

非牛顿幂律流体沿倾斜面流动的稳定性

范 椿

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文研究了对于二维扰动非牛顿幂律流体在重力作用下沿倾斜面流动的稳定性。得到临界雷诺数作为幂律指数 n 和平板斜率 β 的函数, 并对于 $n = 1-0.15$ 的情况进行了计算。

一、引言

Yih 研究了牛顿流体和三重非线性流体沿倾斜平板流动的稳定性^[1,2], 但只考虑了弱非牛顿流体的情况。为了考虑以非牛顿为主的流体, 本文研究了幂律流体沿倾斜面流动的稳定性。

二、稳定性的分析和解

幂律流体的本构方程是:

$$\tau = m |\dot{\gamma}|^{n-1} \dot{\gamma}$$

其中 τ 是剪切应力张量, $\dot{\gamma}$ 是变形速率张量, m 是模量指数, n 是幂律指数(图1)。

本文只限于考虑二维问题。引进无量纲速度 $[U + \tilde{u}, \tilde{v}]$ 和压力 $P + \tilde{p}$, 其中 U, P 是未受扰动时之速度和压力, $\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{p}$ 为扰动速度和压力。又假设:

$$\begin{aligned} \tilde{u} &= u(y) e^{i\alpha(x-ct)} & \tilde{v} &= v(y) e^{i\alpha(x-ct)} \\ \tilde{p} &= p(y) e^{i\alpha(x-ct)} \end{aligned}$$

其中 x, y 分别是平行和垂直于倾斜平板的无量纲化坐标; t 是无量纲时间; α (扰动波数) $= 2\pi d/\lambda$, λ 是扰动波长, d 是液层厚度(图2); c (扰动波速) $= c_r + ic_i$, c_r 是实部, c_i 是虚部, i 是虚数 $= \sqrt{-1}$ 。

用扰动流函数 ϕ ,

$$\tilde{u} = \partial\phi/\partial y \quad \tilde{v} = -\partial\phi/\partial x$$

并假设:

$$\phi = \varphi(y) e^{i\alpha(x-ct)}$$

则幂律流体的运动方程可写成下列无量纲形式^[3]:

$$\begin{aligned} i\alpha \text{Re}[\varphi'(U-c) - \varphi U' + p] &= (U')^{n-1} [n\varphi''' + \alpha^2(n-2)\varphi'] \\ &+ n(n-1)(U')^{n-2} U''(\varphi'' + \alpha^2\varphi) \\ \text{Re}[\alpha^2\varphi(U-c) + p'] &= (i\alpha)\{(U')^{n-1} [n\alpha^2\varphi + (n-2)\varphi''] \end{aligned} \quad (1)$$

本文于1980年7月收到。

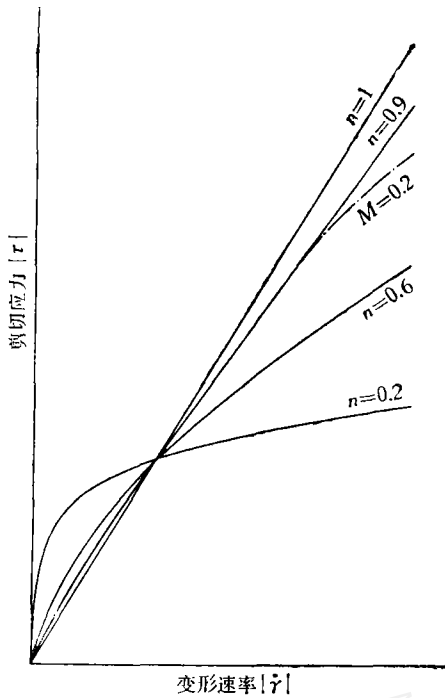


图 1 剪切应力 $|\tau|$ 和变形速率 $|\dot{\gamma}|$ 的关系

$$-2(n-1)(U')^{n-2}U''\varphi' \quad (2)$$

式中“撇”为对 y 求微分; $Re = \rho U_a^2 n d^n / m$, 其中 ρ 是密度 (常数); U_a 为未受扰动时之平均速度, 由 [4] 知:

$$U_a = [dn/(2n+1)][\rho g d \sin \beta / m]^{1/n}$$

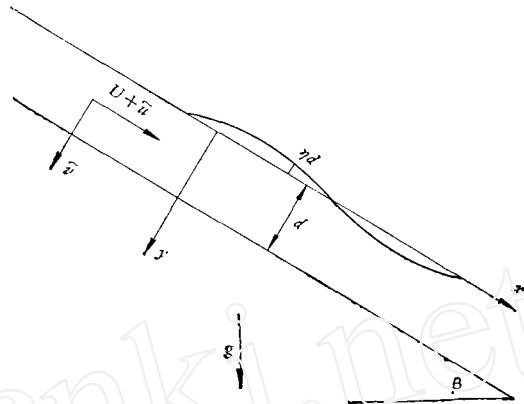


图 2 表明各物理量的简图

其中 g 是重力加速度, β 是倾斜平板与水平面的夹角.

消去 (1)、(2) 中的 P 可得幂律流体的 Orr-Sommerfeld 方程^[5]:

$$\begin{aligned} i\alpha Re \{ (U-c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi \} &= (U')^{n-3} \{ (U')^2 n(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi) \\ &+ (n-1) \{ 2nU'U''\varphi''' + [4\alpha^2(U')^2 + nU'U'''] + n(n-2)(U'')^2 \} \varphi'' \\ &+ 2(n-2)\alpha^2U'U''\varphi' + n\alpha^2[U'U'''] + (n-2)(U'')^2 \varphi \} \end{aligned} \quad (3)$$

在自由面处的无量纲位移 η 由速度关系可知:

$$[-\partial\phi/\partial x]_{y=\eta} = \partial\eta/\partial t + U(\eta)\partial\eta/\partial x \quad (4)$$

我们假定 $\eta \ll 1$, 并将 $\varphi(\eta)$ 在 $\eta = 0$ 处展开, 忽略 η 及其高阶项后, 可用 $\varphi(0) \approx \varphi(\eta)$, $U(0) \approx U(\eta)$ 近似, 如此, (4) 式之解为:

$$\eta = \left[\varphi(0) / \left(c - \frac{1+2n}{1+n} \right) \right] \exp[i\alpha(x-ct)] \quad (5)$$

由固体壁面没有滑移可得边界条件:

$$\varphi'(1) = 0 \quad (6)$$

$$\varphi(1) = 0 \quad (7)$$

在自由表面切应力必须等于 0, 而法向应力必须与由表面张力引起的法向应力相平衡:

$$[\partial\tilde{v}/\partial x + \partial\tilde{u}/\partial y + U'/n]_{y=\eta} = 0 \quad (8)$$

$$\begin{aligned} [-P - \tilde{p} + (2/Re)(U')^{n-1}\partial\tilde{v}/\partial y]_{y=\eta} \\ + S\partial^2\eta/\partial x^2 = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $S = T/\rho d U_a^2$, T 是表面张力.

具有边界条件(6)–(9)的幂律流体沿倾斜面的定常流动, Bird 已有详细分析^[4]. 将 Bird 的结果^[4]无量纲化后可得定常流动时之速度分布, 即这里的未受扰动时之速度分布:

$$U(y) = \frac{1+2n}{1+n} (1-y^{1/n+1}) \quad (10)$$

定常流动时之压力分布与牛顿流体时的相同:

$$P(y) = \rho g d \cos \beta y \quad (11)$$

用(1)、(5)、(10)、(11)在自由面的边界条件(8)、(9)可写成:

$$[\varphi''(\eta) + \alpha^2 \varphi(\eta)] \eta \left(c - \frac{1+2n}{1+n} \right) / \varphi(0) - \frac{1+2n}{n^2} \eta^{1/n} = 0 \quad (12)$$

$$\left\{ \alpha \left[\left(\frac{1+2n}{n} \right)^n \cot \beta + \alpha^2 \text{SRe} \right] \varphi / \left(c - \frac{1+2n}{1+n} \right) - in(n-1)(U')^{n-2} U'' \alpha^2 \varphi + \alpha \text{Re} U' \varphi + \alpha [i\alpha(U')^{n-1}(4-n) - \text{Re}(U-c)] \varphi' - in(n-1)(U')^{n-2} U'' \varphi'' - i(U')^{n-1} n \varphi''' \right\}_{y=\eta} = 0 \quad (13)$$

我们只考虑长波的情况, 采用 Yih^[1]的方法, 将特征函数 φ 和特征值 c 展开成小参数 α 的幂级数如下:

$$\begin{aligned} \varphi &= \varphi_0 + \alpha \varphi_1 + \alpha^2 \varphi_2 + \alpha^3 \varphi_3 + \dots \\ c &= c_0 + \alpha c_1 + \alpha^2 c_2 + \alpha^3 c_3 + \dots \end{aligned}$$

将上述级数代入方程(3)和在自由面处的边界条件(12)、(13), 并集合 α 的零阶项, 可得:

$$\varphi_0^{IV} - 2(1-n)(ny)^{-1} \varphi_0''' + (1-n)(ny)^{-2} \varphi_0'' = 0 \quad (14)$$

$$\varphi_0''(\eta_0) \eta_0 \left(c_0 - \frac{1+2n}{1+n} \right) / \varphi_0(0) - \frac{1+2n}{n^2} \eta_0^{1/n} = 0 \quad (15)$$

$$\varphi_0'''(\eta_0) + \frac{n-1}{n\eta_0} \varphi_0''(\eta_0) = 0 \quad (16)$$

Euler 型方程(14)和边界条件(6), (7), (15), (16)组成一个特征值问题. 经计算后可得波速 c_0 是

$$c_0 = \frac{1+2n}{n} \quad (17)$$

相应的特征函数可以相差一个常数倍数, 将其选成 1 并不会失其一般性, 如此:

$$\varphi_0 = 1 - (1+n)y + ny^{1/n+1} \quad (18)$$

集合 α 的一阶项, 可得一阶近似的微分方程

$$\begin{aligned} \varphi_1^{IV} - 2(1-n)(ny)^{-1} \varphi_1''' + (1-n)(ny)^{-2} \varphi_1'' \\ = i \text{Re} \frac{1+n}{n^2} \left(-\frac{1+2n}{n} \right)^{2-n} y^{2/n-1} \end{aligned} \quad (19)$$

在自由面处的边界条件(12)、(13)变为:

$$\begin{aligned} [\varphi_0''(\eta_1) + \alpha \varphi_1''(\eta_1)] \eta_1 \left(c_0 + \alpha c_1 - \frac{1+2n}{1+n} \right) / [\varphi_0(0) + \alpha \varphi_1(0)] \\ - \frac{1+2n}{n^2} \eta_1^{1/n} = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1+2n}{n}\right)^n \cot\beta \eta_0 + \operatorname{Re} U' \varphi_0 - \operatorname{Re}(U - c_0) \varphi_0' \\ & = in(U')^{n-2} [(n-1)U''\varphi_1' + U'\varphi_1'''] \end{aligned} \quad (21)$$

对于一阶近似 $\eta_1 \ll 1$, 在边界条件 (20) 中可以忽略 η_1 及其高阶项, α^2 阶项也可以忽略. 方程 (19) 和边界条件 (6)、(7)、(20)、(21) 的最后结果是:

$$c_1 = i(-1)^{n-1} \left[-\frac{1}{n} \cot\beta + \frac{2(1+2n)}{n^2(3n+2)} \left(\frac{1+2n}{n}\right)^{1-n} \operatorname{Re} \right] \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \varphi_1 = i(-1)^{n-1} & \left\{ -\frac{1}{2} \frac{nA}{3n+2} y^{2/n+3} + (-B+A)y^{1/n+2} \right. \\ & \left. + \left[(1+n)B - \frac{2(1+n)^2}{3n+2} A \right] y^{1/n+1} + \left[-nB + \frac{n(3+4n)}{2(3n+2)} A \right] y \right\} \end{aligned} \quad (23)$$

其中 $A = \frac{1}{1+n} \left(\frac{1+2n}{n}\right)^{1-n} \operatorname{Re}$, $B = \frac{n}{1+2n} \cot\beta$.

方程 (17)、(18) 表明 c_0 是一个实数, φ_0 是一个实函数. 方程 (22)、(23) 表明 c_1 是一个虚数, φ_1 是一个虚函数. 用同样的方法可得二阶近似, c_2 是一个实数, φ_2 是一个实函数. 如此, 波速是:

$$\begin{aligned} c = \frac{1+2n}{n} + O(\alpha^2) + i & \left\{ (-1)^{n-1} \left[-\frac{1}{n} \cot\beta \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{2(1+2n)}{n^2(3n+2)} \left(\frac{1+2n}{n}\right)^{1-n} \operatorname{Re} \right] \alpha + O(\alpha^3) \right\} \end{aligned} \quad (24)$$

临界雷诺数(近似值)是:

$$(\operatorname{Re})_{cr} = \left(1 + \frac{3}{2} n\right) \left(\frac{n}{1+2n}\right)^{2-n} \cot\beta \quad (25)$$

假如 $\operatorname{Re} > (\operatorname{Re})_{cr}$, c_i 是正的, 流动不稳定. 假如 $\operatorname{Re} < (\operatorname{Re})_{cr}$, c_i 是负的, 流动稳定.

对于 $n=1$, 即牛顿流体的特殊情况, $(\operatorname{Re})_{cr} = \frac{5}{6} \cot\beta$, 此结果与 Yih^[1] 的结果相符.

三、讨 论

由图 3 可以看出, 在相同的雷诺数时, 幂律流体和牛顿流体的临界倾角有显著的差别. 例如, 若 $\operatorname{Re} = 1$, 则对于牛顿流体 ($n=1$) $\beta_{cr} = 40^\circ$, 对于幂律流体 $n=0.6$, $\beta_{cr} = 17^\circ$; $n=0.4$, $\beta_{cr} = 8^\circ$; $n=0.15$, $\beta = 1^\circ$.

由图 4 可以看出, 当 $n=0.6$ 时, 牛顿流体的临界雷诺数是幂律流体的 2.7 倍, 当 $n=0.15$ 时是 38 倍.

从图 1 和 3 可以看出: 对于幂律流体 $n=0.9$ 的稳定特性和 Yih 的三重非线性流体 $M = -0.2$ (M 是非牛顿参数) 的稳定特性有定性的一致.

但 Yih 的结果只适用于: $|M| < 0.2$ 的情况. 如图 1 所示: 他分析的情况相似于幂律流体 $1 > n > 0.9$ 的很小范围内 (图 3 中的阴影区). 所以本文的适用范围要比 Yih 的广, 例如: 大多数高分子溶液或溶体的 n 是从 0.15 到 0.6, 此类非牛顿流体沿倾斜面流动时, 用 Yih 的结果^[2] 尚不能解释其稳定特性, 而用本文结果可得到解释.

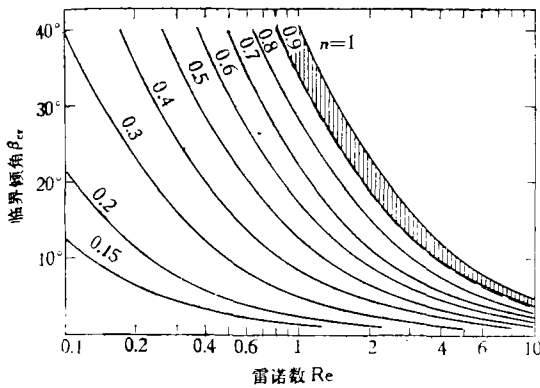


图 3 临界倾角 β_{cr} 和雷诺数 Re 的关系
 ——幂律流体 ----Yih 的三重非线性流体($M = -0.2$)

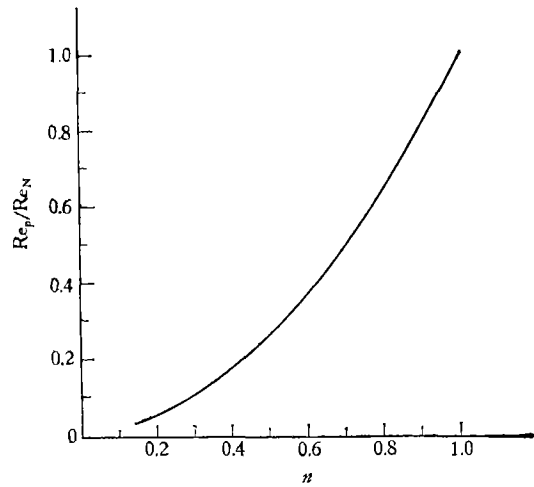


图 4 在相同的 β 下, 幂律流体和牛顿流体的雷诺数之比 Re_P/Re_N 作为 n 的函数

如何解决在自由表面处的边界条件是个重要问题, 此时函数不是在 $y = 0$ 处而是在 $y = \eta$ 处取值. Yih 采用这样的方法解决: 将 $\phi(y)$, $U(y)$ 及其各阶导数函数在 $y = 0$ 处展成泰勒级数, 然后忽略 η 的高阶项. 但幂级数不能在 $y = 0$ 处展成泰勒级数, 幂律流体的 $U'(y)$, $\phi''(y)$ 及其各阶导数函数都是幂级数, 所以 Yih 在自由表面的处理方法不能用到幂律流体, 本文则将 η 直接代入各函数, 这样计算起来比较复杂, 但对各种类型的广义牛顿流体都能适用.

本文的分析只限在二维、长波(波数 $\alpha \ll 1$) 和小扰动振幅 ($\eta \ll 1$) 的情况.

最后补充一点, 如果我们将雷诺数的定义改为:

$$Re = \rho [U_a(1 + 2n)/n]^{2-n} d^n / m$$

其中参考速度 $[(1 + 2n)/n]U_a$ 是未受扰动时的最大速度, 则临界雷诺数可简化为:

$$(Re)_{cr} = (1 + 3n/2) \cot \beta$$

作者十分感谢 Chan Man Fong C. F. 教授的指导.

参 考 文 献

- [1] Yih, C. S., *Phys. Fluids*, **6**, 3(1963), 321.
- [2] Yih, C. S., *Phys. Fluids*, **8**, 7(1965), 1257.
- [3] Заметалин, В. В., *ПМТФ.*, **1**(1976), 101.
- [4] Bird, R. B. et al., *Dynamics of Polymeric Liquids*, Vol. 1. Fluid Mechanics, Wiley (1977), 215.

STABILITY OF NON-NEWTONIAN POWER LAW FLUID FLOWING DOWN AN INCLINED PLANE

Fan Chun

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

This investigation concerns the stability of non-Newtonian power law fluid flowing down an inclined plane under gravity with respect to two-dimensional disturbances. The critical Reynolds number is given as a function of power law index n and the slope of the plane, and is computed for $n = 1-0.15$.

www.cnki.net