

# 岩石的非线性弹性-塑性硬化帽盖模型

钱寿易 章根德

(中国科学院力学研究所, 北京)

## 提 要

本文用连续介质力学的理论分析了岩石屈服前的性状, 导出了岩石介质的非线性弹性的本构方程并与试验资料进行了比较, 结果令人满意。进而用非线性弹性取代一般帽盖模型中关于弹性区的线弹性假设, 给出了一个新的非线性弹性-塑性硬化帽盖模型。

## 一、引 言

岩石介质是一种物理力学性质十分复杂的地质材料。为了恰当地描述本构关系, 戴马乔(Dimaggio)和桑德勒(Sandler)在德鲁克(Drucker)等人的研究<sup>[1]</sup>及剑桥模型<sup>[2]</sup>的基础上, 提出了帽盖模型<sup>[3,4]</sup>。由于帽盖模型能恰当地拟合多种加载途径下的试验资料, 如实地描述岩石介质的主要性状, 可以广泛地用于不同的目的, 充分显示了适应性与灵活性, 所以近几年来得到了广泛的发展和应<sup>[5-7]</sup>。

帽盖模型具有传统的增量塑性理论的结构。在加载函数对屈服面、塑性势都相适应的情况下, 正交流动的增量塑性基本关系式的推导建立在两个基本假设上<sup>[8]</sup>。第一, 假设存在一个标量屈服函数 $F$ , 非弹性应变仅在 $dF > 0$ 时发生, 并且 $F$ 不依赖于非弹性应变。第二, 假设塑性应变 $\epsilon_{ij}^p$ 对 $d\sigma_{ij}$ 的依赖关系是线性的, 即,  $d\epsilon_{ij}^p = g_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{km}} d\sigma_{km}$ , 这里 $g_{ij}$ 是某个常数。

在一般帽盖模型中, 弹性区常采用线弹性假设。由于线弹性不能恰当地反映岩石介质在屈服前的应力应变关系非线性、膨胀性等特性, 因而一般帽盖模型必须进一步发展。但是在桑德勒等人<sup>[5]</sup>的变模量帽盖模型中, 计算十分复杂。所以, 如何使帽盖模型既能反映岩石介质的主要特性, 计算上又不十分复杂, 成了一个十分重要的问题。

本文对解决这个问题作了尝试。首先, 运用连续介质力学的基本理论分析岩石介质屈服前的性状, 导出了岩石介质的非线性弹性本构方程, 并与实验资料进行了比较。进而, 用非线性弹性的本构关系取代一般帽盖模型中关于弹性区的线弹性假设, 导出了非线性弹性-塑性硬化帽盖模型。

## 二、岩石介质的非线性分析

具有增量关系的一般帽盖模型在三维笛卡尔坐标系中能表示为<sup>[5]</sup>

$$d\epsilon_{ij} = d\epsilon_{ij}^e + d\epsilon_{ij}^p \quad (1)$$

$$d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{9K} \delta_{ij} d\sigma_{kk} + \frac{1}{2G} (d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} d\sigma_{kk}) \quad (2)$$

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \leq 0 \quad (3)$$

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{当 } F = 0 \\ d\varepsilon_{ij}^p &= 0 & \text{当 } F < 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

这里,  $\delta_{ij}$  是克罗内克尔(Kronecker)增量。  $d\varepsilon_{ij}$ ,  $d\varepsilon_{ij}^e$ ,  $d\varepsilon_{ij}^p$  各表示总应变、弹性应变、塑性应变的增量。  $d\sigma_{ij}$  表示应力增量。  $d\lambda$  是一系数, 仅当塑性应变发生时不为 0。

$$\text{引入} \quad p = \frac{1}{3} I_1 = \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ii}$$

$$q = \left( \frac{1}{3} S_{ij} S_{ij} \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} (I_2)^{\frac{1}{2}}$$

经过张量计算, 最终可得到

$$d\sigma_{ij} = K \delta_{ij} \left( d\varepsilon_v - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p} \right) + 2G \left( d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} d\lambda \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} \right) \quad (5)$$

$$d\lambda = \frac{K \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right) d\varepsilon_{kk} - \frac{2}{3} G \frac{\partial F}{\partial q} \frac{S_{ij}}{q} d\varepsilon_{ij}}{K \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 + \frac{2}{3} G \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p}} \quad (6)$$

帽盖模型中包括三种不同的性状方式: 弹性性状, 破坏性状及塑性硬化帽盖。在屈服前岩石的性状往往认为是弹性的。弹性区的模量常用有效的卸载资料来确定。对一般的低孔隙率岩石, 可以把体变模量  $K$ , 剪切模量  $G$  都取作常量。但为了更逼真地拟合岩石的特性, 特别是对较高孔隙率的岩石, 就必须用非线性弹性来模拟岩石在弹性区的性状。

借助于连续介质力学基本理论, 我们可以很快地导出非线性弹性的本构关系。对于弹性体, 我们知道应力张量  $\sigma$  与应变张量  $\varepsilon$  有一一对应的关系

$$\varepsilon = f(\sigma) \quad (7)$$

将(7)式展开成级数, 则可写成如下的形式:

$$\varepsilon = f_0 \mathbf{1}_0 + f_1 \sigma + f_2 \sigma^2 + f_3 \sigma^3 + \dots \quad (8)$$

按照张量分析的凯利-汉密尔顿(Cayley-Hamilton)理论, 对称张量满足它自身的特征方程, 可以得到关于  $\sigma$  的幂的递推公式<sup>9</sup>

$$\sigma^3 = I_3 \mathbf{1}_0 - I_2 \sigma + I_1 \sigma^2 \quad (9)$$

这里

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$$

$$I_2 = \sigma_{11} \sigma_{22} + \sigma_{22} \sigma_{33} + \sigma_{33} \sigma_{11}$$

$$I_3 = \sigma_{11} \cdot \sigma_{22} \cdot \sigma_{33}$$

$\mathbf{1}_0$  为单位张量。

借助于式(9),  $\sigma$ 的任何高于 $\sigma^2$ 的幂都能表示成 $I_0$ ,  $\sigma$ 和 $\sigma^2$ 的线性组合。于是式(8)中关于 $\sigma$ 的三次幂和所有的高次幂都消失, 式(8)就变成

$$\varepsilon = \phi_0 I_0 + \phi_1 \sigma + \phi_2 \sigma^2 \quad (10)$$

公式(10)中的模数  $\phi_i = \phi_i(I_1, I_2, I_3)$ , 是关于应力不变量的多项式。如果我们这样考虑 $\phi_i$ 中各项的取舍, 使得 $\varepsilon$ 的表示式中只出现 $\sigma^2$ 项, 而不出现 $\sigma^3$ 或更高次幂, 于是 $I_3$ 就不出现了, 结果式(10)能写成如下的形式<sup>[10]</sup>:

$$\varepsilon = (\alpha_0 + AI_1 + BI_1^2 + CI_2)I_0 + (D + HI_1)\sigma + L\sigma^2 \quad (11)$$

设岩石介质在未受应力的初始状态时应变为0, 于是 $\alpha_0 = 0$ ,  $A, B, C, D, H, L$ 为待定常数。将式(11)写成分量形式:

$$\varepsilon_{ij} = (AI_1 + BI_1^2 + CI_2)\delta_{ij} + (D + HI_1)\sigma_{ij} + L\sigma_{ik}\sigma_{kj} \quad (12)$$

公式(12)中除了 $A$ 和 $D$ 外所有的常数都消失, 就可以得到虎克定律:  $\varepsilon'_{ij} = AI_1\delta_{ij} + D\sigma_{ij}$ , 这里  $A = -\frac{\nu}{E}$ ,  $D = \frac{1+\nu}{E}$ ,  $E$ 为杨氏模量,  $\nu$ 为泊桑比。 $\varepsilon''_{ij} = (BI_1^2 + CI_2)\delta_{ij} + HI_1\sigma_{ij} + L\sigma_{ik}\sigma_{kj}$ 表示了对虎克定律偏离的非线性分量。体积的非线性膨胀可以表示为

$$V^d = (3B + C + H + \frac{1}{3}L)I_1^2 + (3C - 2L)J_2 \quad (13)$$

这里

$$J_2 = \frac{1}{2}S_{ij}S_{ij} = I_2 - \frac{1}{3}I_1^2$$

对单轴压缩

$$\sigma_2 = \sigma_3 = 0,$$

于是

$$V^d = -3(3B + H)J_2 \quad (14)$$

式(14)表明了单纯的剪切可以引起膨胀, 这就是人们常说的剪胀性。所以, 式(12)作为岩石介质的一种非线性本构关系, 它能恰当地描述膨胀性、非线性响应等岩石的重要特性。

式(12)中的常数能通过岩石力学常规试验得到。例如, 由常规三轴试验给出了 $\sigma_x - \varepsilon_x$ 与 $\sigma_x - \varepsilon_0$ 曲线。从 $\sigma_x - \varepsilon_0$ 曲线上 $\sigma_x = 0$ 处的斜率就可定出常数 $A$ 。同样从 $\sigma_x - \varepsilon_x$ 曲线上 $\sigma_x = 0$ 处的斜率可定出 $A + D$ 。由 $\sigma_x - \frac{\partial \varepsilon_x}{\partial \sigma_x}$ 曲线的斜率与 $\sigma_x - \frac{\partial \varepsilon_0}{\partial \sigma_x}$ 曲线的斜率能够定出 $2(B + H)$ 与 $2B$ 。当 $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33}$ 时, 静水压缩试验没有非线性膨胀现象, 即 $V^d = (3B + H + C)I_1^2 + 3CJ_2 = 0$ 。于是 $C = -(3B + H)$ 。再由单剪或真三轴试验就可以定出常数 $L$ 。

我们对肖克(Schock)<sup>[11]</sup>所给出的纽盖脱(Nugget)砂岩在围压1kbar时的三轴试验的实验曲线进行了模拟。由电子计算机计算得到的常数为:  $A = 0.237(\text{Mbar})^{-1}$ ,  $D = 1.92^6(\text{Mbar})^{-1}$ ,  $E = 0.529\text{Mbar}$ ,  $\nu = 0.14$ ,  $B = 69(\text{Mbar})^{-2}$ ,  $H = -106(\text{Mbar})^{-2}$ ,  $C = -101(\text{Mbar})^{-2}$ ,  $L = 0$ 。理论计算的结果与实验曲线比较接近, 分别如图1, 图2, 图3所示。图中的实线是实验曲线<sup>[11]</sup>, 点划线表示对岩石的本构关系进行非线性弹性模拟的计算结果。二者的比较表明了非线性弹性的本构关系能较好地模拟岩石介质在屈服前的主要的物理力学特性。用它来取代一般帽盖模型中关于弹性区的线弹性假设, 就能得到非线性弹性-塑性硬化的帽盖模型。

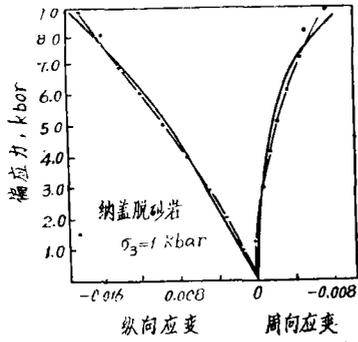


图 1 纽盖脱\*砂岩在围压1Kbar时的三轴压缩实验曲线与非线性弹性模拟的计算结果的比较。

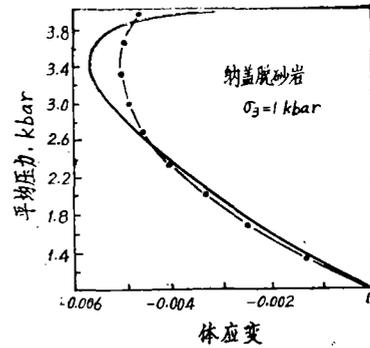


图 2 纽盖脱砂岩在围压1Kbar时的体应变曲线与非线性弹性模拟的计算结果比较。

### 三、非线性弹性-塑性硬化帽盖模型

前面的分析给出了岩石介质在屈服前的非线性本构方程。对实际中存在的大量球对称问题， $\sigma_2 = \sigma_3$ 。公式(12)中的常数变成： $L = 0$ ， $A = -\frac{\nu}{E}$ ， $D = \frac{1 + \nu}{E}$ ， $C = -(3B + H)$ 。弹性应变可以写成

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij}^e &= (AI_1 + BI_1^2 + CI_2)\delta_{ij} + (D + HI_1)\sigma_{ij} \\ &= \left[ -\frac{\nu}{E}I_1 - \frac{1}{2}(B + H)I_1^2 + \frac{1}{2}(3B + H)\sigma_{ij}\sigma_{ij} \right] \delta_{ij} + \left( \frac{1 + \nu}{E} + HI_1 \right) \sigma_{ij} \end{aligned} \quad (15)$$

弹性应变增量

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^e &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial I_1} dI_1 + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^e}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} \\ &= \frac{1}{9K} \delta_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} dI_1 \right) + H\sigma_{ij} dI_1 \\ &\quad - (B + H)I_1 \delta_{ij} dI_1 - (3B + 2H)I_1 d\sigma_{ij} \end{aligned} \quad (16)$$

于是，具有增量关系的非线性弹性-塑性硬化帽盖模型可以写成如下的形式：

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p \quad (17)$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^e &= \frac{1}{9K} \delta_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} dI_1 \right) - (B + H)I_1 \delta_{ij} dI_1 + \\ &\quad H\sigma_{ij} dI_1 + (3B + 2H)I_1 d\sigma_{ij} \end{aligned} \quad (18)$$

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \leq 0 \quad (19)$$

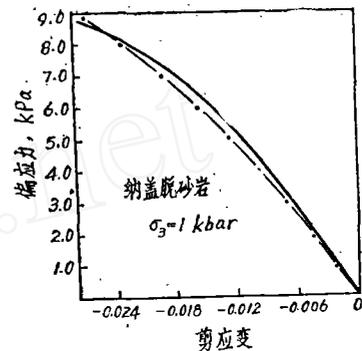


图 3 纽盖脱砂岩在围压1Kbar时的剪应变曲线与非线性弹性模拟的计算结果比较。

\* 图面纳盖脱应为纽盖脱——作者

$$\left. \begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}, & \text{如 } F &= 0 \\ d\varepsilon_{ij}^p &= 0, & \text{如 } F < 0 \end{aligned} \right\} (20)$$

在塑性形变过程中, 式(19)与(20)变成

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) = 0 \quad (21)$$

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (22)$$

由式(21)可以得到

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d\varepsilon_{ij}^p = 0 \quad (23)$$

将式(22)代入式(23),

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 0 \quad (24)$$

式(17)可以写成

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij} &= \frac{1}{9K} \delta_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} \left( d\sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} dI_1 \right) - (B+H) I_1 \delta_{ij} dI_1 \\ &\quad + H \sigma_{ij} dI_1 + (3B+2H) I_1 d\sigma_{ij} + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \end{aligned} \quad (25)$$

式(25)两边乘  $\delta_{ij}$ , 化简后可得

$$d\varepsilon_{ij} \delta_{ij} = d\varepsilon_{kk} = \frac{1}{3K} dI_1 + d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm}$$

于是有

$$d\sigma_{kk} = dI_1 = 3K \left( d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm} \right) \quad (26)$$

改写成不变量  $p$ ,  $q$  的形式, 由于  $\frac{\partial S_{ij}}{\partial \sigma_{ij}} = 1 - \frac{1}{3} \delta_{ij}$ ,  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}$ ,

$\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} = \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon^p}$ 。式(25)能改写成

$$d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \delta_{ij} dI_1 - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = 3(B+H) S_{ij} dI_1 + \frac{1}{2G} d\sigma_{ij} \quad (27)$$

将式(26)代入式(27), 化简后可得

$$d\sigma_{ij} = K\delta_{ij} \left( d\varepsilon_v - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p} \right) + 2G \left( de_{ij} - \frac{1}{3} d\lambda \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} \right) - 18KG(B+H) \left( d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p} \right) S_{ij} \quad (28)$$

(详见附录二)

将式(27)两边乘  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$ , 可得

$$de_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \left( \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \delta_{ij} dI_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2G} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + 3(B+H) S_{ij} dI_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \quad (29)$$

以式(24), (26)及  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3} \delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}$  代入上式, 化简后可得

$$d\lambda = \frac{K d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{2}{3} G \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} de_{ij} - 18KGq(B+H) d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial q}}{K \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 + \frac{2}{3} G \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial p} - 18KGq(B+H) \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q}} \quad (30)$$

(详见附录三)

将式(30)所表示的  $d\lambda$  代入式(29), 就能求得所需的  $d\sigma_{ij}$  的值。

模型的拟合过程与一般常模量帽盖模型相似<sup>[6]</sup>。只是本模型的弹性区采用了非线性假设, 要由三轴试验定出常数  $A, B, C, D, H$ 。它比线性弹性假设多了两个常数  $B$  与  $H$ 。而常数  $C = -(3B+H)$  是非独立的常数。

比较式(28), (5), (30), (6)。非线性弹性-塑性硬化帽盖模型比一般常模量帽盖模型都增加了与非线性常数相关的项。当着  $B = H = 0$  时, 相应项也就消失, 本模型也就转化为一般常模量帽盖模型。所以, 一般常模量帽盖模型只不过是本模型用来描述低孔隙率岩石时的一种特殊形式。非线性弹性-塑性硬化帽盖模型既能较好地描述岩石在屈服前的非线性, 膨胀性等特性, 又能恰当地拟合岩石的各种破坏性状与塑性硬化性状。与常模量帽盖模型相比, 具有更广泛的适应性, 能适用于描述各种类型的岩石介质。并且, 它的数学形式又比桑德勒的变模量帽盖模型<sup>[6]</sup>简捷, 故能广泛地应用于岩土工程与地下激波的计算中。

## 四、结 论

为了更准确地描述岩石介质屈服前存在的非线性、膨胀性等特性, 帽盖模型的弹性区必须采用非线性假设。运用连续介质力学基本理论可以导出岩石介质在屈服前的非线性本构关系, 进而可以得到非线性弹性-塑性硬化帽盖模型。当非线性常数消失时, 它就转化为一般的常模量帽盖模型。

## 〔附录一〕: 符号

- $\sigma$ : 应力张量  
 $\sigma_{ij}$ : 应力张量的分量形式。  
 $S_{ij}$ : 应力偏量的分量形式。  
 $\epsilon$ : 应变张量。  
 $\epsilon_{ij}$ : 应变张量的分量形式。  
 $e_{ij}$ : 应变偏量的分量形式。  
 $e_{ij}^e$ : 弹性应变张量的分量形式。  
 $e_{ij}^p$ : 塑性应变张量的分量形式。  
 $de_{ij}^e$ : 弹性应变增量。  
 $de_{ij}^p$ : 塑性应变增量。  
 $\epsilon_v^p, \epsilon_{kk}^p$ : 塑性体积应变。  
 $d\epsilon_v^p, d\epsilon_{kk}^p$ : 塑性体积应变增量。  
 $\epsilon_x$ : 三轴压缩时的轴向应变。  
 $\epsilon_\theta$ : 三轴压缩时的周向应变。  
 $\delta_{ij}$ : 克罗内克尔(Kronecker)增量。  
 $I_0$ : 单位张量。  
 $I_1$ : 应力张量第一不变量。  
 $I_2$ : 应力张量第二不变量。  
 $I_3$ : 应力张量第三不变量。  
 $J_2$ : 应力偏量第二不变量。  
 $A, B, C, D, H, L$ : 非线性弹性常数。  
 $K$ : 线弹性体的体变模量。  
 $G$ : 线弹性体的剪切模量。  
 $E$ : 杨氏模量。  
 $\nu$ : 泊桑比。  
 $V^d$ : 非线性弹性的体积膨胀。  
 $p$ : 各向等压力。  
 $q$ : 八面体剪应力。  
 $F$ : 屈服面函数。

## 〔附录二〕: 式(28)的推导

由式(27)知

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{ij} &= 2Gd\epsilon_{ij} + 2G\left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right)\delta_{ij}dI_1 - 2Gd\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - 3(B+H)2G \cdot S_{ij}dI_1 \\
 &= 2Gd\epsilon_{ij} + 2G\left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right)\delta_{ij} \cdot 3K\left(d\epsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm}\right) - 2Gd\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \\
 &\quad - 18GK(B+H)S_{ij}\left(d\epsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm}\right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= 2Gd\varepsilon_{ij} + 2G\left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right)\delta_{ij} \cdot 3K\left[d\varepsilon_{kk} - \delta_{lm} d\lambda\left(\frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \delta_{lm} + \frac{1}{3} \frac{S_{lm}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] \\
&\quad - 2Gd\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - 18GK(B+H)S_{ij}\left[d\varepsilon_{kk} - d\lambda\delta_{lm}\left(\frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{lm}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right)\right] \\
&= 2G d\varepsilon_{ij} + K\delta_{ij}\left[d\varepsilon_{kk} - \delta_{lm}d\lambda\left(\delta_{lm} \cdot \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p}\right)\right] \\
&\quad - \frac{2}{3}G\delta_{ij}\left(d\varepsilon_{kk} - \frac{1}{3}d\lambda\delta_{lm}\frac{\partial F}{\partial p}\delta_{lm}\right) - 2Gd\lambda\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right) \\
&\quad - 18GK(B+H)S_{ij}\left(d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p}\right) \\
&= 2G\left(d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}d\varepsilon_{kk}\right) + K\delta_{ij}\left(d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p}\right) + \frac{2}{3}G\delta_{ij}d\lambda \frac{\partial F}{\partial p} \\
&\quad - \frac{2}{3}G d\lambda\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{2}{3}Gd\lambda \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} - 18KG(B+H)S_{ij}\left(d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p}\right) \\
&= K\delta_{ij}\left(d\varepsilon_{ij} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p}\right) + 2G\left(d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}d\lambda \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right) - 18KG(B+H) \\
&\quad \left(d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p}\right)S_{ij} \quad (28)
\end{aligned}$$

〔附录三〕： 式(30)的推导

式(27)  $\times \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$  可得:

$$\begin{aligned}
&d\varepsilon_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right)\delta_{ij}dI_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{2G}d\sigma_{ij} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \\
&\quad + 3(B+H)S_{ij}dI_1 \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}
\end{aligned}$$

以式(24)及  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}$  代入上式有

$$\begin{aligned}
&3(B+H)S_{ij}dI_1\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right) - \frac{1}{2G}d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right) \\
&= d\varepsilon_{ij}\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right) + \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right)\delta_{ij}dI_1\left(\frac{1}{3}\delta_{ij} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}\right)
\end{aligned}$$

$$-d\lambda\left(\frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3}\frac{S_{ij}}{q}\frac{\partial F}{\partial q}\right)\left(\frac{1}{3}\delta_{ij}\frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3}\frac{S_{ij}}{q}\frac{\partial F}{\partial q}\right)$$

化简、合并后可得

$$\begin{aligned} & 3(B+H) \cdot \frac{1}{3} \frac{S_{ij} \cdot S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} dI_1 - \frac{1}{2G} d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial p} \\ &= \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{ij} + \left(\frac{1}{6G} - \frac{1}{9K}\right) dI_1 \frac{\partial F}{\partial p} - d\lambda \left[ \frac{1}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{3} \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 \right] \end{aligned}$$

以式(26)代入, 可得

$$\begin{aligned} & 3(B+H)q \frac{\partial F}{\partial q} \cdot 3K \cdot \left( d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm} \right) - \frac{1}{2G} d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial p} \\ &= \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{ij} + \left( \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \frac{\partial F}{\partial p} \cdot 3K \cdot \left( d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} \delta_{lm} \right) \\ & \quad - \frac{d\lambda}{3} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 - \frac{d\lambda}{3} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 \end{aligned}$$

以  $\frac{\partial F}{\partial \sigma_{lm}} = \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \delta_{lm} + \frac{1}{3} \frac{S_{lm}}{q} \frac{\partial F}{\partial q}$  代入, 可得

$$\begin{aligned} & 9Kq(B+H) \frac{\partial F}{\partial q} \left[ d\varepsilon_{kk} - d\lambda \delta_{lm} \left( \frac{1}{3} \frac{\partial F}{\partial p} \delta_{lm} + \frac{1}{3} \frac{S_{lm}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] - \frac{1}{2G} d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial p} \\ &= \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{ij} + 3K \frac{\partial F}{\partial p} \left( \frac{1}{6G} - \frac{1}{9K} \right) \left[ d\varepsilon_{kk} - d\lambda \delta_{lm} \left( \frac{1}{3} \delta_{lm} \frac{\partial F}{\partial p} \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \frac{1}{3} \frac{S_{lm}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} \right) \right] - \frac{1}{3} d\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 - \frac{1}{3} d\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 \end{aligned}$$

化简后可得

$$\begin{aligned} & 9Kq(B+H) \frac{\partial F}{\partial q} \left( d\varepsilon_{kk} - d\lambda \frac{\partial F}{\partial p} \right) - \frac{1}{2G} d\lambda \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_v^p} \frac{\partial F}{\partial p} \\ &= \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{ij} + \frac{K}{2G} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} \\ & \quad - d\lambda \left( \frac{K}{2G} - \frac{1}{3} \right) \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 - \frac{1}{3} d\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 - \frac{1}{3} d\lambda \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 \end{aligned}$$

即得

$$\begin{aligned} & \frac{K}{2G} d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} + \frac{1}{3} \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{ij} - 9Kq(B+H) \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{kk} \\ & = d\lambda \left[ \frac{K}{2G} \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 + \frac{1}{3} \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 - \frac{1}{2G} \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial p} - 9Kq(B+H) \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q} \right] \end{aligned}$$

以 $d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} d\varepsilon_{kk} \delta_{ij}$ 代入上式, 可得:

$$d\lambda = \frac{K d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{2}{3} G \frac{S_{ij}}{q} \frac{\partial F}{\partial q} d\varepsilon_{ij} - 18KGq(B+H) d\varepsilon_{kk} \frac{\partial F}{\partial q}}{K \left( \frac{\partial F}{\partial p} \right)^2 + \frac{2}{3} G \left( \frac{\partial F}{\partial q} \right)^2 - \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \frac{\partial F}{\partial p} - 18KGq(B+H) \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial F}{\partial q}} \quad (30)$$

### 参 考 文 献

- [1] Drucker, D. C., Gibson, R. E. and Henkel, D. J., Trans. ASCE., Vol. 122, 1957, pp. 338~346.
- [2] Schofield, A. and Worth, P., Critical State Soil Mechanics, London, McGraw Hill, Ltd., 1968.
- [3] Dimaggio, F. L. and I., Sandler, DASA-2521, Paul Weidlinger Consulting Engineer, 1970.
- [4] Sandler, I. and Dimaggio, F. L., DASA-2595, Paul Weidlinger Consulting Engineer, Oct. 1970.
- [5] Sandler, I. and Dimaggio, F. L., Journal of the Geotechnical Engineering Division, ASCE, Vol. 102, No. GT7, 1976.
- [6] Dimaggio, F. L. and Sandler, I., DNA2801T (AD-737662), Oct. 1971.
- [7] Swift, R. P., Modeling of Static and Dynamic Response of a Dry Kayenta Sandstone, 17th, U. S. Symposium on Rock Mechanics, 1976.
- [8] Zdeněk, P. B., Int. J. Solids Structures, Vol. 14, 1979, pp. 691~714.
- [9] Freudenthal, A. M., The Mathematical Theories of the Inelastic Continuum, Handbuch der Physik VI, Springer-Verlag, Berlin, 1958.
- [10] William, D. S. and James, D., Continuum Theory of Rock Dilatancy, Advances in Rock Mechanics Reports of Current Research, Vol. 11, Part A, Proceedings of the Third Congress of the International Society for Rock Mechanics Themes 1~2, Denver, 1974.
- [11] Schock, R. N., UCRL-51447, August 28, 1973.
- [12] Sandler, I. S. and Baron, M. L., Recent Development in the Constitutive Modeling of Geological Materials, Proc. 3rd, Int. Conf. Num. Methods Geomech., Aachen, W., Germany, 1979.

## A Nonlinear Elastic-hardening Plastic Cap Model

*Qian Shou-yi (Tsien Shou-I) and Zhang Gen-de*

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

### Abstract

In this paper, the rock behavior before yielding is analyzed by using the theories of continuum mechanics. The nonlinearly elastic constitutive equation of rock medium is derived and compared satisfactorily with the available experimental data. Moreover, the substitution of linearly elastic hypothesis used in the conventional cap model with the nonlinearly elastic one leads to develop a new nonlinearly elastic-hardening plastic cap model as presented herein.

www.cnki.net