

# 激波与小扰动波的相互作用

## (激波稳定性问题)

徐 复

(中国科学院力学研究所)

**提要** 本文讨论朗道和栗弗席兹意义下的激波稳定性问题<sup>[1]</sup>,也就是求解激波与小扰动波的相互作用问题。在无耗散介质的定常、平面激波两边产生了小扰动。朗道等<sup>[1]</sup>假定小扰动波传播方向是垂直于激波的,得到的稳定条件是  $M_1 > 1, M_2 < 1$ 。我们则把小扰动波取为二维的,即推广为小扰动波可以斜着激波传播的情形,这是更常见的。结论是,无论按群速度方向来区分趋向波和离散波,还是像朗道等那样,按相速度方向来区分趋向波和离散波,即便满足条件  $M_1 > 1, M_2 < 1$ ,对于某些纵向扰动波长与频率范围的声波而言,激波都不稳定。接着提出了几个实验,根据可能的实验结果讨论了趋向波与离散波的定义应按相速度方向还是群速度方向,说明了其意义。

对于管道内的定常激波有类似结果。

关于激波稳定性问题,近年来仍有些讨论<sup>[2-4]</sup>。本文根据朗道与栗弗席兹的激波稳定性定义<sup>[1]</sup>,讨论小扰动波斜着激波传播情形的问题。

假定在无耗散介质中,有一定常、平面激波。在激波两边,有一个或数个平面、单色小扰动波入射到激波上。如果认为入射波(或趋向波)的振幅给定,若能从扰动激波上的条件唯一决定各离散波(折射波与反射波)的振幅,则称激波是稳定的,否则称为激波不稳定。这就是朗道和栗弗席兹一书上的激波稳定性含意<sup>[1]</sup>。

朗道和栗弗席兹一书上取小扰动波的传播方向,都垂直于激波阵面,这时激波稳定的充要条件是

$$M_1 > 1, M_2 < 1,$$

即激波前的气流是超声速的,激波后的气流是亚声速的。这和通过激波比熵增加的条件一致。

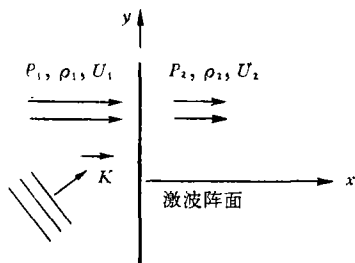


图 1

问题是,小扰动波的传播方向不一定总是垂直于激波阵面的。对于小扰动波斜着激波传播的情形,激波稳定性条件会不会有变化?本文将讨论这个问题。

### 1. 小扰动方程及其解

假定激波位置为  $x = 0$ , 坐标系见左图。

如果在激波两边发生了小扰动,小扰动的方程

是

本文由编委郑哲敏研究员推荐,于1981年3月收到。

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{\rho}}{\partial x} + \rho \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial y} \right) &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}_x}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial x} &= 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial t} + U \frac{\partial \tilde{u}_y}{\partial x} \right) + \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} &= 0 \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) (\tilde{p} - c^2 \tilde{\rho}) &= 0 \end{aligned}$$

$p, \rho, U$  和  $\tilde{p}, \tilde{\rho}, \tilde{u}_x, \tilde{u}_y$  为压力、密度和速度的未扰量和扰动量,  $c^2$  为未扰时声速平方. 假定所有扰动量均形如

$$e^{i(\omega t + K_x x + K_y y)},$$

而  $\mathbf{K} = (K_x, K_y, 0)$ , 即波矢.

对于激波阵面前方, 我们有四种小扰动波:

1) 熵波  $\omega_1 + U_1 K_{x_1} = 0$

解为

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= 0 \\ \tilde{\rho}_1 &= A_1 \cos(K_{x_1} x + K_y y - K_{x_1} U_1 t) \\ \tilde{u}_{x_1} = \tilde{u}_{y_1} &= 0 \end{aligned}$$

式中  $A_1$  为任意常数, 而  $K_1 = K_{x_1}$ .

2) 涡旋波  $\omega_1 + U_1 K_{x_1} = 0$

解为

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 = \tilde{\rho}_1 &= 0 \\ \tilde{u}_{x_1} &= B_1 K_y \cos(K'_1 x + K_y y - K'_1 U_1 t) \\ \tilde{u}_{y_1} &= -B_1 K'_1 \cos(K'_1 x + K_y y - K'_1 U_1 t) \end{aligned}$$

式中  $B_1$  为任意常数, 而  $K'_1 = K_{x_1}$ .

3) 声波  $(\omega_1 + U_1 K_{x_1})^2 = c_1^2 (K_{x_1}^2 + K_y^2)$

解为

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= D_1 \cos(K_{x_1} x + K_y y + \omega_1 t) + E_1 \cos(K'_{x_1} x + K_y y + \omega'_1 t) \\ \tilde{\rho}_1 &= \frac{D_1}{c_1^2} \cos(K_{x_1} x + K_y y + \omega_1 t) + \frac{E_1}{c_1^2} \cos(K'_{x_1} x + K_y y + \omega'_1 t) \\ \tilde{u}_{x_1} &= -\frac{D_1 K_{x_1}}{\rho_1 (\omega_1 + U_1 K_{x_1})} \cos(K_{x_1} x + K_y y + \omega_1 t) \\ &\quad - \frac{E_1 K'_{x_1}}{\rho_1 (\omega'_1 + U_1 K'_{x_1})} \cos(K'_{x_1} x + K_y y + \omega'_1 t) \\ \tilde{u}_{y_1} &= -\frac{D_1 K_y}{\rho_1 (\omega_1 + U_1 K_{x_1})} \cos(K_{x_1} x + K_y y + \omega_1 t) \\ &\quad - \frac{E_1 K_y}{\rho_1 (\omega'_1 + U_1 K'_{x_1})} \cos(K'_{x_1} x + K_y y + \omega'_1 t). \end{aligned}$$

式中  $D_1, E_1$  为任意常数, 色散关系分别是

$$\omega_1 = -U_1 K_{x_1} + c_1 \sqrt{K_{x_1}^2 + K_y^2}$$

$$\omega'_1 = -U_1 K_{x'_1} - c_1 \sqrt{K_{x'_1}^2 + K_y^2}$$

注意,四个小扰动波的  $y$  方向波数均相同. 振幅  $A_1, B_1, D_1, E_1$  待定.

激波后气流中的小扰动波,只是把上述公式中的下标 1 换为 2. 不用上面  $\omega_1, \omega'_1$  的表达式,而让  $\omega_2, \omega'_2$  直接满足色散关系

$$(\omega_2 + U_2 K_{x_2})^2 = c_2^2 (K_{x_2}^2 + K_y^2).$$

## 2. 扰动激波上的守恒定律

设扰动激波的形状为

$$\tilde{x} = x_0 \sin(K_y y + \omega t)$$

由此,扰动激波速度为

$$\tilde{N} = \frac{\partial \tilde{x}}{\partial t} = x_0 \omega \cos(K_y y + \omega t)$$

法向为

$$\mathbf{n} = (-1, c_0 K_y \cos(K_y y + \omega t), 0)$$

这样,激波上的关系为

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_1 U_1 + \rho_1 (-\tilde{N} + \tilde{u}_{x_1}) &= \bar{\rho}_2 U_2 + \rho_2 (-\tilde{N} + \tilde{u}_{x_2}) \\ \bar{\rho}_1 U_1 (U_1 - U_2) + \rho_1 (U_1 - U_2) (-\tilde{N} + \tilde{u}_{x_1}) \\ &+ \rho_1 U_1 (\tilde{u}_{x_1} - \tilde{u}_{x_2}) = \tilde{p}_1 - \tilde{p}_2 \\ \rho_1 U_1 (\tilde{u}_{y_1} - \tilde{u}_{y_2}) &= -x_0 K_y \cos(K_y y + \omega t) \\ &\cdot (p_1 - p_2) \end{aligned}$$

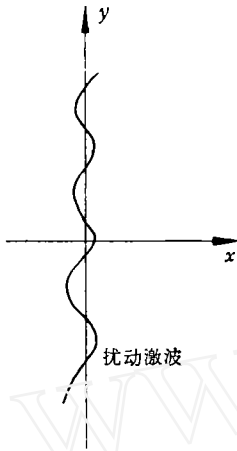


图 2

$$\frac{\tilde{p}_2}{p_2} - \frac{\tilde{p}_1}{p_1} = \frac{(\gamma + 1)\bar{\rho}_2 - (\gamma - 1)\bar{\rho}_1}{(\gamma + 1)\rho_2 - (\gamma - 1)\rho_1} - \frac{(\gamma + 1)\bar{\rho}_1 - (\gamma - 1)\bar{\rho}_2}{(\gamma + 1)\rho_1 - (\gamma - 1)\rho_2}$$

式中  $\gamma$  为气体的比热比. 消去  $x_0$  之后, 我们三个独立的激波关系. 为了能确定激波前后小扰动波的振幅, 必须消去  $\cos(K_y y + \omega t)$ , 即所有小扰动波均为同频率的单色波.

## 3. 声波的相速度与群速度

小扰动波为垂直入射时, 激波稳定条件为

$$M_1 > 1, M_2 < 1.$$

现在假定这个条件已经满足.

我们看到, 三个独立的激波条件可以确定三个离散波. 激波前的熵波与涡旋波不是离散的, 而激波后的熵波和涡旋波总是离散的. 因此, 激波稳定的条件是在四个声波中, 有而且只有一个是离散的.

我们再来考虑离散波的含意. 在朗道与栗弗席兹一书中<sup>[1]</sup>, 垂直入射波与垂直离散波是按照小扰动波的相速度方向是朝向激波或离开激波来定义的. 另外一种看法, 是按照群速度的方向是朝向激波还是离开激波来定义的. 群速度一般即波中能量的传播速度.

下面, 我们计算二维小扰动波的相速度与群速度, 先计算相速度.

相速度  $\mathbf{V}_p$  是

$$V_p = -\frac{\omega}{K} \cdot \frac{K}{K} = \frac{-\omega}{K_x^2 + K_y^2} (K_x, K_y),$$

我们认为四个声波的  $\omega, K_y$  是一样的, 且为正. 这样, 由色散关系可以确定  $K_x$ . 我们有

$$\text{激波前的离散波} \quad v_{px} < 0, \text{ 即 } K_{x_1} > 0, \quad K_{x'_1} > 0,$$

$$\text{激波后的离散波} \quad v_{px} > 0, \text{ 即 } K_{x_2} < 0, \quad K_{x'_2} < 0.$$

如果令

$$X_1 = K_{x_1}/K_y, \quad X'_1 = K_{x'_1}/K_y,$$

$$X_2 = K_{x_2}/K_y, \quad X'_2 = K_{x'_2}/K_y,$$

及

$$Q = \omega/c_1 K_y$$

则四个声波的色散关系为

$$X_1, X'_1 = \frac{-QM_1 \pm \sqrt{Q^2 M_1^2 - (M_1^2 - 1)(Q^2 - 1)}}{M_1^2 - 1}$$

$$= \frac{-QM_1 \pm \sqrt{Q^2 + M_1^2 - 1}}{M_1^2 - 1},$$

$$X_2, X'_2 = \frac{Q \frac{c_1}{c_2} M_2 \pm \sqrt{Q^2 \frac{c_1^2}{c_2^2} M_2^2 - (1 - M_2^2) \left(1 - Q^2 \frac{c_1^2}{c_2^2}\right)}}{1 - M_2^2}$$

$$= \frac{Q \frac{c_1}{c_2} M_2 \pm \sqrt{Q^2 \frac{c_1^2}{c_2^2} + M_2^2 - 1}}{1 - M_2^2}$$

其中

$$M_2 = \sqrt{\frac{1 + \frac{\gamma - 1}{2} M_1^2}{\gamma M_1^2 - \frac{\gamma - 1}{2}}}, \quad \frac{c_2}{c_1} = \frac{\sqrt{2(\gamma - 1)}}{(\gamma + 1) M_1} \sqrt{\left(\frac{2\gamma}{\gamma - 1} M_1^2 - 1\right) \left(\frac{\gamma - 1}{2} M_1^2 + 1\right)}.$$

注意, 有时我们用  $Q_1, Q'_1, Q_2, Q'_2$  来表示与  $X_1, X'_1, X_2, X'_2$  相应的  $Q$ . 有时用  $Q_1, Q_2$  来表示激波前后的  $Q$ .

给定  $\gamma, M_1, c_1$  之后, 我们就可以作出  $X$  与  $Q$  的图形, 见图 3 和图 4. 它们都是双曲线.

由于  $Q > 0$ , 故  $X_1, X'_1$  指图 3 右方的两支.

需要指出的是,  $X_2$  与  $X'_2$  均满足

$$\omega_2 + U_2 K_{x_2} = c_2 \sqrt{K_{x_2}^2 + K_y^2},$$

位于图 4 的右方,  $X_2$  位于  $\left(\sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1}, \frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}}\right)$  的上面,  $X'_2$  位于  $\left(\sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1}, \frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}}\right)$  的下面. 即

$\frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}}$  的下面. 即

$X_2$  一支

$$\text{相当于 } X_2 \geq \frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}}$$

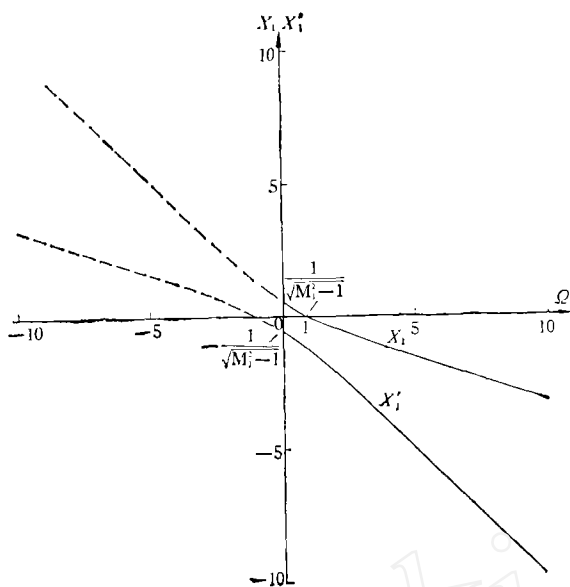


图 3

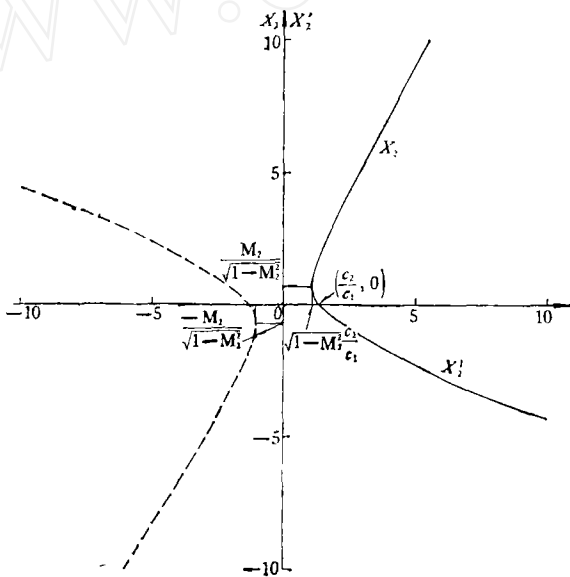


图 4

$X_2'$  一支 相当于  $X_2 \leq \frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}}$

同时

$$\omega_2'' + U_2 K_{x_2}'' = -c_2 \sqrt{K_{x_2}''^2 + K_y^2}$$

位于图 4 左方, 永远有  $\omega_2'' < 0$ , 或  $\Omega_2'' < 0$ , 所以我们不考虑.

按相速度的方向来定义趋向波与离散波时, 可以看出, 当

$$1) 0 < X_1 < \frac{1}{\sqrt{M_1^2 - 1}}, \quad 0 < Q < 1 \text{ 时}$$

或者

$$2) X_2' < 0, \quad Q_2 > c_2/c_1 \text{ 时}$$

激波是稳定的.

由于  $M_1 = 1$  时,  $c_2 = c_1$ , 这时不存在激波. 而当  $M_1 > 1$  时,  $c_2/c_1 > 1$ , 所以当

$$1 \leq Q \leq c_2/c_1$$

时, 激波是不稳定的, 尽管这时条件  $M_1 > 1, M_2 < 1$  仍然满足.

我们再讨论按群速度方向来定义入射波与离散波. 注意, 四个声波的  $\omega, K_y$  均相同, 且为正. 现在来求四个声波的群速度方向.

群速度  $\mathbf{V}_g$  是

$$\mathbf{V}_g = - \left( \frac{\partial \omega}{\partial K_x}, \frac{\partial \omega}{\partial K_y} \right),$$

若  $-\frac{\partial \omega}{\partial K_x} < 0$ , 则激波前的声波是离散的. 若  $-\frac{\partial \omega}{\partial K_x} > 0$ , 则激波后的声波是离散的.

对于激波前

$$-\frac{\partial \omega_1}{\partial K_{x_1}} = U_1 - c_1 \frac{K_{x_1}}{\sqrt{K_{x_1}^2 + K_y^2}} > 0 \quad (\text{入射波})$$

$$-\frac{\partial \omega_1'}{\partial K_{x_1}'} = U_1 + c_1 \frac{K_{x_1}'}{\sqrt{K_{x_1}'^2 + K_y^2}} > 0 \quad (\text{入射波})$$

对于激波后

$$-\frac{\partial \omega_2}{\partial K_{x_2}} = U_2 - c_2 \frac{K_{x_2}}{\sqrt{K_{x_2}^2 + K_y^2}}$$

$$-\frac{\partial \omega_2'}{\partial K_{x_2}'} = U_2 - c_2 \frac{K_{x_2}'}{\sqrt{K_{x_2}'^2 + K_y^2}}$$

由于  $K_{x_2} > 0$ , 而当

$$X_2 = \frac{K_{x_2}}{K_y} > \frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}}$$

时, 永远有

$$M_2 < \frac{X_2}{\sqrt{1 + X_2^2}}$$

所以

$$-\frac{\partial \omega_2}{\partial K_{x_2}} = U_2 - c_2 \frac{K_{x_2}}{\sqrt{K_{x_2}^2 + K_y^2}} < 0 \quad (\text{入射波})$$

现在来看另一支  $X_2'$ .

$$\text{当} \quad 0 \leq X_2' = K_{x_2}'/K_y < \frac{M_2}{\sqrt{1 - M_2^2}} \text{ 时}$$

有

$$\frac{X'_2}{\sqrt{1+X'^2_2}} < M_2$$

所以

$$-\frac{\partial \omega'_2}{\partial K_{x'_2}} = U_2 - c_2 \frac{K_{x'_2}}{\sqrt{K_{x'_2}^2 + K_y^2}} > 0 \quad (\text{离散波})$$

当  
明显地有

$$X'_2 = K_{x'_2}/K_y < 0 \quad \text{时}$$

$$-\frac{\partial \omega'_2}{\partial K_{x'_2}} = U_2 - c_2 \frac{K_{x'_2}}{\sqrt{K_{x'_2}^2 + K_y^2}} > 0 \quad (\text{离散波})$$

从而证明了  $X'_2$  这一支永远是离散波。但必须  $Q'_2 > \sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1}$ 。当用群速度方向来定义入射波与离散波时,如  $0 < Q < \min\left(1, \sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1}\right)$ , 则激波前存在两个声波,而激波后不存在声波,也就谈不上有离散波。这时如有  $X_1, X'_1$  入射到激波上,激波就不稳定。

从图 3,图 4 上也可直接看出群速度方向。

#### 4. 实验

为了弄清楚入射波与离散波的定义,究竟是按相速度方向,还是按群速度方向,还是二者皆可,或二者皆不可,我们提出以下的实验。

我们先定义  $M_1^*$ 。当  $M_1 = M_1^*$  时

$$\sqrt{1 - M_2^2} \cdot \frac{c_2}{c_1} = 1,$$

如  $\gamma = 1.4, M_1^* \sim 1.86$ 。

1)  $M_1 < M_1^*$  这时  $\sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1} < 1$

实验 A 取  $0 < Q_1 < \sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1}$

当用  $X'_1$  入射时,是否出现  $X_1$  作为离散波,并且激波稳定? 如果实验证实这个结果,则称实验 A 成立。

实验 B 取  $1 < Q < c_2/c_1$

当用  $X_1, X'_1, X_2$  中之一,其中之二,或三者同时入射时,是否出现  $X'_2$  作为离散波,并且激波稳定? 如果实验肯定这个结果,则称实验 B 成立。

实验 C 取  $\sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1} < Q < 1$

当用  $X'_1, X_2$  之一,或二者同时入射时,若激波不稳定,则称实验 C 成立。

实验 D 取  $Q > c_2/c_1$ 。

当用任何声波入射时,如激波稳定,则称实验 D 成立。

2)  $M_1 > M_1^*$  这时  $\sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1} > 1$

实验 A' 取  $0 < Q < 1$

当用  $X'_1$  入射时, 是否出现  $X_1$  作为离散波, 并且激波稳定? 如果实验结果是肯定的, 则称实验  $A'$  成立.

$$\text{实验 } B' \text{ 取 } \sqrt{1 - M_2^2} \frac{c_2}{c_1} < Q < \frac{c_2}{c_1}$$

当用  $X_1, X'_1, X_2$  其中之一, 其中之二, 或三者同时入射时, 是否出现  $X'_2$  作为离散波, 并且激波稳定? 如果实验结果是肯定的, 则称实验  $B'$  成立.

$$\text{实验 } E \text{ 取 } 1 < Q_1 < \frac{c_2}{c_1} \sqrt{1 - M_2^2}$$

当用  $X_1, X'_1$  之一, 或二者同时入射时, 激波不稳定, 则称实验  $E$  成立.

## 5. 讨论

在进行了  $M_1 < M_1^* \sim 1.86$  的实验  $A, B, C, D$ , 和  $M_1 > M_1^* \sim 1.86$  的实验  $A', B', E$  之后, 我们就可以来讨论激波稳定性问题, 以及其可能的意义.

情形 1 实验  $A, A'$  成立, 但实验  $B, B'$  不成立. 结论是

1) 入射波, 离散波的定义应按相速度方向, 这和传统理论的看法一致. 朗道等给出的激波稳定条件  $M_1 > 1, M_2 < 1$ , 对斜入射的小扰动波情形不适用.

2) 可以用实验  $B, B'$  使激波不稳定, 即使得单个激波阵面不存在. 可以预料, 这将有不少实际应用.

情形 2 实验  $A, A'$  不成立, 但实验  $B, B'$  成立. 结论是

1) 入射波, 离散波的定义应按群速度方向, 这和传统理论的看法不一致. 首先, 朗道与栗弗席兹一书<sup>[4]</sup>是按相速度方向来定义趋向波与离散波的. 但在小扰动波垂直入射情形, 相速度方向与群速度方向一致. 因此在气动力学激波稳定性的讨论中, 应当明确是以群速度方向来区分为好. 其次, 在有些物理问题中 (如电磁波对物质的入射, 反射与折射), 相速度方向与群速度方向一致, 是否本质上也应是按群速度方向来区分入射波与离散波?

2) 可以用实验  $A, A'$  使激波不稳定, 即使得单个激波阵面不存在. 可以预料, 这将有不少实际应用.

情形 3 实验  $C$  成立, 结论是

1) 若同时实验  $A, A'$  成立, 实验  $B, B'$  成立, 这时在实验  $C$  中, 应出现两个离散波  $X_1, X'_1$ , 而扰动激波条件只有一个, 所以激波不稳定, 即不存在.

既可以按相速度方向, 也可以按群速度方向来定义入射波与离散波, 是一种异常情形.

2) 若实验  $A, A'$ , 实验  $B, B'$  均不成立, 这时在实验  $C$  中一个离散波也没有, 而扰动激波条件有一个, 所以使激波不稳定.

3) 可以预料, 将有不少实际应用.

情形 4 实验  $C$  不成立, 结论是

与情形 1, 2 结合起来, 将能确定入射波与离散波的定义, 应按相速度方向还是群速度方向.

情形 5 实验  $D$  成立, 实验  $E$  成立



对于入射波与离散波是按相速度方向还是群速度方向来定义，得不出结论。因为对实验 *D* 来说，这时无论是按相速度方向还是群速度方向来定义趋向波与离散波，都有一个离散波存在。而对实验 *E* 来说，无论按相速度方向还是群速度方向来定义趋向波与离散波，一个离散波都没有，故激波不稳定。如果以上结论实际上不成立，便出现了激波稳定性佯谬 (Paradox)。

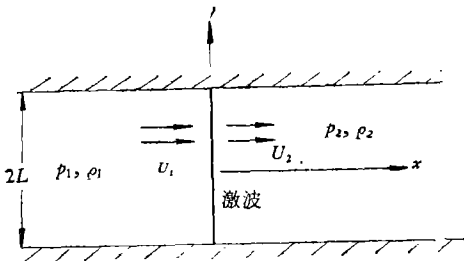


图 5

### 6. 管道内的激波稳定问题

我们假定管道内有一定常激波，位于  $x = 0$ 。小扰动形如  $\cos K_y y \cos(K_x x + \omega t)$ ，即在  $y$  方向有一个余弦形扰动，而进行波的方向为  $\pm x$  方向。

我们仍然可以得到四种波。对激波前

$$\begin{aligned} \tilde{p}_1 &= D_1 \cos K_y y \cos(K_{x_1} x + \omega_1 t) + E_1 \cos K_y y \cos(K_{x'_1} x + \omega'_1 t) \\ \tilde{\rho}_1 &= \frac{D_1}{c_1^2} \cos K_y y \cos(K_{x_1} x + \omega_1 t) + \frac{E_1}{c_1'^2} \cos K_y y \cos(K_{x'_1} x + \omega'_1 t) \\ &\quad + A_1 \cos K_y y \cos(K_1 x - K_1 U_1 t) \\ \tilde{u}_{x_1} &= -\frac{D_1 K_{x_1}}{\rho_1(\omega_1 + U_1 K_{x_1})} \cos K_y y \cos(K_{x_1} x + \omega_1 t) \\ &\quad - \frac{E_1 K_{x'_1}}{\rho_1(\omega'_1 + U_1 K_{x'_1})} \cos K_y y \\ &\quad \times \cos(K_{x'_1} x + \omega'_1 t) + B_1 K_y \cos K_y y \cos(K'_1 x - K'_1 U_1 t) \\ \tilde{u}_{y_1} &= \frac{D_1 K_y}{\rho_1(\omega_1 + U_1 K_{x_1})} \sin K_y y \sin(K_{x_1} x + \omega_1 t) \\ &\quad + \frac{E_1 K_y}{\rho_1(\omega'_1 + U_1 K_{x'_1})} \sin K_y y \\ &\quad \times \sin(K_{x'_1} x + \omega'_1 t) + B_1 K'_1 \sin K_y y \sin(K'_1 x - K'_1 U_1 t) \end{aligned}$$

色散关系同前。

对激波后，只要把下标 1 换为 2。

注意，由于边界条件

$$u_y|_{y=\pm L} = 0$$

因此

$$K_y = \frac{n\pi}{L}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

我们仍然把所有扰动波的  $\omega, K_y$  取为相同，且为正。

假定扰动激波的形状为

$$\tilde{x} = x_0 \cos K_y y \sin \omega t$$

可以给出扰动激波上的关系，消去共同因子及  $x_0$  之后，可以得到三个独立的激波关系。

下面我们进行激波稳定性的讨论。仍然是，四个声波中有一个声波是离散波时，激波

是稳定的.

我们分两种情形讨论.

第一种情形,  $n = 0$ , 即小扰动波阵面在  $y$  方向为一平面. 这种情形和朗道与栗弗席兹<sup>[1]</sup>讨论的情形相似, 趋向波与离散波的定义, 无论是按相速度方向还是群速度方向, 激波稳定的条件都是

$$M_1 > 1, M_2 < 1.$$

第二种情形,  $n \neq 0$ . 这时我们假定条件

$$M_1 > 1, M_2 < 1$$

已经满足, 然后重复上面 3, 4, 5 中的讨论. 注意, 这时的  $K_y$  满足

$$K_y = \frac{n\pi}{L}, n = 0, 1, 2, \dots.$$

便可得到类似的结果.

### 7. 推广

我们可以把以上的结果推广到斜激波与三维小扰动波相互作用的情形. 激波稳定性充要条件仍然是四个声波中有一个是离散的. 只是声波的色散关系化为

$$(\omega + K_x U + K_y V)^2 = c^2(K_x^2 + K_y^2 + K_z^2)$$

其中斜激波阵面取为  $x = 0$ , 未扰时斜激波前后的速度  $(U_1, V_1, 0)$ ,  $(U_2, V_2, 0)$  均位于  $x-y$  平面.

可以把对气动力学激波的讨论推广到磁流体力学激波情形, 结论相似.

上述结果将另文发表.

郑哲敏先生提出了有价值的意见, 杜珣同志和刘大有同志校核了原文, 特此一并致谢.

### 参 考 文 献

- [1] 朗道, 栗弗席兹, 连续介质力学, 第二册, 人民教育出版社 (1960), 425—427.
- [2] Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, John Wiley and Sons, Inc. (1974), 307—310.
- [3] Брушлинский, К. В., Об устойчивости сходящейся сферической ударной волны, *Ин-т. прикл. мат. АН СССР препр.*, **81**(1980), 23.
- [4] Fong, Ken, Stability criteria for converging shock waves, *Can. J. Phys.*, **56**, 10(1978), 1292—1296.

## INTERACTION OF SMALL DISTURBANCES WITH A SHOCK WAVE

Xu Fu

*(Institute of Mechanics, Academia Sinica)*

### Abstract

The problem of stability of shock waves in the sense of Landau and Lifshitz<sup>[1]</sup> is treated in this paper. This is tantamount, to solving the problem of interaction of small disturbances with a shock wave. Small disturbances are introduced on both sides of a steady, non-dissipative, plane shock wave. Landan et al.<sup>[2]</sup> obtained the stability criteria  $M_1 > 1$ ,  $M_2 < 1$  for normal small disturbances. In this paper we assume that the small disturbances may be two dimensional, i.e. they may be inclined relative to the shock wave. The conclusions obtained are: regardless of whether the incident wave and diverging wave are defined according to the direction of the phase velocity (as suggested by Landau et al.) or the group velocity, the shock wave is unstable for some frequencies and longitudinal wave lengths of the disturbance waves, even if the conditions  $M_1 > 1$ ,  $M_2 < 1$  are fulfilled. Then, several experiments are proposed, and the problem of how to define the incident wave and diverging wave is discussed. The meaning of this problem is illustrated.

Same results can be obtained for the steady shock wave in a tube.