{\alpha=1}^{\infty}\varepsilon^{\alpha}\sum_{l,n=-\infty}^{\infty}U_{l,n}^{\alpha}(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)Z_{l,n}\tag{3.19}
$$

其中，

$$
\begin{aligned}
Z_{l,n}\exp\{&il[k_1x-\omega_1t+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\Omega_1^{(r)}(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)]\\
&+in[k_2x-\omega_2t+\sum_{r=1}^{\infty}\varepsilon^r\Omega_2^{(r)}(\xi_1,\ \xi_2,\ \tau)]
\end{aligned}\tag{3.20}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
\xi_1 &= \varepsilon[(x-\lambda_1t)-\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\psi_1^{(r)}(\xi_1,\xi_2,\tau)-x_A]\\
\xi_2 &= \varepsilon[(x-\lambda_2t)-\sum_{r=0}^{\infty}\varepsilon^r\psi_2^{(r)}(\xi_1,\xi_2,\tau)-x_B]\\
\tau &= \varepsilon^2t
\end{aligned}\right\}\tag{3.21}
$$

λ_j为群速度：$\lambda_j=(\partial\omega/\partial k)_{k=k_j}$，($j=1,2$)。引进矩阵

$$
W_{l,n}=-i(l\omega_1+n\omega_2)I+i(lk_1+nk_2)A_0+(\nabla_uB)_0
$$

并设 $\det W_{l,n}\neq0$，($|l|+|n|\neq1$)。线性色散关系(3.18)可写成

$$
\det W_{01}=\det W_{10}=0
$$

从而得到

$$U_{10}^{(1)}=\varphi_1(\xi_1,\tau)R_1,\quad (W_{10}R_1=0)$$

$$U_{01}^{(1)}=\varphi_2(\xi_2,\tau)R_2,\quad (W_{01}R_2=0)$$

$$U_{l,n}^{(1)}=0,\quad (|l|+|n|\neq 1)$$

由以后各阶项方程的可解性条件可以确定$\varphi_1=\varphi_1(\xi_1,\tau)$和$\varphi_2=\varphi_2(\xi_2,\tau)$所满足的方程——非线性 Schrodinger 方程，并确定$\Omega_1^{(r)}$，$\Omega_2^{(r)}$，$\psi_1^{(r)}$，$\psi_2^{(r)}$。在讨论具体问题（如 Klein-Gordon 方程）时，也遇到了 $\det W_{00}=0$的困难，同样可引用附加条件来加以克服（详见〔23〕)。

四、非均匀介质中的非线性波

把约化摄动法推广应用于非均匀介质或非稳恒介质中去并不困难，其中的限制是非均匀性或非稳恒程度应相当弱。

讨论模型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t}+A\frac{\partial U}{\partial x}+\sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}\left(H_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial t}+K_{\alpha}^{\beta}\frac{\partial}{\partial x}\right)U+B\frac{dS}{dx}=0 \tag{4.1}$$

（4.1）中的系数矩阵的元依赖于U和S，而列向量S为x的缓变函数。初始状态U_0一般也为x的函数。设$\lambda_0(x)$为$A_0=A(U_0)$的本征值。作如下变换

$$\xi=\varepsilon^{a}\left(\int\frac{dx}{\lambda_0}-t\right),\quad \eta=\varepsilon^{a+1}x,\quad a=\frac{1}{p-1} \tag{4.2}$$

进一步假设S依赖于慢变量η，且U_0满足

$$A_0\frac{dU_0}{d\eta}+B_0\frac{dS}{d\eta}=0 \tag{4.3}$$

与第二节一样作摄动展开，代入(4.1)，得到

$$\left(-I+\frac{1}{\lambda_0}A_0\right)\frac{\partial U_1}{\partial\xi}=0 \tag{4.4}$$

$$\left(-I+\frac{1}{\lambda_0}A_0\right)\frac{\partial U_2}{\partial\xi}=-\Big[A_0\frac{\partial U_1}{\partial\xi}+\frac{1}{\lambda_0}A_1\frac{\partial U_1}{\partial\xi}+A_1\frac{dU_0}{d\eta}$$

$$+\sum_{\beta=1}^{s}\prod_{\alpha=1}^{p}\left(-H_{\alpha_0}^{\beta}+\frac{1}{\lambda_0}K_{\alpha_0}^{\beta}\right)\frac{\partial^p U_1}{\partial\xi^p}+B_1\frac{dS}{d\eta}\Big] \tag{4.5}$$

由(4.4)解得

$$U_1=u^{(1)}(\xi,\eta)R(\eta)+V(\eta) \tag{4.6}$$

其中$R(\eta)$为A_0的对应于λ_0的右本征向量，$V(\eta)$为由初始条件确定的列向量，把(4.6)代入（4.5)，所得的方程左乘以A_0的左本征向量$L(\eta)$，得$u^{(1)}$应满足的方程

$$\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \eta}+(\alpha u^{(1)}+\alpha_1)\frac{\partial u^{(1)}}{\partial \xi}+\mu\frac{\partial^p u^{(1)}}{\partial \xi^p}+\gamma u^{(1)}+\gamma_1=0 \tag{4.7}$$

其中α，α_1，μ，γ，γ_1均为η的函数

$$\alpha=\frac{L(R\cdot\nabla_u A)_0 R}{\lambda_0^2 LR}, \quad \alpha_1=\frac{L(V\cdot\nabla_u A)_0 R}{\lambda_0^2 LR}$$

$$\mu=\frac{L[\sum\limits_\beta\prod\limits_\alpha(-\lambda_0 H_{\alpha_0}^{\beta}+K_{\alpha_0}^{\beta})]R}{\lambda_0 LR}$$

$$\gamma=\frac{\lambda_0 L\frac{dR}{d\eta}+L[(R\cdot\nabla_u A)_0\frac{dU_0}{d\eta}+(R\cdot\nabla_u B)_0\frac{dS}{d\eta}]}{\lambda_0 LR}$$

$$\gamma_1=\frac{\lambda_0 L\frac{dV}{d\eta}+L[(V\cdot\nabla_u A)_0\frac{dU_0}{d\eta}+(V\cdot\nabla_u B)_0\frac{dS}{d\eta}]}{\lambda_0 LR}$$

作变换

$$\varphi=e^{\int\gamma d\eta}u^{(1)}+\int\gamma_1 e^{\int\gamma d\eta}d\eta$$

$$\zeta=\xi-\int\alpha_1 d\eta+\int d\eta[\alpha e^{-\int\gamma d\eta}\int\gamma_1 e^{\int\gamma d\eta}d\eta] \tag{4.8}$$

导得变系数的Burgers型或KdV型方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\alpha e^{-\int\gamma d\eta}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}+\mu\frac{\partial^p\varphi}{\partial\zeta^p}=0 \tag{4.9}$$

当$\mu=0$时，可令$a=1/[2(p-1)]$，并按$\varepsilon^{1/2}$作摄动展开，可导得类似于(4.9)的方程，只是其中的p换成了$2p-1$。

关于调制波可作类似的讨论，例如对模型方程(2.37)，设$U_0=U_0(\eta)$，这时，对准平面波$\propto\exp\{\pm i[k(\eta)x-\omega t]\}$，线性色散关系变成

$$\det(\mp i\omega I\pm ik' A_0+\nabla_u B_0)=0 \tag{4.10}$$

其中$k'=\partial(\eta k)/\partial\eta$，采用与§2.2相似的步骤可导得调幅波满足的修正的非线性Schrödinger方程

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2 k'}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\mu|\varphi|^2\varphi+\kappa\varphi=0 \tag{4.11}$$

其中μ，κ都是η的函数。

对于随时间缓变的非稳恒介质，可讨论形如(4.1)的模型方程(末项的dS/dx换成dS/dt)，引进非线性的Gardner-Morikawa变换

$$\xi=\varepsilon^a(x-\int\lambda_0 dt),\quad \tau=\varepsilon^{a+1}t,\quad a=(p-1)^{-1} \tag{4.12}$$

假设S为τ的函数，可得到与上面雷同的结果。

〔例4.1〕 缓变深度的浅水中的波 这种浅水波由Peregrine方程描述：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial h}{\partial x}-\frac{1}{2}H\frac{\partial^3(Hu)}{\partial x^2\partial t}+\frac{1}{6}H^2\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}=0\\
&\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}[(H+h)u]=0
\end{aligned}\right\}\qquad(4.13)
$$

其中u为平均水平速度，H为未扰水深，h为波幅，取$U=\begin{pmatrix}h\\u\end{pmatrix}S=H$，可把(4.13)化成(4.1)的形式，设$U_0=0$，可得$A_0$的本征值为$\pm\sqrt{H}$，取$\lambda_0=\sqrt{H}$，右本征向量为$R=\begin{pmatrix}H\\-\sqrt{H}\end{pmatrix}$，在$H=H(\varepsilon^{3/2}x)$的条件下，令

$$
\xi=\varepsilon^{1/2}\left(\int\frac{dx}{\sqrt{H}}-t\right),\quad \eta=\varepsilon^{3/2}x
$$

则有　　$U_1=u^{(1)}(\xi,\eta)R$。

令$\varphi=H^{6/4}u^{(1)}$，导得缓变系数的KdV方程

$$
\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+\frac{3}{2}H^{-7/4}\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+\frac{1}{6}H^{1/2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\xi^3}=0\qquad(4.14)
$$

[例4.2]　电子等离子体波的调制　基本方程已在[例2.5]中给出，不过现在未扰数密度为$n_0=n_0(\eta)=n_0(\varepsilon^2x)$。不难导出，调制波幅$\varphi$应满足的方程为

$$
i\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}-\frac{1}{2}\frac{\partial^2k'}{\partial\omega^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}-k'\frac{8\omega^2+\omega_p^2}{6n_0^2\omega_p^2}|\varphi|^2\varphi-\frac{i}{2}\left[\frac{d}{d\eta}\ln(k'n_0)\right]\varphi=0\qquad(4.15)
$$

其中　　$k'=[\omega^2-\omega_p^2(\eta)]^{1/2}$。

[例4.3]　膨胀宇宙中的自引力波　对总体均匀、各向同性的自引力介质来说，在随着平均运动的坐标系中，无粘流体模型方程为

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u}{\partial x}+3H\rho=0\\
&\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}+\left(\frac{c}{a}\right)^2\frac{1}{\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}-\frac{1}{a^2}f+2Hu=0\qquad(4.16)\\
&\frac{\partial f}{\partial x}+4\pi Ga^2(\rho-\rho_0)=0
\end{aligned}
$$

其中，$H=(1/a)(da/dt)$为Hubble常数，$-f$为万有引力，c为声速，a为由Friedman型方程确定的膨胀尺度参数，ρ_0为未扰密度，它们都是t的函数。若基载波周期远小于宇宙寿命，可假定未扰宇宙以时间尺度$\tau=\varepsilon^2t$演化，可令$H=\varepsilon^2\tilde{H}$，$\tilde{H}=(1/a)(da/dt)$，这时调制波幅φ满足方程

$$
i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\omega'}{\partial k^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\mu|\varphi|^2\varphi+\kappa\varphi=0
$$

其中　　$\omega'^2=\left(\frac{c}{a}\right)^2k^2-\omega_0^2$，　　$\frac{\partial^2\omega'}{\partial k^2}=-\left(\frac{c}{a}\right)^2\left(\frac{\omega_0}{\omega'}\right)\frac{1}{\omega'}$

$$\mu = k^2(8\omega'^4 + 7\omega_0^2\omega'^2 + 5\omega_0^4)/(6\omega_0^2\omega')$$

$$k = \frac{i}{2}\frac{d\ln(\omega' a)}{d\tau}, \quad \omega_0^2 = 4\pi G\rho_0$$

五. 高阶近似问题

这里简述Kodama和Taniuti[38—40]提出的重正化-约化摄动法。考虑模型方程

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A\frac{\partial U}{\partial x} + K_1\frac{\partial}{\partial x}\left[K_2\frac{\partial}{\partial x}\left(K_3\frac{\partial U}{\partial x}\right)\right] = 0 \tag{5.1}$$

这是(2.1)的特例，仍保留有关假设，引进变换

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - \lambda_0 t), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t \tag{5.2}$$

类似于§2.1，导得

$$U_1 = u^{(1)}(\xi,\tau)R \tag{5.3}$$

适当选取R，可使$u^{(1)}$的方程中$\alpha = -6$，为简单计，设$\mu = LK_0R/(LR) = 1$，$u^{(1)}$的方程变成

$$\bar{F}(u^{(1)}) = u^{(1)}_\tau - 6u^{(1)}u^{(1)}_\xi + u^{(1)}_{\xi\xi\xi} = 0 \tag{5.4}$$

容易得到

$$U_2 = u^{(2)}R + (1/2)\hat{R}[u^{(1)}]^2 + \hat{K}_0Ru^{(1)}_{\xi\xi} \tag{5.5}$$

$\hat{R}$，$\hat{K}_0$由下列两式确定：

$$\hat{R} = (R\cdot\nabla_u R)_0, \quad (-\lambda_0 I + A_0)\hat{K}_0 = I - K_0 \tag{5.6}$$

U_3满足

$$(-\lambda_0 I + A_0)U_{3\tau} + u^{(2)}_\tau R + (R\cdot\nabla_u A)_0R[u^{(1)}u^{(2)}]_\xi + K_0Ru^{(1)}_{\xi\xi\xi} = S^{(2)}(u^{(1)}) \tag{5.7}$$

其中，列向量$S^{(2)}$仅依赖于$u^{(1)}$及其关于ξ的导数，(5.7)左乘以左本征向量L，得$u^{(2)}$应满足的方程

$$\left.\begin{aligned} &\bar{L}[u^{(1)}]\ u^{(2)} = \psi^{(2)}\ (u^{(1)}) \\ &\bar{L}[u^{(1)}] = \frac{\partial}{\partial\tau} - 6\frac{\partial}{\partial\xi}u^{(1)} + \frac{\partial^3}{\partial\xi^3} \end{aligned}\right\} \tag{5.8}$$

(5.8)是非齐次线性KdV方程，非齐次项

$$\psi^{(2)} = LS^{(2)}/(LR) = \psi_1^{(2)}(u^{(1)})^2 + u^{(1)}_\xi + \psi_2^{(2)}u^{(1)}u^{(1)}_{\xi\xi\xi} + \psi_3^{(2)}u^{(1)}_\xi u^{(1)}_{\xi\xi} + \psi_4^{(2)}u^{(1)}_{\xi\xi\xi\xi\xi}$$

其中$\psi_j^{(2)}(j=1,2,3,4)$为常数。类似地可得高阶方程

$$\bar{L}[u^{(1)}]u^{(n)} = \bar{\psi}^{(n)}(u^{(1)},\ u^{(2)},\ \cdots,\ u^{(n-1)}) \tag{5.9}$$

如果$\psi^{(n)}$中含有满足齐次线性KdV方程解的项$\bar{\psi}^{(n)}$，解$u^{(n)}$就会出现长期项，即

$$u^{(n)} = \tau\bar{\psi}^{(n)} + f^{(n)}, \quad \bar{L}[u^{(1)}]f^{(n)} = \psi^{(n)} - \bar{\psi}^{(n)} \tag{5.10}$$

现在考虑(5.4)的单个孤立波解

$$u^{(1)}=-2\kappa^2\mathrm{sech}^2\eta,\quad \eta=\kappa(\xi-4\kappa^2\tau)+\theta \tag{5.11}$$

容易证明$u^{(1)}_{\xi}\propto\mathrm{sech}^2\eta\ \tanh\eta$满足齐次线性KdV方程，因此，$\psi^{(n)}$中正比于$\mathrm{sech}^2\eta\cdot\tanh\eta$的项就是共振项。利用(5.11)，方程(5.8)中的$\psi^{(2)}$为

$$\psi^{(2)}=\kappa^7(b_1^{(2)}\mathrm{sech}^2\eta\ \tanh\eta+b_2^{(2)}\mathrm{sech}^4\eta\ \tanh\eta+b_3^{(2)}\mathrm{sech}^6\eta\ \tanh\eta) \tag{5.12}$$

其中$b_j^{(2)}(j=1,2,3)$为与κ无关的常数，为消除(5.12)括号中的第一项，采用如下的重正化步骤。先把各阶方程合写成

$$\varepsilon\bar{F}(u^{(1)})+\sum_{n\geqslant 2}\varepsilon^n\bar{L}[u^{(1)}]u^{(n)}=\sum_{n\geqslant 2}\varepsilon^n\psi^{(n)} \tag{5.13}$$

在(5.13)两端加上$\sum\limits_{n\geqslant 2}\varepsilon^n\cdot\delta\lambda\cdot u^{(n)}_{\xi}$，其中$\delta\lambda=\varepsilon\lambda^{(1)}+\varepsilon^2\lambda^{(2)}+\cdots$，$\lambda^{(j)}$待定。于是得到

$$\tilde{u}^{(1)}_{\tau}-6\tilde{u}^{(1)}\tilde{u}^{(1)}_{\xi}+\tilde{u}^{(1)}_{\xi\xi\xi}+\delta\lambda\tilde{u}^{(1)}_{\xi}=0 \tag{5.14}$$

$$\bar{L}[u^{(1)}]u^{(2)}+\delta\lambda u^{(2)}_{\xi}=\tilde{\psi}^{(2)}+\lambda^{(1)}u^{(1)}_{\xi} \tag{5.15}$$

为消除$\tilde{\psi}^{(2)}$中的共振项，令$\lambda^{(1)}=-\kappa^4b_1^{(2)}/4$，即

$$\delta\lambda=-\varepsilon b_1^{(2)}\kappa^4/4$$

并引进Galileo变换$\tilde{\xi}=\xi-\delta\lambda\tau$，由(5.14)，(5.15)解得

$$u^{(1)}=-2\kappa^2\mathrm{sech}^2\tilde{\eta} \tag{5.16}$$

$$u^{(2)}=\kappa^4(\beta_1^{(2)}\mathrm{sech}^4\tilde{\eta}+\beta_2^{(2)}\mathrm{sech}^6\tilde{\eta})+u^{(2)}_{H} \tag{5.17}$$

其中 $\tilde{\eta}=\kappa\{\xi-(4\kappa^2+\delta\lambda)\tau\}+\theta$

$$\beta_1=-(1/96)\ (2b_2^{(2)}+b_3^{(2)}),\quad \beta_2{}^{(1)}_{2}/48$$

而$u^{(2)}_{H}$为齐次线性 KdV 方程的通解，由(5.16)，(5.17)可见，孤立波的传播速度已作了调整，在一阶近似下，$c=4\kappa^2-(\varepsilon\kappa^4b_1{}^{(2)}_{1}/4)$。这一过程可以继续下去，求得更高阶的解。

六、多维情形

多维情形的约化摄动法较为复杂，这里不作详细描述，仅罗列一些结果。Nozaki和Taniuti[45]考虑了等离子体中漂移波的二维传播，归结出二维空间中的KdV方程

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}+C_s\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}+\frac{1}{2}\frac{C_s^3}{\omega_{ci}^2}\frac{\partial^3\varphi}{\partial\eta^2\partial\zeta}+\frac{1}{2}C_s\lambda_D^2\left(\frac{\partial^3}{\partial\eta^2\partial\zeta}+\frac{\partial^3}{\partial\zeta^3}\right)\varphi+\frac{1}{2}\frac{C_s^2}{\omega_{ci}}\kappa\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\doteq 0 \tag{6.1}$$

其中C_s为电子热速度，w_{ci}为离子回旋频率，λ_0为Debye长度，，$\kappa=|dn_0/d\xi|/n_0$，

$$\zeta=\varepsilon^{1/2}(z-C_st),\quad \eta=\varepsilon^{1/2}y,\quad \tau=\varepsilon^{3/2}t,\quad \xi=\varepsilon x$$

Van Dam[47]考虑二维冷等离子体中电磁波的非线性调制时，得到了推广的非线性Schrödinger方程

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\frac{d^2\omega}{dk^2}\frac{\partial^2\varphi}{d\xi^2}+q_0(|\varphi|^2-|\varphi_0|^2)+q|\varphi|^2\varphi=0 \tag{6.2}$$

其中$\varphi_0=\varphi_0(\tau)$为$\varphi$的边值。

Asano[46]在热对流模式的三维调制问题中得到

$$i\frac{\partial\varphi}{\partial\tau}+\frac{1}{2}\sum_{j,l=1}^{3}\frac{\partial^2\omega}{\partial k_j\partial k_l}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi_j\partial\xi_l}-\frac{(kk_1)^3}{(\alpha gd)^{1/2}}|\varphi|^2\varphi+\frac{i}{2}(\nu'+\kappa')k^2\varphi=0 \tag{6.3}$$

其中，$k_1^2=k_x^2+k_y^2$，g为重力加速度，α，$\varepsilon^2\nu'$，$\varepsilon^2\kappa'$为热膨胀系数，粘性系数和导热率，d为常数。

近年来有关多维情形的工作有所增多，详细描述可参阅有关文献。

七、结束语

前面我们粗略地综述了约化摄动法及其应用。可以看到，这种方法对研究非线性波传播问题来说相当有效，可使求解步骤大大简化，因而应予以重视和应用。当然，这种方法有其局限性，它只能用于弱非线性波，而且一般只能在波的远场分析中发挥作用。为求得实际问题的完整解答，必须把这种方法与其它方法（如数值方法、散射反演法、直接方法等等）结合起来。然而，用约化摄动法往往能为分析复杂的非线性波提供良好的开端，这是它的值得注意之处。

致谢：谈镐生教授给了作者热情的鼓励和指导，谨向他致以深切的谢意。

参 考 文 献

[1] Nayfeh,A.H.(1973),Perturbation Methods,John Wiley,New York.

[2] 钱伟长(1980)，奇异摄动理论，清华大学基础部.

[3] 丁汝(1980)，摄动法及其在力学中的应用(李家春、戴世强、凌国灿、庄峰青整理),中国科学院力学研究所.

[4] Whitham,G.B.(1974),Linear and Nonlinear Waves,John Wiley,New York.

[5] 角谷典彦、川原琢治(1976)，日本物理学会志，**31**：287—297.

[6] 谷内俊弥、西原功修(1977)，非线形波动，第3章，岩波书店.

[7] Taniuti,T.,et al.(1974),Reductive perturbation method for nonlinear wave propagation,*Suppl.Progr.Theor.Phys.*,**55**:1—306.

[8] Jeffrey,A.and T.Kakutani (1972),*SIAM Rev.*,**14**:582—643.

[9] Gardner,C.S.and G.K.Morikawa (1960),Similarty in the asymptotic behavior of collision-free hydromagnetic waves and water waves,New York Univ.Courant Inst.Math.Sci.Res.Rept.TID-6184.

〔10〕 Gardner,C.S.and G.K.Morikawa (1965),*Comm.Pure Appl.Math.*,**18**:35—49.
〔11〕 Washimi,H.and T.Taniuti (1966),*Phys.Rev.Lett.*,**17**:996—998.
〔12〕 Gardner,C.S.and C.H.Su (1967),Derivation of the Korteweg-de Vries equation,1966 Annual Report,Princeton Univ.Plasma Phys.Lab.Matt—Q—24:329.
〔13〕 Su,C.H.and C.S.Gardner (1969),*J.Math.Phys.*,**10**:536—539.
〔14〕 Taniuti,T.and C.C.Wei (1968),*J.Phys.Soc.Japan*,**24**:941—946.
〔15〕 Kakutani,T.,H.Ono,T.Taniuti and C.C.Wei(1968),*ibid*,**24**:1159—1166.
〔16〕 Taniuti,T.and N.Yajima (1969),*J.Math.Phys.*,**10**:1369—1372.
〔17〕 Asano,N.,T.Taniuti and N.Yajima (1969),*ibid*,**10**:2020—2024.
〔18〕 Ikezi,H.,R.J.Taylor and D.R.Baker (1970),*Phys.Rev.Lett.*,**25**:11—13.
〔19〕 Ikezi,H.(1973),*Phys.Fluids*,**16**:1668—1675.
〔20〕 Kakutani,T.(1974),*Suppl.Progr.Theor.Phys.*,**55**:97—119.
〔21〕 Oikawa,M.and N.Yajima (1973),*J.Phys.Soc.Japan*,**34**:1093—1099.
〔22〕 Oikawa,M.and N.Yajima (1974),*ibid*,**37**:486—496.
〔23〕 Oikawa,M.and N.Yajima (1974),*Suppl.Progr.Theor.Phys.*,**55**:36-51.
〔24〕 戴世强(1981)，PLK方法，《奇异摄动理论及其在力学中的应用》(钱伟长主编)，科学出版社，33—86.
〔25〕 Tatsumi,T.and H.Tokunaga (1974),*J.Fluid Mech.*,**65**:581—601.
〔26〕 Tokunaga,H.and T.Tatsumi (1975),*J.Phys.Soc.Japan*,**38**:1169-1179.
〔27〕 Tokunaga,H.(1976),*ibid*,**41**:328—337.
〔28〕 Watanabe,K.(1981),*ibid*,**50**:15—16.
〔29〕 Asano,N.and T.Taniuti (1969),*ibid*,**27**:1059—1062.
〔30〕 Asano,N.and T.Taniuti (1970),*ibid*,**29**:209—214.
〔31〕 Asano,N.(1970), *ibid*,**29**:220—224.
〔32〕 Asano,N.(1974),*Suppl.Progr.Theor.Phys.*,**55**:52—79.
〔33〕 Ichikawa,Y.H.,T.Mitsuhashi and K.Konno (1976),*J.Phys.Soc.Japan*,**41**:1382—1386.
〔34〕 Ichikawa,Y.H.,T.Mitsuhashi and K.Konno (1977),*ibid*,**43**:675—683.
〔35〕 Konno,K.,T.Mitsuhashi and Y.H.Ichikawa (1977),*ibid*,**43**:669—674.
〔36〕 Aoyama,T.and Y.H.Ichikawa (1977),*ibid*,**42**:313—318.
〔37〕 Sugimoto,N.and T.Kakutani(1977),*ibid*,**43**:1469—1470.

〔38〕 Kodama,Y.and T.Taniuti (1978),*ibid*,**45**:298—310.
〔39〕 Kodama,Y.(1978),*ibid*,**45**:311—314.
〔40〕 Kodama,Y.and T.Taniuti (1979),*ibid*,**47**:1706—1716.
〔41〕 Konno,K.,T.Mitsuhashi and Y.H.Ichikawa (1979), *ibid*,**46**:1904—1914.
〔42〕 Tokunaga,H.(1980),*ibid*,**48**:2125—2133.
〔43〕 Su,C.H.and R.M.Mirie (1980),*J.Fluid Mech.*,**98**:509—526.
〔44〕 周清甫，孤立波的垂直相互作用，力学学报(待发表).
〔45〕 Nozaki,K.and T.Taniuti (1973),*DPNU*,14.
〔46〕 Asano,N.(1974),*J.Phys.Soc.Japan*,**36**:861—868.
〔47〕 Van Dam,J.W.(1973),*ibid*,**34**:1633—1640.
〔48〕 Nozaki,K.,T.Taniuti and K.Watanabe (1979),*ibid*,**46**:983—990, 991—1001.
〔49〕 Kakutani,T.and T.Kawahara (1970),*ibid*,**29**:1068—1073.
〔50〕 Kako,M.(1974),*Suppl.Progr.Theor.Phys.*,**55**: 120—137.
〔51〕 Washimi,H.(1974),*ibid*,138—150.
〔52〕 Sugihara,R.and T.Taniuti,(1974),*ibid*,151—190.
〔53〕 Taniuti,T.(1974),*ibid*,191—211.
〔54〕 Ichikawa,Y.H.(1974),*ibid*,212—232.
〔55〕 Ichikawa,Y.H.and H.Kako (1974),*ibid*,233—246.
〔56〕 Kono,M.and N.Yajima (1977),*J.Phys.Soc.Japan*,**43**:1745—1754.
〔57〕 Nozaki,K.and T.Taniuti (1979),*ibid*,**46**:970—974.
〔58〕 Nakata,I.(1979),*ibid*,**46**:1915—1919.
〔59〕 Ichikawa,Y.H.,K.Konno,M.Wadati and H.Sanuki (1980), *ibid*, **48**:279—286.
〔60〕 Nakata,I.(1976),*ibid*,**41**:1387—1393.
〔61〕 Kakutani,T.and N.Yamasaki (1978),*ibid*,**45**:674—679.
〔62〕 李麦村(1981)，中国科学，第3期：341—350.
〔63〕 Hasimoto,H.and H.Ono (1972),*J.Phys.Soc.Japan*,**33**:805—811.
〔64〕 邹启苏，两种流体间界面波的非线性调制，应用数学和力学(待发表).
〔65〕 Taniuti,T.(1974),*Suppl.Progr.Theor.Phys.*,**55**:1—35.
〔66〕 Kawahara,T.(1970),*J.Phys.Soc.Japan*,**28**:1321—1329.
〔67〕 Taniuti,T.,and H.Washimi (1968),*Phys.Rev.Lett.*,**21**:209—212.
〔68〕 Taniuti,T.and N.Yajima (1973),*J.Math.Phys.*,**14**:1389—1394.