

边界层分离数值解

卞荫贵 徐大鹏

(中国科学院力学研究所)

一、引言

用 N-S 方程直接求解分离流的工作近几年已有不少^[1-7]。但这种计算比较费时,需要存储量也大。在实际应用中,边界层理论仍然是研究分离流的一种好的近似方法^[8-11]。本文对二维、定常、不可压层流的分离流动进行了数值分析。主要内容有:(1)从典型的以流函数表示的边界层方程出发,对分离流进行数值计算。*Keller*和*Cebeci*^[13]曾用此方程求解过附体流动的反问题。在具有相似性解的条件下,这个方程简化为著名的Falkner-Skan方程,在初始剖面,这个方程简化为Blasiu's方程。(2)给定壁面摩阻,而外缘压力梯度作为求解的一部分,这样可以克服在分离点附近出现的奇异性的困难。因此,这是求解反问题的做法。(3)由于边界层方程是抛物型的,在附体区, $u > 0$,可以从上游向下游推进求解;而在分离区, $u < 0$,则应从下游向上游推进求解。因此,求解时需要整体迭代。将基本方程差分后得到的是非线性代数方程组,用逐次松弛迭代直接求解这些方程组。这个迭代做法类似于引进时间项用时间相关法求解。(4)用线性化的模型方程讨论了收敛条件。

本文采用考虑分离区下游对上游影响的整体迭代过程和不考虑这种影响的线迭代过程进行了计算,并将结果与已知的结果进行了比较。同时,对不同的差分格式,不同的计算过程,不同的步长做了计算和比较。

二、基本方程和边界条件

定常、二维、不可压缩流的边界层方程为:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1a)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (1b)$$

若将 x, y 坐标换成 x, η , 其中, $\eta = y\sqrt{u_e/\nu x}$, 并引进流函数 $\psi = \sqrt{\nu x u_e} f(x, \eta)$,

本文于1982年5月13日收到。

则运动方程为:

$$f_{\eta\eta\eta} + \frac{m+1}{2} f f_{\eta\eta} + m(1-f^2) = x(f_{\eta} f_{\eta x} - f_x f_{\eta\eta}) \quad (2a)$$

其中

$$m = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (2b)$$

为了计算方便, 将(2a)分写成两个方程:

$$f_{\eta} = u \quad (3a)$$

$$u_{\eta\eta} + \frac{m+1}{2} f u_{\eta} + m(1-u^2) = x(u u_x - f_x u_{\eta}) \quad (3b)$$

相应的边界条件为:

$$f(x, 0) = u(x, 0) = 0 \quad (4a)$$

$$u(x, \infty) \rightarrow 1 \quad (4b)$$

$$u_{\eta}(x, 0) = s(x) \quad (4c)$$

正问题是给定压力梯度参数 $m(x)$, 用边界条件(4a)、(4b)求解方程(3)。而反问题则是用(4c)给定壁面摩擦 $s(x)$, 结合边界条件(4a)求解方程(3), 方程中的 m 是待定的参数, 以满足(4b)为准。

三、差分格式

用如下差分符号:

$$\Delta_{\eta}^{\circ} u_{i,j} = \frac{1}{2\Delta\eta} (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})$$

$$\Delta_{\eta}^{+} u_{i,j} = \frac{1}{\Delta\eta} (u_{i,j+1} - u_{i,j})$$

$$\Delta_{\eta}^{-} u_{i,j} = \frac{1}{\Delta\eta} (u_{i,j} - u_{i,j-1})$$

$$\Delta_{\eta}^2 u_{i,j} = \Delta_{\eta}^{+} \Delta_{\eta}^{-} u_{i,j} = \frac{1}{\Delta\eta^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})$$

$\Delta_x^{\circ}, \Delta_x^{+}, \Delta_x^{-}, \Delta_x^2$ 类同。

对方程(3)取用了两种差分格式:

格式 I 中 η 导数用 *Crank-Nicolson* 的六点格式, 而 x 方向的导数则用中心差分格式。在附体区 ($u > 0$), 我们取:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} (\Delta_{\eta}^2 u_{i,j} + \Delta_{\eta}^2 u_{i-1,j}) + O(\Delta\eta^2) \quad (5a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (\Delta_{\eta}^{\circ} u_{i,j} + \Delta_{\eta}^{\circ} u_{i-1,j}) + O(\Delta \eta^2) \quad (5b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_x^{-} u_{i,j} + O(\Delta x^2) \quad (5c)$$

而在分离区 ($u < 0$), 我们采用:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} (\Delta_{\eta}^2 u_{i+1,j} + \Delta_{\eta}^2 u_{i,j}) + O(\Delta \eta^2) \quad (6a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (\Delta_{\eta}^{\circ} u_{i+1,j} + \Delta_{\eta}^{\circ} u_{i,j}) + O(\Delta \eta^2) \quad (6b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_x^{+} u_{i,j} + O(\Delta x^2) \quad (6c)$$

格式 II 在附体区同格式 I, 只是在分离区采用:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \Delta_{\eta}^2 u_{i,j} + O(\Delta \eta^2) \quad (7a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = \Delta_{\eta}^{\circ} u_{i,j} + O(\Delta \eta^2) \quad (7b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \Delta_x^{\circ} u_{i,j} + O(\Delta x^2) \quad (7c)$$

为了加快迭代的收敛, 我们在格式 I 和 II 中, 在由附体区到分离区的过渡区域都采用了过渡格式:

$$g = \frac{1}{2} [(1+\alpha)g_a + (1-\alpha)g_s] \quad -0.01 \leq u \leq 0.01 \quad (8)$$

这里 g 代表诸如 $\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial \eta}$ 、 u 、 m 、 s 等量, 下标 a 表示附体的量, 下标 s 表示分离区的量。

$$\alpha = 1 + 100(u - 0.01) \quad (9)$$

此外, 我们对方程 (3a) 采用如下差分公式:

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \Delta_{\eta}^{-} f_{i,j} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{i,j-1}) \quad (10)$$

动量方程 (3b) 在壁面上的形式为:

$$\left. \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right|_{\eta=0} = m \quad (11)$$

对上式采用如下差分公式:

$$m_i = \frac{3}{\Delta \eta} \frac{\partial u_{i,1}}{\partial \eta} - \frac{1}{2\Delta \eta^2} (-7u_{i,1} + 8u_{i,2} - u_{i,3}) \quad (12)$$

一项异号。于是, 我们可以设想, 如果令 a_2 中的后两项等于零, 那么, 条件 II 就可以得到满足。由于 a_2 中的后两项都来自于动量方程中的 x 方向的对流项 $u \frac{\partial u}{\partial x}$, 所以, 假定 a_2 中的后两项为零, 实际上就是假设在分离区动量方程中的 x 方向的对流项为零。在这个假设下, 模型方程成为:

$$\tilde{u}_{\eta\eta} + \frac{m+1}{2} f_0 \tilde{u}_{\eta} + \frac{\eta}{2} (m-1) u_0 \tilde{u}_{\eta} = b(x)$$

重复做类似于以上的讨论可知: 在分离区, 若 $\left| \frac{1}{2\Delta\eta^2} \right| \geq \left| \frac{mf_0}{4\Delta\eta} \right|$, 定理中的条件便得到了满足。

在整体迭代过程中, 类似上面的讨论, 可以证明逐次低松弛是收敛的。

五、求解过程

经差分后, 方程 (3) 化为非线性代数方程组, 应用逐次低松弛法求解这些非线性方程组, 迭代公式为:

$$m_i^{(n+1)} = m_i^{(n)} + \omega_1 \left[\frac{3}{\Delta\eta} s_i(x) - \frac{1}{2\Delta\eta^2} (-7u_{i,1} + 8u_{i,2} - u_{i,3}) - m_i^{(n)} \right] \quad (15)$$

$$f^{(n+1)} = f^{(n)} + \omega_2 H_f R_f \quad (16)$$

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \omega_3 H_u R_u \quad (17)$$

式中 $s_i(x) = \frac{\partial u_{i,1}}{\partial \eta}$, $\omega_i (i=1, 2, 3)$ 是松弛因子, R_f 和 R_u 分别表示 (3) 式的计算残差,

H_f, H_u 表示逐次松弛迭代算法中的形成矩阵。

若差分后得到的代数方程组可以写成:

$$A_f f = C_f$$

$$A_u u = C_u$$

设:

$$A_f = D_f - L_f - U_f$$

$$A_u = D_u - L_u - U_u$$

其中 D_f, D_u 表示对角阵, L_f, L_u 为下三角阵, U_f, U_u 为上三角阵。则 R_f, R_u, H_f, H_u 可分别表示为:

$$R_f = L_f f^{(k)} - D_f f^{(k)} + U_f f^{(k)} + C_f = C_f - A_f f^{(k)}$$

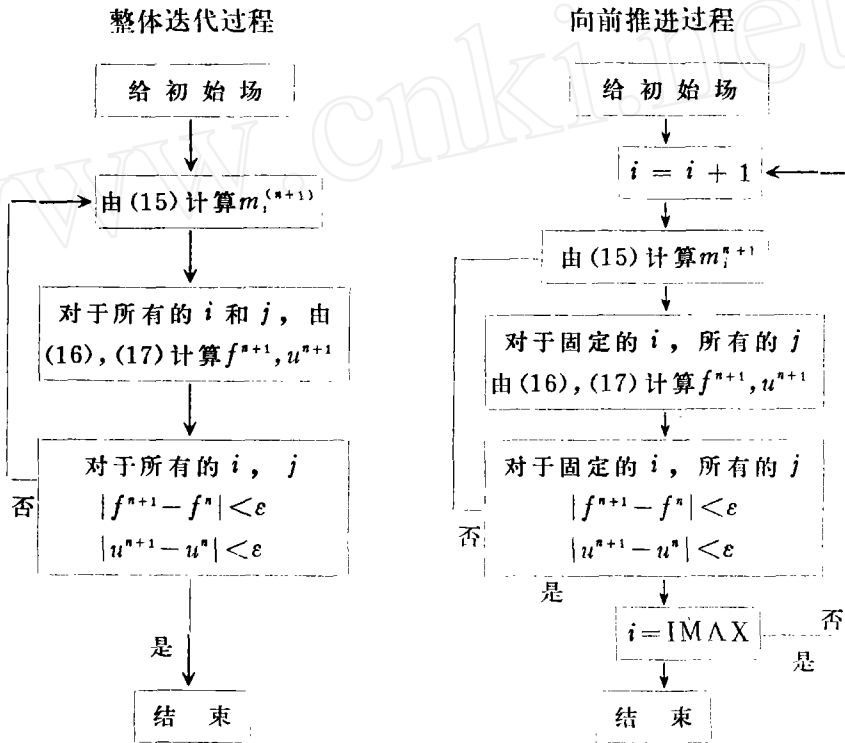
$$H_f = (D_f - \omega_2 L_f)^{-1}$$

$$R_u = L_u u^{(k)} - D_u u^{(k)} + U_u u^{(k)} + C_u = C_u - A_u u^{(k)}$$

$$H_u = (D_u - \omega_3 L_u)^{-1}$$

本文在求解上述方程时, 采用了两种计算过程。整体迭代过程考虑了分离区下游对

上游的影响，向前推进过程没有考虑这种影响。由于迭代收敛性的要求，在向前推进过程中，在回流区略去了动量方程中的 x 方向的对流项。两种计算过程的计算框图如下：



这里 ϵ 是给定的允许误差，IMAX 表示最大的 i 。

六、结果和比较

为了比较，给定下列壁面摩擦：

$$s(x) = \frac{0.33206}{12} (x-2)(x-6) = s_0(x) \quad \begin{matrix} x < 2 \\ x > 6 \end{matrix}$$

$$s(x) = s_0(x) \cdot [1 + \alpha(x-2)(x-6)] \quad 2 \leq x \leq 6 \quad (18)$$

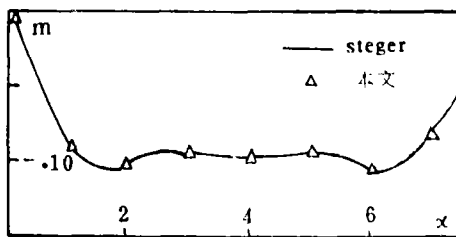


图1 与 Steger 比较

本文计算了当 $\alpha = 0.225$ 时的分离流动，并与 Steger 和 Klineber^[13] 的结果进行了比较，由图1可见，两条压力梯度因子曲线符合得较好。

作为算例，本文计算了给定壁面摩擦：

$$s(x) = \frac{0.33206}{2} (x-1)(x-2) \quad (19)$$

的分离流动，图2给出了流场的流线图。另

外, 还分别用整体迭代过程和向前推进过程计算了(19)式给出摩阻的分离流动, 并将结果在图3中做了比较。图4给出了不同计算步长计算结果的比较。图5给出了不同差分格式的比较。

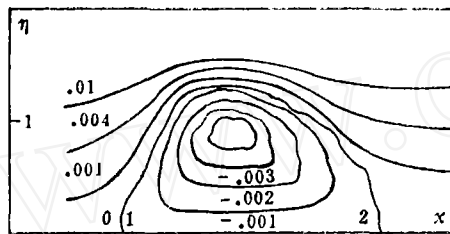


图2 流线图

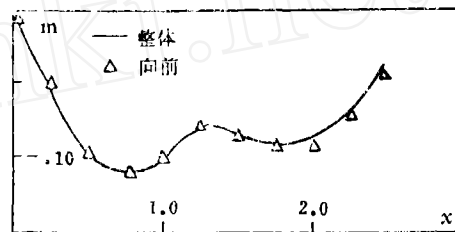


图3 不同计算过程的比较

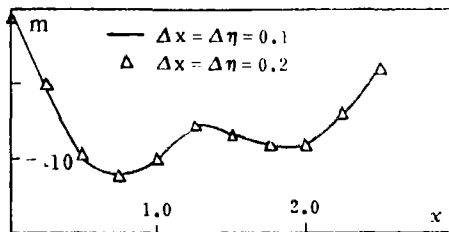


图4 不同步长的比较

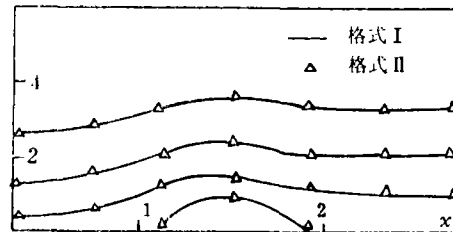


图5 不同差分格式的比较

七、结 论

通过数值分析和与已知结果的比较, 说明了只要分离区不大, 边界层方程仍然适用; 出现在分离点附近的奇异性, 可通过给定壁面摩阻, 计算压力梯度为求解的一部分而有效地消除。

本文采用的方程是典型的以流函数表示的边界层方程, 其优点是积分时可由 $x = 0$ 的前缘开始, 这将给许多问题的计算带来方便。

由计算结果表明, 只要回流区不大, 用向前推进的方法比整体迭代节省内存和时间, 而且同样可得到满意的结果。

本文给出的方法适用于计算诸如压缩拐角, 流线型物体的尾部等具有分离泡的流动。

参 考 文 献

- [1] Briley, W.R., *J.F.M.* **47** (1971), 713.
- [2] Hung & MacCormack, *AIAA* **16**, 10 (1978), 1090.
- [3] Son & Hunratty, *J.F.M.* **35** (1969), 369.
- [4] Dennis & Chang, G., *J.F.M.* **42** (1970), 471.
- [5] Leal, L.G., *J.F.M.* **59** (1973), 513.
- [6] Masliyah & Epstein, N., *J.F.M.* **44** (1970), 493.

- [7] MacCormack, AIAA Paper 75-1, (1975).
- [8] Klineberg & Steger, AIAA Paper 74-94, (1974).
- [9] Carter, J.E., NASA TR.R447, (1975).
- [10] Brown & Stewartson, *Ann. Rev. Fl. Mech.* V.1 (1969), 45-72.
- [11] Catherall & Mangler, *J. F. M.* 26 (1966), 163.
- [12] Lees, L. & Reeves, *AIAA* 2.11 (1964) 1907.
- [13] Keller & Cebeci, *J. Comput. Phys.* 10.1 (1972), 156.
- [14] 冯康,《数值计算方法》。

NUMERICAL SOLUTION OF BOUNDARY LAYER SEPARATED FLOWS

Pien Yingui Xu Dapeng

(Institute of Mechanics, Chinese Academy of Sciences)

Abstract

The numerical procedures are used to calculate a two-dimensional, steady, incompressible laminar separated flow. The boundary layer equations in terms of streamline function are discretized into non-linear algebraic equations by means of the finite-difference method, and then those algebraic equations are solved by the relaxation method. The singularity near the point of separation is removed by specifying the wall shear distribution instead of the pressure gradient which is considered as a part of the solution. The results obtained are compared with the known solutions.