

流动化学激光的运动论研究

高 智 鄂 学 全

(中国科学院力学研究所, 北京)

摘 要

本文探讨用于连续波流动化学激光分析的运动论模型, 着重讨论了非均匀加宽效应的影响, 所得结果适用于激光频率与线形中心频率一致和不一致的情况. 并将本结果与通常使用的速率模型^[1]的结果作了比较. 当加宽参数 $\eta > 1$ 时, 两模型的结果几乎完全一致; η 越小、频移参数 ξ 越小, 两模型的结果相差越大. η 约小于 0.2 时, 速率模型便不能正确计算非均匀加宽效应的影响, 而运动论模型则能描述这一影响.

符 号 表

a_i	反射镜的吸收系数, $i = 1, 2$	$k_{i,i-1}$	粒子的非弹性积分速率,
$B_{i,i-1}$	Einstein 受激发射系数	$k_{i,i-1} = \int K_{i,i-1} F_i d\nu_{i-1} / f_i$	
C	光速	k_{pi}	化学泵浦速率
F_i	i 振动能级粒子的速度分布函数	L_2	两镜面之间的距离
F_i^0	i 振动能级粒子的平衡分布即 Maxwell 分布函数	l	具有激光作用的振动能级的最大量子数
f_i	积分速度分布函数, $f_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F_i d\nu_x d\nu_z$	m	气体分子量
f	积分速度分布函数的和, $f = \sum f_i$	n	粒子数密度
f^0	局部平衡的 Maxwell 的分布函数之和, $f^0 = \sum f_i^0$	$P(x)$	激光在光腔内的功率
f_{ν_i}	光子的分布函数	\tilde{P}	无量纲功率
\tilde{G}_c	无量纲阈值	P	气体压力
g_i	i 振动能级的简并度	R_i	反射镜的反射率, $i = 1, 2$
h	普朗克常数	T	气体温度
I_i	辐射强度	t_i	反射镜的透射率, $i = 1, 2$
$I_{i,i}$	i 振动能级的激光饱和强度	u	气体宏观流速
\tilde{I}_i	无量纲强度, $\tilde{I}_i = I_i / I_{i,i}$	v	粒子速度矢量, (v_x, v_y, v_z)
k	Boltzmann 常数	v_T	粒子热速度矢量 (v_{Tx}, v_{Ty}, v_{Tz})
K_T	粒子的弹性碰撞速率	x, y, z	直角坐标, x ——顺流方向; y ——光发射方向
$K_{i,j}$	粒子的非弹性碰撞速率	α_i	简并度之比 g_i / g_{i-1}
		Γ_i	i 能级粒子泵浦率

本文于 1980 年 8 月 20 日收到.

ξ	无量纲坐标, $\xi = k_{i,i-1}x/u$	$\Delta\nu_N$	均匀展宽(半峰值处全宽度)
$\eta_i = \frac{\Delta\nu_N}{\Delta\nu_{D_i}} (\ln 2)^{1/2}$	加宽参数	$\Delta\nu_{D_i}$	Doppler 展宽(半峰值处全宽度)
ν_i 和 $\nu_{i,i-1}$	分别是 i 能级到 $(i-1)$ 能级的激光频率和线形中心频率	ξ_i	频移参数, $\xi_i = \frac{\nu_i - \nu_{i,i-1}}{\Delta\nu_{D_i}} \sqrt{\ln 2}$
		$\phi_{i,i-1}$	Lorentz 线形函数(见(2.3)式)

一、引 言

近几年来, 流动化学激光日益显示出它的重要性^[1]. 连续波流动化学激光的理论分析所遵循的方法, 与其它气流激光的分析方法一样, 为了计算激光增益、强度和功率输出, 必须同时联立求解描述能级布居数变化速率的速率方程组、辐射交换方程和流体力学方程组. 文献[1]对流动化学激光的速率模型作了比较全面的介绍. 速率模型适用于高压情况, 但是正如文献[2]作者所指出的, 对于低压非均匀加宽占优势的情况, 它是不适用的.

连续波流动混合化学激光反应区的压力, 一般维持在 1 至 10 托的范围内, 加宽参数 η 约在 0.2 以下. 当谱线加宽以非均匀加宽为主时, 激光能级粒子中只有部分粒子能够直接与单色辐射场相互作用, 而那些多普勒频移过大的粒子, 则不能直接与辐射场相作用. 然而, 速率模型并不能区分同一能级中的上述两部分粒子, 因此有必要建立一个适用于低压情况的模型. Lamb 理论^[3]及其推广, 对气体性质不随时间和空间变化的稳态激光震荡器中的非均匀加宽效应, 作出了比较完善的分析. 但正如 Mirels^[4]指出的, 要把 Lamb 理论推广到气体性质为空间位置函数的气流激光中去并不简单. 最近 Mirels^[4]提出了一个分析连续波化学激光的非均匀加宽效应的理论. 该理论实质上处理了辐射速率大于弹性碰撞速率的情况.

本文继续发展本文作者之一于 1978 年提出的运动论模型¹⁾, 从描述振动能级单粒子速度分布函数变化的玻尔兹曼方程出发, 引进与粒子热运动速度有关的微分增益系数 G_T , 发展了求解运动论和辐射交换联立方程组的逐次近似解的求解方法. 这一理论也已推广和应用于连续波流动化学激光²⁾, 并在此基础上作了进一步的改进和补充, 得到的结果适用于激光频率与线形中心频率一致或不一致的情况. 由于运动论方程描述粒子速度分布函数的时空变化, 因而运动论模型能够正确地描述单色光与多普勒加宽线形之间的相互作用, 无疑要比速率模型更合理, 更为接近实际.

二、基本方程

我们考虑一多能级激活介质系统. 利用描述能级单粒子速度分布函数的 Boltzmann 方程组, 原则上可以算出能级粒子由初始非平衡分布趋向局部平衡 Boltzmann-Maxwell 分布的弛豫过程. 激活介质相邻能级之间的量子交换是由粒子之间的非弹性碰撞、外泵浦(即化学泵浦)及粒子和辐射场之间的相互作用所引起的. 转动自由度内部能量传递极快, 假定转动自由度

1) 高智, 辐射非平衡流研究及对气流激光的应用, 第二届全国流体力学会议资料, 1979.

Gao Zhi, "A kinetic Approach to Nonequilibrium Flow With Application to Gas Flow Lasers" (In Proceedings of The First Asian Congress of Fluid Mechanics, Dec. 1980, India)

2) 高智、赵烈、鄂学全, "超声速化学激光分析的运动论模型", 第二届全国流体力学会议论文集 1979.

Gao Zhi, Zhao Lie E Xuequan "Generalized Kinetic Model of CW Flow Chemical lasers" (To be published in Proceedings of the International Laser Congress, May, 1980, China)

内部处于平衡,即对于给定的振动能级,其转动分布处于以平动温度为表征的 Boltzmann 分布。使用熟知的统计弛豫模型即 B-G-K 模型代替精确的 Boltzmann 弹性碰撞积分;并以类似的方法来表达非弹性碰撞项。在非弹性碰撞过程中,多量子跃迁的几率远小于单量子跃迁的几率,因而可在非弹性碰撞项中忽略多量子跃迁的贡献。设气体的宏观运动为定常一维流动,激光传播方向与气流方向垂直;自发辐射和光散射的贡献与受激辐射相比很小,可以忽略。于是,关于 i 量子振动能级的粒子速度分布方程组和稳态辐射交换方程可分别写为:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial F_i}{\partial x} + v_{Ti} \text{grad } F_i = F_i + K_T(F_i^0 - F_i) + \int K_{i+1} F_{i+1} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_{i+1} d\mathbf{v} \\ - \int K_{i,i-1} F_i d\mathbf{v}_{i-1} - \int K_{i,i+1} d\mathbf{v}_{i+1} + \int K_{i-1,i} F_i \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_{i-1} d\mathbf{v} \\ + \frac{\hbar \nu_{i+1} B_{i+1,i} \phi_{i+1,i}}{4\pi} (F_{i+1} - \alpha_{i+1} F_i) f_{\nu_{i+1}} - \frac{\hbar \nu_i B_{i,i-1} \phi_{i,i-1}}{4\pi} (F_i - \alpha_i F_{i-1}) f_{\nu_i} \\ (i = 1, 2, \dots, l; f_{\nu_{i+1}} \equiv f_{\nu_0} \equiv F_0 \equiv K_{1,0} \equiv 0), \end{aligned} \quad (2.1)$$

$$C \frac{\partial f_{\nu_i}}{\partial y} = f_{\nu_i} \int \frac{B_{i,i-1} \phi_{i,i-1}}{4\pi} (F_i - \alpha_i F_{i-1}) d\nu_{Ty}, \quad (2.2)$$

其中

$$\phi_{i,i-1} = \frac{\Delta \nu_N / 2\pi}{[v_i - v_{i,i-1}(1 + \nu_{Ty}/C)]^2 + (\Delta \nu_N / 2)^2}. \quad (2.3)$$

这里 $\int K_{i+1} F_{i+1} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_{i+1} d\mathbf{v}$ 表示 $(i+1)$ 能级的粒子在碰撞中损失一个量子,而 i 能级具有特定 \mathbf{v}_i 的粒子同时增加一个量子的速率。

反射镜面上的人射辐射和反射辐射能流满足如下边界条件:

$$\begin{aligned} y = 0, \quad I_0^+ = R_1 I_0^-, \quad R_1 = 1 - a_1 - t_1, \\ y = L_2, \quad I_{L_2}^- = R_2 I_{L_2}^+, \quad R_2 = 1 - a_2 - t_2. \end{aligned} \quad (2.4)$$

按照定义, $I_i = ch\nu_i f_{\nu_i}$, $I_i = I_i^+ + I_i^-$. 这里“+”和“-”号表示光传播方向与 y 轴方向同向和反向。

因为方程 (2.1) 中的辐射项与分子速度 x 和 z 方向的分量 v_{xi} 和 v_{zi} 无关,我们可把方程 (2.1) 及 (2.2) 对 v_{xi} 和 v_{zi} 积分;考虑到,在激活介质均匀的条件下, f_i 随 y 的变化可以忽略,即有

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_{Ti} \text{grad } F_i d\nu_{xi} d\nu_{zi} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_{Tx_i} F_i d\nu_{xi} d\nu_{zi} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_{Ty_i} F_i d\nu_{xi} d\nu_{zi} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} v_{Tz_i} F_i d\nu_{xi} d\nu_{zi} \right) \\ = v_{Ty_i} \frac{\partial f_i}{\partial y} \approx 0. \end{aligned} \quad (2.5)$$

考虑到常温下由 $(i-1)$ 低能级向 i 高能级跃迁的速率,远小于高能级向低能级跃迁的速率,即

$$\int K_{i-1,i} F_{i-1} \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}_i) d\mathbf{v}_{i-1} d\mathbf{v} \ll \int K_{i,i-1} F_i d\mathbf{v}_{i-1}. \quad (2.6)$$

利用关系式 (2.5) 和 (2.6), 在把 (2.1) 及 (2.2) 式对 v_{xi} 和 v_{zi} 积分后,于是得到:

$$u \frac{\partial f_i}{\partial x} = r_i + k_i(f_i^0 - f_i) + k_{i+1}f_{i+1} - k_{i,i-1}f_i + \frac{h\nu_{i+1}B_{i+1}\phi_{i+1,i}}{4\pi} (f_{i+1} - \alpha_{i+1}f_i)f_{\nu_{i+1}} - \frac{h\nu_i B_{i,i-1}\phi_{i,i-1}}{4\pi} (f_i - \alpha_i f_{i-1})f_{\nu_i} \quad (2.7)$$

$$(i = 1, 2, \dots, l; f_{\nu_{l+1}} \equiv f_{\nu_0} \equiv k_{1,0} \equiv f_0 \equiv 0),$$

$$c \frac{\partial f_{\nu_i}}{\partial y} = f_{\nu_i} \int \frac{B_{i,i-1}\phi_{i,i-1}}{4\pi} (f_i - \alpha_i f_{i-1}) dv_{Ty}, \quad (2.8)$$

其中

$$r_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Gamma_i dv_{xi} dv_{yi}. \quad (2.9)$$

三、方程的解

本文类似地引进与粒子热速度有关的微分增益(或吸收)系数 G_{Ti}

$$G_{Ti} \equiv \frac{B_{i,i-1}\phi_{i,i-1}}{4\pi c} (f_i - \alpha_i f_{i-1}) \quad (3.1)$$

G_{Ti} 表示 i 能级粒子中具有特定速度的粒子群对频率为 ν_i 辐射的增益(或负吸收)系数的贡献. 把 G_{Ti} 相对于热速度积分, 得到通常使用的增益(或吸收)系数.

把 G_i 看作为 f_{ν_i} 和 $(f_i^0 - f_i)$ 的函数, 利用方程组 (2.7), 我们导出 G_{Ti} 满足的控制方程组为:

$$C_1 \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{bmatrix} \frac{G_{T_1}}{D_1} \\ \frac{G_{T_2}}{D_2} \\ \vdots \\ \frac{G_{T_l}}{D_l} \end{bmatrix} = C_2 \begin{bmatrix} \frac{G_{T_1}}{D_1} \\ \frac{G_{T_2}}{D_2} \\ \vdots \\ \frac{G_{T_l}}{D_l} \end{bmatrix} + \frac{A}{k_{l,l-1}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l r_i \\ \sum_{i=2}^l r_i \\ \vdots \\ r_l \end{bmatrix} + \frac{Ak_T}{k_{l,l-1}} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^l (f_i^0 - f_i) \\ \sum_{i=2}^l (f_i^0 - f_i) \\ \vdots \\ (f_l^0 - f_l) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_1 \frac{k_{1,0}}{k_{l,l-1}} \\ \alpha_1 \alpha_2 \frac{k_{2,1}}{k_{l,l-1}} \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^l \alpha_i \end{bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \zeta} \begin{bmatrix} \alpha_1 \{1 + \alpha_2 [1 + \dots + \alpha_{l-1} (1 + \alpha_l)]\} \\ \alpha_1 \alpha_2 \{1 + \alpha_3 [1 + \dots + \alpha_{l-1} (1 + \alpha_l)]\} \\ \vdots \\ \prod_{i=1}^l \alpha_i \end{bmatrix}, \quad (3.2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \zeta} = \frac{1}{k_{l,l-1}} \sum_{i=1}^l r_i + \frac{k_T}{k_{l,l-1}} (f^0 - f), \quad (3.3)$$

其中

$$D_i = \frac{B_{i,i-1}\phi_{i,i-1}}{4\pi c}, \quad A = 1 + \alpha_1 \{1 + \alpha_2 [1 + \dots + \alpha_{l-1} (1 + \alpha_l)]\}.$$

应当指出, 在本文所讨论的情况和近似下, 最低能级粒子在碰撞中只增加无减少; 在与辐

射场交换中也是只增加而无减少, 此时, 不论辐射场是否存在, (3.3) 式均成立.

C_1 和 C_2 是 $l \times l$ 维矩阵. 对于 $l = 3$ 的情况有

$$C_1 = \begin{bmatrix} 1 + \alpha_2(1 + \alpha_3) & 1 + \alpha_3 & 1 \\ \alpha_2(1 + \alpha_3) & (1 + \alpha_1)(1 + \alpha_3) & 1 + \alpha_1 \\ \alpha_2\alpha_3 & \alpha_3(1 + \alpha_1) & 1 + \alpha_1(1 + \alpha_2) \end{bmatrix},$$

$$C_2 = \begin{bmatrix} -\left(1 + \frac{AD_1 I_1}{k_{1,0}}\right) \frac{k_{1,0}}{k_{3,2}} & \alpha_1(1 + \alpha_3) \frac{k_{1,0}}{k_{3,2}} & \frac{\alpha_1 k_{1,0}}{k_{3,2}} \\ -\frac{\alpha_2 k_{2,1}}{k_{3,2}} & -\left(1 + \alpha_1 + \frac{AD_2 I_2}{k_{2,1}}\right) \frac{k_{2,1}}{k_{3,2}} & \frac{\alpha_1 \alpha_2 k_{2,1}}{k_{3,2}} \\ -\alpha_2 \alpha_3 & -\alpha_3(1 + \alpha_1) & -\left[1 + \alpha_1(1 + \alpha_2) + \frac{AD_3 I_3}{k_{3,2}}\right] \end{bmatrix}.$$

为了得到运动论方程的摄动解, 利用双参数展开:

$$f_i = \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{u}{Lk_T}\right)^j \left(\frac{u}{Lk_r}\right)^k f_i^{jk} \quad (i = 1, 2, \dots, l), \quad (3.4)$$

$$f = \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{u}{Lk_T}\right)^i f_i. \quad (3.5)$$

这里 k_r 为特征辐射速率, k_T 为特征分子碰撞速率, u/L 为流动特征速率. 对于 HF 气体流动激光, 满足不等式: $u/(Lk_T) < 1$, $u/(Lk_r) < 1$. 把摄动展开 (3.4) 和 (3.5) 式代入方程 (2.7), 得到零级摄动方程:

$$k_T(f_i^0 - f_i^{00}) + D_{i+1}I_{i+1}(f_{i+1}^{00} - \alpha_{i+1}f_i^{00}) - D_i I_i(f_i^{00} - \alpha_i f_{i-1}^{00}) = 0 \quad (3.6)$$

$$(i = 1, 2, \dots, l, \quad l_{i+1} \equiv l_0 \equiv 0).$$

由 (3.6) 式得到

$$f_i^0 - \alpha_i f_{i-1}^{00} = \left\{ \prod_{j=i}^l \left[1 + \frac{D_j I_j}{k_T} (1 + \alpha_j) \right] + \dots \right\} \cdot \left\{ \prod_{j=1}^l \left[1 + \frac{D_j I_j}{k_T} (1 + \alpha_j) \right] + \dots \right\}^{-1}, \quad (3.6)'$$

故有

$$f_i^0 - f_i^{00} = \frac{D_i I_i}{k_T} (f_i^{00} - \alpha_i f_{i-1}^{00}) - \frac{D_{i+1} I_{i+1}}{k_T} (f_{i+1}^{00} - \alpha_{i+1} f_i^{00}) \approx 0.$$

最终得 f_i 的零级解、 G_{Ti} 的零级解和半级解为:

$$f_i^0 = f_i, \quad (3.7)$$

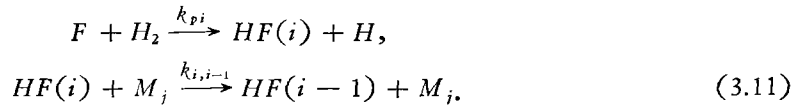
$$G_{Ti}^0 = \frac{B_{i,i-1} \phi_{i,i-1}}{4\pi c} (f_i^0 - \alpha_i f_{i-1}^0), \quad (3.8)$$

$$G_{Ti}^{1/2} = \frac{B_{i,i-1} \phi_{i,i-1}}{4\pi c} \cdot \frac{f_i^0 - \alpha_i f_{i-1}^0}{1 + \frac{D_i I_i}{k_T} (1 + \alpha_i)}. \quad (3.9)$$

这里 f_i 是局部平衡分布函数, 把 G_{Ti} 的零级解 G_{Ti}^0 对热速度积分, 即是 Voigt 函数^[1]. 由类似的论证可得

$$f_i^0 \sim \sum_{i=1}^l r_i \sim n \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{1/2} \exp\left(-\frac{mv_{Ty}}{2kT}\right). \quad (3.10)$$

为了获得总布居数, 即包含在分布函数 f 中的数密度 n , 需要明确化学模型、泵浦方式和流动图案. 先考虑冷反应泵浦、预混合连续波模型, 即反应气体预先混合; 气体参数 P, T, u 不变(考虑 P, T 和 u 沿流向的变化, 在原则上并不困难). HF 冷反应为:



这里 $HF(i)$ 表示 i 振动能级的粒子, M_j 为碰撞体, 它可以是 $HF(i), F, H, H_2$ 和稀释剂 H_c 中的某一种粒子. 相对于 v_{Ty} 积分 (3.3) 式, 对预混合情况, 求得

$$\frac{dn_{HF}}{d\zeta} = k n_F, \quad n_{HF} + n_F = n_{F_0}; \quad (3.12)$$

$$\begin{aligned} n_{HF} &= n_{F_0} \left[1 - \exp\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} k d\zeta\right) \right], \\ n_F &= n_{F_0} \exp\left(-\int_{\zeta_0}^{\zeta} k d\zeta\right). \end{aligned} \quad (3.13)$$

此处 $k = \sum k_i$, $k_i = \frac{k_{l,i}}{k_{l,i-1}} n_{H_2}$, ζ_0 表示化学反应开始发生的初始位置, $\zeta = \frac{k_{2,1}x}{u}$.

现在, 我们来求 G_i , $(f_i^0 - f)$ 和 fv_i 之间的关系式, 即寻找方程 (3.2) 的解. 为此, 首先需要讨论控制激光稳态振荡的条件及其对应的补充关系式.

设辐射场分布均匀, 且近似为平面波, 于是在光腔内沿流动方向的位置 x 处有 (2.4) 式.

按照增益系数的定义, 即^[1]

$$G_i = \frac{1}{I_i^+} \frac{\partial I_i^+}{\partial y} = -\frac{1}{I_i^-} \frac{\partial I_i^-}{\partial y}. \quad (3.14)$$

由此推出在给定 x 位置处

$$I_i^+ I_i^- = C(x). \quad (3.15)$$

这里 $C(x)$ 可随 x 而变化. 由 (2.4), (3.15) 式推得

$$\frac{I_{iL_2}^+}{I_{i0}^-} = \frac{I_{i0}^+}{I_{iL_2}^-} = \left(\frac{R_1}{R_2} \right)^{1/2}. \quad (3.16)$$

利用 (3.14)–(3.16) 式诸关系推出

$$\frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} G_i dy = \frac{1}{2L_2} \ln(R_1 R_2). \quad (3.17)$$

因此可得出

$$\frac{1}{L_2} \int_0^{L_2} \int_{-\infty}^{\infty} G_i dv_{Ty} dy = -\frac{1}{2L_2} \ln(R_1 R_2). \quad (3.18)$$

(3.18) 式是控制流动激光的稳态振荡条件, 即阈值条件. 它在每一 x 位置上都成立. G_{Ti} 随 ζ 的变化关系完全由镜面条件所确定, 即有 $G_{Ti} \sim \ln(R_1 R_2)$. 在通常的设计和理论处理中^[1], 每个镜面的反射率 R 、吸收系数 a 和透射率 t 均为常数, 换言之, R_1 和 R_2 与 ζ 无关. 因此

$$\frac{\partial G_{Ti}}{\partial \zeta} \approx 0. \quad (3.19)$$

此式表明流动化学激光的非平衡辐射处于准平衡状态,对于 $k_r > (\text{或} \gg) k_{i,i-1}, L_1/u$ 的条件,辐射交换恒处于准平衡态,关系 (3.19) 式提供了求解方程组 (3.2) 的补充关系式.

把关系式 (3.7), (3.9), (3.10) 和 (3.19) 代入方程 (3.2), 经推算后,求得关系式:

$$G_i = \frac{G_{i,0N} K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i)}{1 + \tilde{I}_i} + \sum_{j \neq i}^l \frac{\lambda_{ij} B_{i,i-1} G_j}{B_{j,j-1} (\tilde{I}_i - \tilde{I}_j)} \left[\frac{\tilde{I}_i (1 + \hat{I}_j) K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i)}{(1 - \tilde{I}_i) K(\xi_i, \eta_i, \hat{I}_j)} - \hat{I}_j \right]. \quad (3.20)$$

由于 $\hat{I}_j = \frac{B_{j,j-1} I_j (1 + \alpha_j)}{2\pi^2 c k_{r,i-1} \Delta \nu_N} < 0(1)$, 对于所有的可能值 i 和 j 存在如下的近似关系:

$$\frac{1}{\tilde{I}_i - \hat{I}_j} \left[\frac{\hat{I}_j (1 + \hat{I}_j) K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i)}{(1 + \tilde{I}_i) K(\xi_j, \eta_j, \hat{I}_j)} - \hat{I}_j \right] \approx \frac{K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i)}{(1 + \tilde{I}_i) K(\xi_j, \eta_j, 0)}. \quad (3.21)$$

利用 (3.21), (3.20) 式, 最终被简化为:

$$G_i = \left[G_{i,0N} + \sum_{j \neq i}^l \frac{\lambda_{ij} B_{i,i-1} G_j}{B_{j,j-1} K(\xi_j, \eta_j, 0)} \right] \frac{K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i)}{1 + \tilde{I}_i}, \quad (3.22)$$

其中

$$K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i) = \frac{\eta_i^2 (1 + \tilde{I}_i)}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(-t^2)}{\eta_i^2 (1 + \tilde{I}_i) + (\xi_i - t)^2} dt, \quad (3.23)_1$$

$$\tilde{I}_i = \frac{I_i}{I_{si}}, \quad I_{si}^{-1} = \frac{A B_{i,i-1}}{2\pi^2 c k_{i,i-1} \Delta \nu_N \{1 + \alpha_1 [1 + \dots + \alpha_{i-2} (1 + \alpha_{i-1})]\}}, \quad (3.23)_2$$

$$G_{i,0N} = \frac{B_{i,i-1} \phi_i}{2\pi^2 c \Delta \nu_N \{1 + \alpha_1 [1 + \dots + \alpha_{i-2} (1 + \alpha_{i-1})]\}} \quad (i = 1, 2, \dots, l). \quad (3.23)_3$$

对于 $l = 3$ 的情况, 则有

$$\left. \begin{aligned} \phi_1 &= \frac{k_{3,2} n_{F_0}}{k_{1,0}} \left\{ A(k_1 + k_2 + k_3) - \alpha_1 [1 + \alpha_2 (1 + \alpha_3)] k \right\} e^{-k(\zeta - \zeta_0)} \\ &\quad - \alpha_1 n_{F_0} [1 - e^{-k(\zeta - \zeta_1)}], \\ \phi_2 &= \frac{k_{3,2} n_{F_0}}{k_{2,1}} \left[A(k_2 + k_3) - \alpha_1 \alpha_2 (1 + \alpha_3) k \right] e^{-k(\zeta - \zeta_0)} - \alpha_1 \alpha_2 n_{F_0} \\ &\quad \cdot [1 - e^{-k(\zeta - \zeta_0)}], \\ \phi_3 &= n_{F_0} \{ [A k_3 - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 (k - 1)] e^{-k(\zeta - \zeta_0)} - \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \}. \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

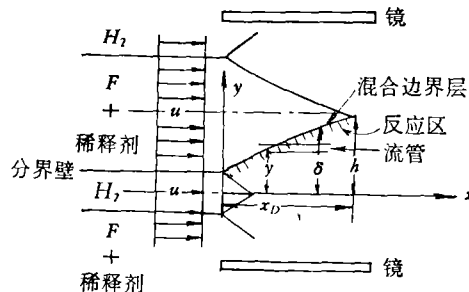


图1 流动混合模型

(x_D 为混合层到达 F 喷管中心的 x 方向上的距离, δ 为混合层边界到 x 轴的距离, h 为 F 喷管中心到 x 轴的距离)

λ_{ij} 是 α_1 的多项式函数. 当 $l = 3$ 时, λ_{ij} 为:

$$(\lambda_{ij}) = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha_1(1 + \alpha_3) & \alpha_1 \\ \frac{-\alpha}{1 + \alpha_2} & 0 & \frac{\alpha_1\alpha_2}{1 + \alpha_2} \\ \frac{-\alpha_2\alpha_3}{1 + \alpha_1(1 + \alpha_2)} & \frac{-\alpha_3(1 + \alpha_1)}{1 + \alpha_1(1 + \alpha_2)} & 0 \end{bmatrix}. \quad (3.25)$$

对于两能级系统, 关系式 (3.22) 简化为:

$$G = \frac{G_{0N}K(\xi, \eta, \tilde{I})}{1 + \tilde{I}}. \quad (3.26)$$

这里

$$G_{0N} = \frac{B_{21}\phi}{2\pi^2 c \Delta\nu_N}, \quad I_s^{-1} = \frac{B_{21}(1 + \alpha_1)}{2\pi^2 c k_{21}\Delta\nu_N},$$

$$\phi = [(\kappa + \alpha_1)e^{-\kappa(\xi - \xi_0)} - \alpha_1]n_{F_0}.$$

(3.22) 和 (3.26) 式是运动论模型的基本关系式. 当小信号增益达到阈值时, 可应用这些关系. $G_{i,0N}(i = 1, 2, \dots, l)$ 和 G_{0N} 是 ξ 的已知函数. I_{ii} 可叫做饱和强度, 并且 $i \neq j$ 时, $I_{ii} \neq I_{jj}$.

最后, 为了讨论辐射强度和功率输出随流动方向而变化的规律, 我们考虑两能级系统, 并采用简化流动混合模型^[1](见图 1). 当激光频率与线形中心频率一致时, 可由 (3.26) 经演算求出强度分布关系式:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{I} &= \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa^{1/2}} D((\kappa\xi)^{1/2}) - \xi^{1/2} \right] \frac{1}{\tilde{G}_c} - 1 \quad (\xi \leq \xi_D), \\ \tilde{I} &= \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa^{1/2}} D((\kappa\xi)^{1/2}) e^{-\kappa(\xi - \xi_D)} - \xi_D^{1/2} \right] \frac{1}{\tilde{G}_c} - 1 \quad (\xi > \xi_D) \end{aligned} \right\} (\eta \gg 1); \quad (3.27)$$

$$\left. \begin{aligned} \tilde{I} &= \eta^2 \pi \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa^{1/2}} D((\kappa\xi)^{1/2}) - \xi^{1/2} \right]^2 \frac{1}{\tilde{G}_c^2} - 1 \quad (\xi \leq \xi_D), \\ \tilde{I} &= \eta^2 \pi \left[\frac{1 + \kappa}{\kappa^{1/2}} D((\kappa\xi_D)^{1/2}) e^{-\kappa(\xi - \xi_D)} - \xi_D^{1/2} \right]^2 \frac{1}{\tilde{G}_c^2} - 1 \quad (\xi > \xi_D) \end{aligned} \right\} (\eta \ll 1). \quad (3.28)$$

此处 $D(x) = e^{-x} \int_0^x e^{y^2} dy$, 当 $x \rightarrow \infty$ 时, $D(x) \rightarrow \frac{x}{1(2x)}$; $\xi_D = \frac{k_{21}x_D}{u}$ 为氧化剂区域中混合边界层达到中心线的 x 方向上的无量纲距离. 关系式 (3.27) 是均匀加宽极限的结果, 它同文献 [1] 给出的表达式完全相同.

光腔内的功率分布为:

$$P(x) = 2Nh_x \int_0^x G I d\alpha, \quad \tilde{P} = \frac{P(x)}{\epsilon n_{F_0} u N h_x \kappa}. \quad (3.29)$$

这里 h_x 是垂直于流向和光轴的喷管高度; N 是喷管列阵的氧化剂喷管数目; $\epsilon = h\nu N_A$ 是每个克分子的光子能量, N_A 是阿佛加得罗数. κ 为混合过程所确定的常数.

四、速率模型的结果

为了把运动论结果与速率模型的结果作一比较, 下面简单地推导出速率模型的相应结果.

速率方程^[1]是

$$\frac{dn_i}{d\zeta} = k_{i,n_F} + \frac{k_{i+1,i}}{k_{l,l-1}} n_{i+1} - \frac{k_{i,i-1}}{k_{l,l-1}} n_i + \frac{G_{i+1}I_{i+1}}{k_{l,l-1}} - \frac{G_i I_i}{k_{l,l-1}}. \quad (4.1)$$

当引进线形因子,即修正的 Voigt 函数时^[2],增益系数可写成

$$G_i = \frac{B_{i,i-1}K(\xi_i, \eta_i, 0)}{2\pi^2 c \Delta\nu_N} (n_i - \alpha_i n_{i-1}). \quad (4.2)$$

正如上节指出的那样,对于 G_i 也有

$$\frac{dG_i}{d\zeta} \approx 0. \quad (4.3)$$

从方程 (4.1)–(4.3) 出发,我们推导出如下的增益和强度的关系式:

$$G_i = \left[G_{i,0N} + \sum_{j \neq i} \frac{\lambda_{ij} B_{i,j-1} G_j}{B_{j,j-1} K(\xi_j, \eta_j, 0)} \right] \frac{K(\xi_i, \eta_i, 0)}{1 + \tilde{I}_i K(\xi_i, \eta_i, 0)}. \quad (4.4)$$

对于两能级系统 (4.4) 式可简化为:

$$G = \frac{G_{0N} K(\xi, \eta, 0)}{1 + \tilde{I} K(\xi, \eta, 0)}. \quad (4.5)$$

速率模型的结果 (4.4) 式与运动论模型的结果 (3.22) 式相对应。当小信号增益达到阈值时,它们都可以应用。

五、结果和比较

我们着重比较非均匀加宽占优势的低压情况下两模型结果之间的差别。首先,我们作若干说明。第一, $K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_i)$ 是一般的线形积分,可叫做修正线形因子,它是混合参数 $\eta_i \sqrt{1 + \tilde{I}_i}$ 和频移参数 ξ_i 的函数。 $\xi_i = 0$ 对应于激光发射频率与线形中心频率一致的情况;第二, $G_{i,0N}$ 在两模型中它们是相同的,损耗与分析模型无关,因此 $G_i/G_{i,0N}$ 也是相同的。这意味着两模型的强度必然有差别。我们令两模型的 $G_i/G_{i,0N}$ 彼此相等,则得两模型光谱强度分量之间的关系式为

$$\tilde{I}_{iR} = \frac{1 + \tilde{I}_{iK}}{K(\xi_i, \eta_i, \tilde{I}_{iK})} - \frac{1}{K(\xi_i, \eta_i, 0)}. \quad (5.1)$$

(5.1) 式由 (3.23) 和 (4.4) 式导出,并且在推导过程中利用了如下近似: $B_{i,i-1} \approx B_{i-1,i-2}$, $\alpha_i \approx 1$ ^[1]。

图 2 和图 3 以及公式 (5.1) 以加宽参数 η 和频率位移参数 ξ 为参变量,给出 \tilde{I}_R 和 \tilde{I}_K 之间的相互关系。此处 \tilde{I}_R 和 \tilde{I}_K 分别为速率模型和运动论模型的无量纲强度。当 $\eta > 1$ 时两模型的强度相一致。 η 值愈小, \tilde{I}_R 和 \tilde{I}_K 之间的差别愈大;频移参数的影响是很重要的,且 ξ 的影响随着 η 值减小而增大。例如 $\eta = 0.01, 0.02, 0.05$ 和 0.2 时,对于 $\xi = 0$, \tilde{I}_R/\tilde{I}_K 分别约为 15, 8, 3 和 1.6;对于 $\xi = 1$, \tilde{I}_R/\tilde{I}_K 分别约为 40, 20, 10 和 2。图 2 给出 \tilde{I}_R/\tilde{I}_K 随频移参数 ξ 变化的关系曲线。当 $\eta \gg 1$, 运动论模型关系式 (3.23) 实际上与速率模型的关系式 (4.4) 一致。当 $\eta \rightarrow \infty$ 时, \tilde{I}_R/\tilde{I}_K 等于 1。这对应于碰撞加宽极限。此时, (3.23) 和 (4.4) 两式可简化为同一关系式:

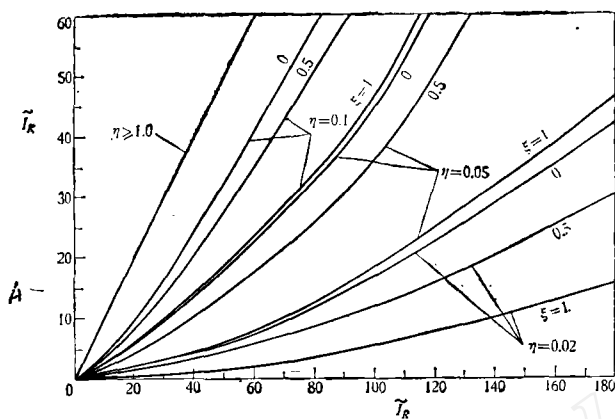


图 2 强度 \tilde{I}_K 随 \tilde{I}_R 变化的曲线

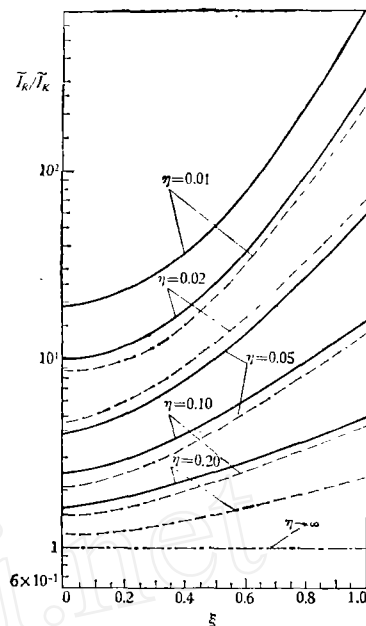


图 3 \tilde{I}_R/\tilde{I}_K 随 ξ 变化的曲线

$$G_i = \left[G_{i,0N} + \sum_{j \neq i}^l \frac{\lambda_{ij} B_{i,i-1} G_j}{B_{j,j-1}} \right] \frac{1}{1 + \tilde{I}_i}. \quad (5.2)$$

图 3 中的实线和虚线分别表示 $\tilde{I}_K = 3$ 和 $\tilde{I}_K = 35$ 的情况, \tilde{I}_K 的不同值对应于不同的饱和程度. 由图 3 不难看出, \tilde{I}_R/\tilde{I}_K 随 ξ 的变化是与饱和程度有关的.

图 4 和图 5 对 $\xi = 0$ 和 1.0, 以 \tilde{I} 为参变量, 给出 G/G_{0N} 随 η 的变化关系. 图中的实线、

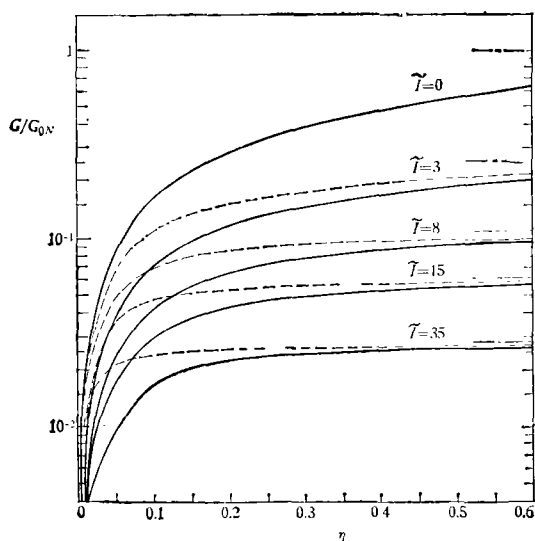


图 4 增益系数 G/G_{0N} 随加宽参数 η 变化的曲线 ($\xi = 0$)

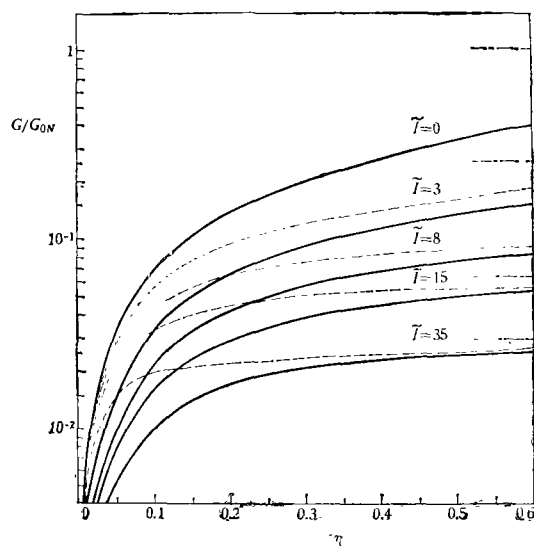


图 5 增益函数 G/G_{0N} 随加宽参数变化的曲线 ($\xi = 1.0$)

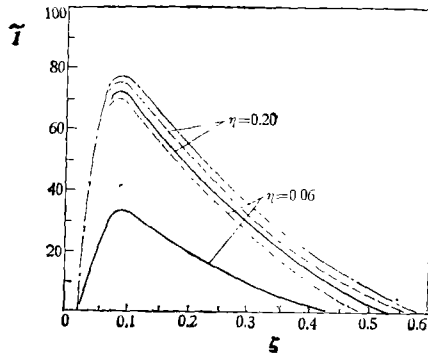


图 6 二能级时 \tilde{I} 与 ξ 的关系曲线
(层流混合)

—— 速率模型 - - - $\eta \rightarrow \infty$ ——— 运动论模型

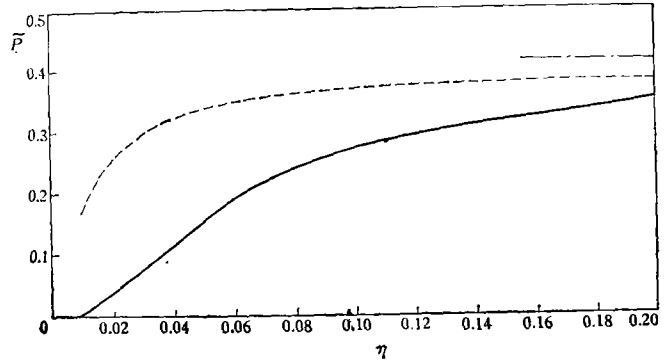


图 7 二能级时功率 \tilde{P} 与 η 的关系曲线
(层流混合)

----- 速率模型, —— 运动论模型

虚线和点划线分别代表运动论、速率模型和碰撞加宽的极限情况。在无量纲强度值相同情况下，速率和运动论两模型的结果总在碰撞加宽极限以下。引进线形因子的速率模型的结果总是大于运动模型的结果，当 $\tilde{I} = 0$ 时，两模型等价。实际上，对应于 $\tilde{I} = 0$ 的那些曲线分别表示 $\xi = 0$ 和 1.0 时的小信号增益随 η 的变化。对于两能级简化层流混合模型的结果，即公式 (3.27) — (3.29)，我们计算了强度和输出功率。图 6 给出了 $\xi = 0$ 时强度随流动方向无量纲距离 ξ 的变化关系。由此可见，当 η 固定不变时，在整个 ξ 的变化范围内速率模型的结果总是大于运动论模型的结果。两模型强度的变化趋势完全相似。两模型强度随 η 的增大而增大；并且当 $\eta \rightarrow \infty$ 时，趋于碰撞加宽的极限值。

图 7 表示无量纲功率 \tilde{P} 随 η 的变化关系。 η 愈小两模型的功率相差愈大。例如 $\xi = 0$ ，而 $\eta = 0.02$ 和 0.2 时， \tilde{P}_R/\tilde{P}_K 分别约为 10 和 1.6，此处 \tilde{P}_R/\tilde{P}_K 为速率模型和运动论模型功率之比。两模型的功率随 η 增大而单调上升，并且当 $\eta \rightarrow \infty$ 时，趋于碰撞加宽时的极限功率值。

六、结 论

在流动化学激光运转的压力范围 (η 约小于 0.2) 内，非均匀加宽效应具有重要影响。运动论模型即引进与分子热运动有关的微分增益系数，求解运动论和辐射交换方程的逐次解的方案，能够合理地处理非均匀加宽效应。根据上面对运动论模型同常用的速率模型^[1]的比较，可得出如下结论。

1) 当加宽参数大于 1 时，两个模型几乎等价；当 $\eta \rightarrow \infty$ 时，两个模型的基本关系式 (3.22) 和 (4.4) 简化为同一关系式 (5.2)。

2) η 值愈小，而频移参数 ξ 愈大时，两模型结果之间的差别愈大。当 η 约小于 0.2 时，非均匀加宽效应是非常重要的。常用的速率模型，即使引进 Voigt 线形因子，也不能正确描述和解释非均匀加宽效应。而当 ξ 不等于零，即激光频率不与线形中心频率一致时，这种非均匀加宽效应更为重要。因而利用运动论模型是合理的和必要的。

3) 在相同条件下，运动论模型的强度以及功率总是小于引进线形因子的速率模型的强度和功率。

4) 当激光发射频率与线形中心一致时 ($\xi = 0$), 运动论关系式 (3.22) 和 (3.26) 形式上与熟知的非流动气体激光的增益饱和关系^[5]相同. 事实上, 若令流速等于零, (3.26) 式即简化到非流动气体激光的关系式^[6]. 但无论是 (4.5) 式或速率模型的 (4.4) 式, 除了高压情况, 即 $\eta \gg 1$ 外, 都不能简化到非流动气体激光的关系式^[7].

参 考 文 献

- [1] Gross, R. W. F. & Bott, J. F., *Handbook of Chemical Lasers*, Wiley, New York, 1976.
- [2] Goela, J. S., Healy, J. J. & Morse, T. F., *AIAA J.*, **13**(1975), 12: 1629.
- [3] Lamb, W. E. Jr., *Phys. Rev.*, **134A**(1964), 1429—50.
- [4] Mirels, H., *AIAA J.*, **17**(1979), 5: 478.
- [5] Vincent, W. G., et al., *Introduction to Physical Gas Dynamics*, John Wiley, 1965.
- [6] Maitland, A., Dunn. M. H., *Laser Physics*, 1969.
- [7] Cool, T. A., *J. Appl. Phys.*, **40**(1969), 9: 3565.

www.cnki.net