中 国 科 学

1982 年 3 月　　A 辑　　第 3 期

关于相对论热力学中的温度变换

谈镐生　朱如曾　谢文豹

(中国科学院力学研究所，北京)

摘　要

本文在评述了半个世纪以来关于温度相对论变换关系式的各种不同结果和争议后；论证了可逆过程中元功的表示式，给出了与 Einstein 类似的正确推导．文中指出了 Eddington-Ott-Møller 观点和 Landsberg 观点的错误，并对 Møller 模型进行了具体的修正，其结果仍与 Planck-Einstein 一致．

一、引　言

从 Einstein 的狭义相对论建立以来，对热力学量在各个惯性参考系中的变换关系引起了物理学家的兴趣，其中温度的变换关系迄今仍有三种观点：

Planck 和 Einstein[1—4] 认为

$$T=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}T_0;\tag{1}$$

Eddington[5]、Ott[1,2] 和 Møller[6] 认为

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}};\tag{2}$$

Landsberg 认为

$$T=T_0.\tag{3}$$

在 (1)—(3) 式中，T_0 为热力学系统在相对它为静止的参考系 K_0 中的温度，T 为相对于 K_0 以速度 v 运动的惯性参考系 K 中系统的温度，c 是光速．这三种观点的来由简述如下：

Planck 和 Einstein 在 1907 年根据"同一系统在不同惯性系中熵相等"及动量变化与功的关系式，

$$dA=-pdV+\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{G},\tag{4}$$

推得了热量的相对论变换式

$$\delta Q=\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\delta Q_0.\tag{5}$$

在 (4) 和 (5) 式中，p 是系统的压强，V 是体积，$\boldsymbol{v}$ 是系统整体运动速度，$\boldsymbol{G}$ 是系统的动量；δQ_0 为在 K_0 系中观察时热力学系统吸收的热量，δQ 为在 K 系中观察时这个系统吸收的热量．

本文 1981 年 8 月 20 日收到．

Eddington 在 1923 年及 Ott 在 1963 年假定功和热量分别满足能量变换关系，从而得到

$$\delta Q = \frac{\delta Q_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{6}$$

(6) 式的实质就是不承认 Planck 提出的 (4) 式.

1967 年 Møller 设计了一个可进行具体计算的模型，避开了 (4) 式，对过程的功进行了详细的计算，从而得到与 (4) 式不同的功表示式. 然后应用能量关系，最后对热量也得到了 (6) 式.

在求得热量的相对论变换式之后，Eddington、Planck、Møller 等都采用方程

$$T = \frac{\delta Q}{\delta S} \tag{7}$$

和熵 S 是标量的概念，从而得到了温度变换的不同关系式 (1) 和 (2). Møller 认为 Planck 的温度变换关系是错误的，并认为对于这样基本而又重要的关系式，其错误持续如此之久，是物理学上罕见的事. 但是 Møller 对还是 Planck 对，并不是到 Møller 为止就有了公认的结论.

后来又有一些学者如 Landsberg，为了迴避这些矛盾，认为温度只有在静止参考系中才具有物理意义，即 (3) 式. 这样，就形成目前物理学家的三种观点，即 (1)、(2) 和 (3) 式.

最近，Landsberg[7] 提出了一个设想的实验，来检验究竟哪个关系式真正表示了温度的变换.

我们认为，温度的变换关系应该是唯一确定的，并且应该是从理论上能解决的. 本文将先证明 (4) 式，从而推导出与 Planck-Einstein 相一致的温度变换关系. 然后指出 Eddington-Ott-Møller 观点和 Landsberg 观点的错误所在，并对 Møller 模型进行具体的修正，结果证明：即使采用 Møller 模型仍能得到 Planck-Einstein 关系式，即 (1) 式.

二、可逆元功公式及熵和温度的变换关系

在一个任意的惯性参考系内，代表能量守恒的热力学第一定律总是成立的：

$$dE = đQ + đA, \tag{8}$$

其中 dE 是热力学系统总能量的微小变化，$đA$ 是过程中外界对系统所作的功，$đQ$ 是系统所吸收的热. 如果过程是可逆的，那么 $đA$ 可以分解成两个彼此不相关的部分

$$đA = đA_V + đA_G = -pdV + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{G}, \tag{9}$$

其中 $\boldsymbol{v}$ 为质心速度，$đA_V$ 是与体积变化对应的功，$đA_G$ 是与系统动量变化对应的功，$\boldsymbol{G}$ 是系统

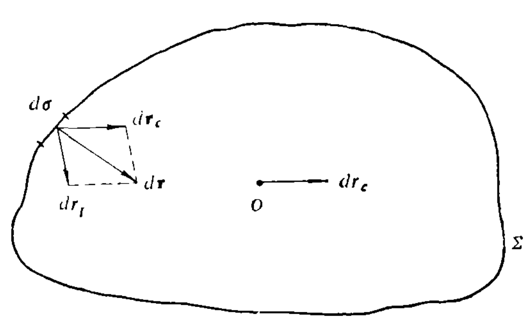

图　1

的整体动量. (9) 式就是 (4) 式. 这个公式可用下法证明: 如图 1 的热力学系统, 质心速度为 $\boldsymbol{v}_c$, $d\boldsymbol{r}$ 是系统的一个表面元 $d\boldsymbol{\sigma}$ 的实际位移, $d\boldsymbol{r}_c$ 是质心的位移, $d\boldsymbol{r}_l$ 是 $d\boldsymbol{\sigma}$ 相对于质心的位移. 这样,实际过程中的元功 $\text{đ}A$ 为:

$$
\begin{aligned}
\text{đ}A &= \oint_\Sigma [-p(\boldsymbol{r})] d\boldsymbol{r} \cdot d\boldsymbol{\sigma} \\
&= \oint_\Sigma (-p) d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{r}_c + \oint_\Sigma (-p) d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{r}_l \\
&= \boldsymbol{v}_c \cdot dt \oint_\Sigma (-p) d\boldsymbol{\sigma} - \oint_\Sigma p d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{r}_l.
\end{aligned} \tag{10}
$$

(10) 式右边第一项积分即为系统所受的总外力,第二项积分当表面相对运动速度 $\boldsymbol{v}_l \to 0$ 时, p 可以用平衡态压强表示,与 $d\boldsymbol{\sigma}$ 无关,因此

$$
\begin{aligned}
\text{đ}A_{\text{可逆}} &= \lim_{\boldsymbol{v}_l \to 0} \text{đ}A = \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{G} - p_{\text{平}} \oint_\Sigma d\boldsymbol{\sigma} \cdot d\boldsymbol{r}_l \\
&= \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{G} - p_{\text{平}} dV,
\end{aligned}
$$

这样我们证明了 (4) 式. 结合 (8) 和 (9) 式,我们得到

$$
dE = \text{đ}Q - pdV + \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{G}. \tag{11}
$$

定义热力学体系的 $\boldsymbol{U}$ 函数:

$$
U = E - \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{G}. \tag{12}
$$

利用 (7) 式和 (11) 式,得到

$$
dU = TdS - pdV - \boldsymbol{G} \cdot d\boldsymbol{v}. \tag{13}
$$

可见 U 是独立变数为熵 S、体积 V 及速度 $\boldsymbol{v}$ 的特性函数. 从 (13) 式得

$$
T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{V, \boldsymbol{v}}. \tag{14}
$$

下面根据 (14) 式来求温度的变换关系. 首先要确定 E 和 S 的变换关系. Einstein 给出了在平衡态时系统总能的变换关系[4], 它是以系统在平衡态时是否有外力而分别为:

1. 平衡时外力为零,例如热质在刚性容器内,器壁计入系统,

$$
E = \frac{E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{15}
$$

相应的动量为:

$$
\boldsymbol{G} = \frac{\frac{\boldsymbol{v}}{c^2} E_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \tag{16}
$$

2. 平衡时,外力为处处与系统表面垂直的压力,此时

$$
E = \frac{E_0 + \frac{v^2}{c^2} p_0 V_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \tag{15'}
$$

其中 p_0 是系统的压强, V_0 是系统在固有参考系中的体积,相应的动量为:

$$G = \frac{\frac{v}{c^2}(E_0 + p_0V_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{16'}$$

利用(15)，(16)式或(15′)，(16′)式，我们都得到相对论 U 函数的变换关系为：

$$U = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,U_0. \tag{17}$$

现在讨论 S 的变换关系．这里先证明过程的可逆性与参考系无关．我们知道，可逆过程是其所生效果能完全复原，而不引起其它变化的过程[8]．如果某一过程 $A \to B$ 在参考系 K_0 中已被逆过程 $B \to A$ 所复原，而未引起任何其它变化，则在另一参考系 K 中来观察，唯一的变化只是系统有了一个宏观的整体位移，而这种位移显然可以通过一个逆位移恢复的．所以讨论的过程 $A \to B$ 在 K_0 系如果具备可逆性，则在 K 系中看来也具备可逆性．其次，证明过程的绝热性也不随参考系而变．证明如下：设系统在 K 系中绝热在 (11) 式中令 $đQ = 0$，并将 (15)，(16) 式和 $V = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,V_0$，$p = p_0$ 代入，得 $dE_0 = -p_0dV_0$，所以 $đQ_0 = 0$.

我们肯定了过程的可逆性及绝热性与坐标系无关之后，就可以进一步肯定 Planck 对熵 S 与坐标无关的论证[3,4]．

"我们设想，物体从一种状态（在这种状态中物体对不加撇的参照系是静止的）通过任何可逆绝热过程转化到第二种状态（在这种状态中物体对加撇的参照系是静止的）．如果我们用 η_1 表示物体对于不加撇的参照系的起始状态的熵，用 η_2 表示终态的熵，那末，由于可逆性和绝热性，$\eta_1 = \eta_2$．但是，对于加撇的参照系，过程也是可逆和绝热的，因此我们同样得到：$\eta_1' = \eta_2'$."

"如果现在 η_1' 不等于 η_1，而 $\eta_1' > \eta_1$，那末这就是说，物体相对于它正在运动的参照系的熵，比相对于对它是静止的参照系的熵为大．于是，按照这个定理，必定 $\eta_2 > \eta_2'$ 也成立；因为物体在第二个状态相对于加撇的参照系是静止的，而对于不加撇的参照系则是运动的．但是这两个不等式同上面所述的两个方程相矛盾．同样，$\eta_1 > \eta_1'$ 也不可能，由此可以推知：$\eta_1' = \eta_1$，并且一般说来，$\eta' = \eta$，即物体的熵同参照系的选择无关."

因此，改用我们的符号，必须有

$$S = S_0. \tag{18}$$

利用(14)，(17)和(18)式得温度变换关系为：

$$T = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,T_0.$$

这个结果与 Planck 及 Einstein 得到的结果一致．从以上推导可见，不管器壁算不算作系统本身，U 的变换均是(17)式．这说明在讨论系统温度变换关系时，器壁是否算作系统本身，对结果没有影响．

三、Eddington 及 Møller 的错误分析及对错误的修正

1. Eddington 的错误

Eddington 认为热量和功都是能量的一种传递方式，因此它们也各自按质量变换方式进行

变换:

$$
\left.\begin{aligned}
\delta A &= \frac{\delta A_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\\
\delta Q &= \frac{\delta Q_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.
\end{aligned}\right\} \tag{19}
$$

按照 Eddington 的观点，一个热力学体系在固有参考系中没有作功则在另一惯性参考系中外力的功亦为零. 一个在 K_0 系静止的物体给以加热而保持体积不变,故在 K_0 系中外界不作功. 但由于热传导的作用,要引起系统能量的增加. 在相对论中,系统能量的增加必然引起质量的增加. 可是系统在 K_0 系中保持静止,故在 K 系中速度保持不变,因此动量就有所增加,也就有了外力和外力的功了. 所以(19)式是不能成立的.

2. Møller 论证中的错误

支持 Eddington-Ott 观点最有力的论证要算 Møller 在 1967 年提出的模型[6].

下面我们概要介绍一下缪勒自己的处理:

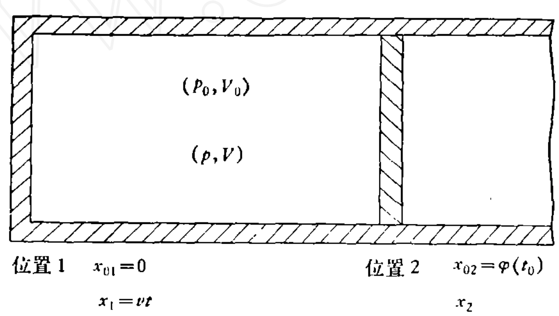

图 2

如图 2,有一圆柱形容器,内有热力学流体. 在固有参考系 K_0 内，体积为 V_0，处于热平衡状态，压力 p_0，活塞面积 a. 圆筒外是一个大热源，它能传递无限小热量给流体，以保证过程中时时维持处处压力相等，因而是可逆过程. 考虑一个有限的可逆过程,起始时刻($t_0=0$)容器端面在 $x_{01}=0$，活塞在 $x_{02}=l_0$. 终了时($t_0=\tau_0$)容器端面保持在 $x_{01}=0$，活塞移动到了 $x_{02}=l_0+\delta l_0$，流体体积变化 δV_0，压强变化 δp_0，活塞的运动可用位置 x_{02} 来描述:

$$
x_{02}=\begin{cases} l_0, & t_0\leqslant 0,\\ \varphi(t_0), & 0<t_0<\tau_0,\\ l_0+\delta l_0, & t_0\geqslant\tau_0. \end{cases} \tag{20}
$$

由于过程是可逆的,流体内压强处处相等

$$
p_{01}(t_0)=p_{02}(t_0)=f(t_0), \tag{21}
$$

且

$$
f(t_0)=\begin{cases} p_0, & t_0\leqslant 0,\\ p_0+\delta p_0, & t_0\geqslant\tau_0. \end{cases} \tag{22}
$$

在 K_0 系中,只有活塞在运动,因此外界对系统作的功为:

$$\delta A_0 = -a\int_0^{\tau_0} p_{02}(t_0)u_{02}dt_0 = -a\int_0^{\tau_0} f(t)\varphi'(t)dt. \tag{23}$$

现在 K 系中观察这同一过程，根据洛仑兹变换有

$$t = \frac{t_0 + \frac{v}{c^2}x_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad y = y_0,\quad z = z_0,\quad a = a_0. \tag{24}$$

对于位置 1 来说，$x_{01} = 0$，故

$$t_1 = \frac{t_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dt_1 = \frac{dt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{25}$$

对于位置 2 来说，$x_{02} = \varphi(t_0)$，故

$$t_2 = \frac{t_0 + \frac{v}{c^2}\varphi(t_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}},\quad dt_2 = \frac{1+\frac{v}{c^2}\varphi'(t_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt_0. \tag{26}$$

速度变换关系是

$$\left.\begin{aligned} u_1 &= v \\ u_2 &= \frac{v+\varphi'(t_0)}{1+\frac{v\varphi'(t_0)}{c^2}}. \end{aligned}\right\} \tag{27}$$

因此

$$\left.\begin{aligned} u_1dt_1 &= \frac{vdt_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \\ u_2dt_2 &= \frac{v+\varphi'(t_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}dt_0. \end{aligned}\right\} \tag{28}$$

由于压强是标量不变量，故有

$$\left.\begin{aligned} p_1(t_1) &= p_{01}(t_{01}) = f(t_{01}), \\ p_2(t_2) &= p_{02}(t_{02}) = f(t_{02}). \end{aligned}\right\} \tag{29}$$

由于相对论效应，当 $t_1 = t_2$ 时，$t_{01} \neq t_{02}$，因此一般地 $p_1(t) \neq p_2(t)$，由 (25) 及 (26) 式得

$$t_1 = t_2 = 0 \text{ 对应于 } t_{01} = 0 \text{ 和 } t_{02} = -\frac{v}{c^2}l_0. \tag{30}$$

故

$$p_1(t\leqslant 0) = p_2(t\leqslant 0) = p_0. \tag{31}$$

当

$$t_1 = t_2 = \tau,\quad \tau = \frac{\tau_0 + \frac{v}{c^2}(l_0+\delta l_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\text{ 时}$$

有

$$t_{01} = \tau_{01} = \tau_0 + \frac{v}{c^2}(l_0+\delta l_0),\quad t_{02} = \tau_0. \tag{32}$$

当 $t \geqslant \tau$ 时，$t_{01} \geqslant \tau_{01} > \tau_0$，$t_{02} \geqslant \tau_0$，故

$$p_1(t\geqslant\tau)=p_2(t\geqslant\tau)=p_0+\delta p_0. \tag{33}$$

有了以上关系，接着他计算了同一过程在 K 系观察外界对系统作的功.

$$\delta A_1=\int_0^\tau a p_1(t_1)u_1 dt_1=\frac{av}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_0^{\tau_{01}} f(t_0)dt_0$$

$$=\frac{av}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_0^{\tau_0} f(t)dt+\frac{\frac{v^2}{c^2}(p_0+\delta p_0)(V_0+\delta V_0)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}, \tag{34}$$

$$\delta A_2=-\int_0^\tau a p_2(t_2)u_2 dt_2=-\frac{a}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_{-\frac{v}{c^2}t_0}^{\tau_0} f(t_0)[v+\varphi'(t_0)]dt_0$$

$$=-\frac{\frac{v^2}{c^2}p_0V_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}-\frac{av}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\int_0^{\tau_0} f(t)dt+\frac{\delta A_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{35}$$

因此，

$$\delta A=\delta A_1+\delta A_2$$

$$=\frac{\delta A_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}+\frac{\frac{v^2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}(p_0\delta V_0+V_0\delta p_0+\delta p_0\delta V_0). \tag{36}$$

Møller 的计算是用了体系在起始及终了都有外力与体系压力平衡的情况，故能量变换关系式为(15′)式，在忽略了高阶无穷小量 $\delta p_0\delta V_0$ 之后，得到了

$$\delta Q=\frac{\delta Q_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{37}$$

应用(7)式得

$$T=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}. \tag{38}$$

Møller 的错误在于：他在计算功的变换关系时用了在固有参考系严格地满足 $p_{01}(t_0)=p_{02}(t_0)$ 这个条件，然后得出 $p_1(t)\neq p_2(t)$ 来计算两个惯性系的功．事实上，可逆过程是无摩擦的准静态过程[9]，即一个无摩擦的理想的极限过程，它是当活塞与器壁无摩擦时，以函数序列 $\{\varphi_n(t_0)\}$，$(n=1,2,\cdots)$ 标志的一系列实际过程，当活塞相对移动速度函数 $\varphi_n'(t_0)\to 0$ 时的极限过程．在实际过程中不可能满足压强 $p_{01}(t_0)=p_{02}(t_0)$，因为 p_{02} 将会因活塞移动而变化，这个变化必须通过一信息传递过程才能到达 x_{01} 处，在相对论中信息传递速度永远是小于 c 的，要求 $p_{01}(t_0)=p_{02}(t_0)$ 就违反了光速极限原理．当然，如果通过热传导的特殊安排，有可能在固有坐标系中达到条件 $p_{01}(t_0)=p_{02}(t_0)$．但在此情况下不能保证每一时刻密度和温度处处都相等，系统在两个参考系中观察必然都不是平衡态，因而过程在两个参考系中都不是可逆过程，方程式(7)就不能应用，亦不能得到温度变换的关系式(38).

3. Møller 模型的正确处理

对于 Møller 模型，为了得到正确的结果，可以作如下处理：先讨论一个以 $x_{02}=\varphi(t_0)$,

$x_{01}=0$ 表示的实际过程．在此实际过程中，令 $p_{01}(\varphi)$ 为当活塞位置为 $x_{02}=\varphi$ 时 $x_{01}=0$ 处的压强；$p_{02}(\varphi)$ 为此时活塞处的压强．因为是实际过程，所以有

$$p_{01}(\varphi)\neq p_{02}(\varphi).$$

若令

$$f(\varphi)=\lim_{\varphi'(t_0)\to 0}p_{01}(\varphi)=\lim_{\varphi'(t_0)\to 0}p_{02}(\varphi), \tag{39}$$

则

$$\left.\begin{aligned}p_{01}(\varphi)&=f(\varphi)+\Delta p_{01}(\varphi),\\ p_{02}(\varphi)&=f(\varphi)+\Delta p_{02}(\varphi),\end{aligned}\right\} \tag{40}$$

其中

$$\lim_{\varphi'(t_0)\to 0}\Delta p_{01}(\varphi)=\lim_{\varphi'(t_0)\to 0}\Delta p_{02}(\varphi)=0. \tag{41}$$

显然，$f(\varphi)$ 就是可逆过程中，当活塞到达 φ 时气缸中的压强．

现在，在 K 系中观察同一实际过程，令 $p_1(\Delta x)$ 为活塞到端壁处距离为 Δx 时端壁处的压强，$p_2(\Delta x)$ 为此时活塞处的压强．此时在 K 系观察到的时刻为 t，故有

$$\left.\begin{aligned}p_1(t)&=p_{01}(t_{01})=p_{01}\left[t_{02}+\frac{v}{c^2}\varphi(t_{02})\right]\\ &=p_{01}(t_{02})+\int_{t_{02}}^{t_{02}+\frac{v}{c^2}\varphi(t_{02})}p'_{01}(t)dt,\\ p_2(t)&=p_{02}(t_{02})=f[\varphi(t_{02})]+\Delta p_{02}(t_{02}).\end{aligned}\right\} \tag{42}$$

上两式亦可改用 x_{02} 作自变数，其中 $x_{02}=\varphi(t_{02})$，因此

$$p_1(\Delta x)=p_{01}(\varphi)+\int_{t_{02}}^{t_{02}+\frac{v}{c^2}\varphi}p'_{01}(t)dt,$$

$$p_2(\Delta x)=p_{02}(\varphi).$$

对上式取极限 $\varphi'\to 0$，就得到了可逆过程的压强．因为 $\lim\limits_{\varphi'\to 0}p'_{01}(t)=0$，而积分区间长度有限，故

$$\lim_{\varphi'\to 0}\int_{t_{02}}^{t_{02}+\frac{v}{c^2}\varphi}p'_{01}(t)dt=0.$$

再利用 (40) 便得

$$\lim_{\varphi'\to 0}p_1(\Delta x)=\lim_{\varphi'\to 0}p_2(\Delta x)=f(\varphi). \tag{43}$$

(43) 式的物理意义是对于实际过程，K 系中活塞与端壁相距为 Δx 的事件是同时不同地点的两个事件，在 K_0 系中这两事件对应的时间为 t_{01} 和 t_{02}，又设 t_{02} 时刻活塞的位置为 φ，则上式说明对可逆过程，K 系中气缸长度为 Δx 时，气缸中压强处处相等，且等于 K_0 系中气缸长度为 φ 时的平衡压强．由 (43) 式得

$$\left.\begin{aligned}p_1(\Delta x)&=f(\varphi)+\Delta p_1(\Delta x),\\ p_2(\Delta x)&=f(\varphi)+\Delta p_2(\Delta x),\end{aligned}\right\} \tag{44}$$

式中 $\Delta p_1(\Delta x)$，$\Delta p_2(\Delta x)$ 满足

$$\lim_{\varphi'\to 0}\Delta p_1(\Delta x)=\lim_{\varphi'\to 0}\Delta p_2(\Delta x)=0. \tag{45}$$

有了以上的结果，我们可以对 Møller 的论证进行修正．正确的做法是先对模型的实际过程计算功，然后取 $\varphi'(t_0)\to 0$，$t_0\to\infty$ 的极限并保证 Δl_0 有限，这样得到可逆过程的功．

在 K_0 系，据（23）式有

$$\delta A_0 = -a\int_{l_0}^{l_0+\delta l_0} p_{02}(\varphi)\,d\varphi.$$

将（40）式代入上式得

$$\delta A_0 = -a\int_{l_0}^{l_0+\delta l_0} f(\varphi)\,d\varphi - a\int_{l_0}^{l_0+\delta l_0}\Delta p_{02}(\varphi)\,d\varphi.$$

对上式取极限，并利用（41）式，得

$$\delta A_{0\text{可逆}} = \lim_{\varphi'\to 0}\delta A_0 = -a\int_{l_0}^{l_0+\delta l_0} f(\varphi)\,d\varphi. \tag{46}$$

在 K 系中

$$\delta A_1 = \int a p_1(\Delta x)\,dx_1 = \int af(\varphi)\,dx_1 + \int a\Delta p_1(\Delta x)\,dx_1,$$

$$\delta A_2 = -\int a p_0(\Delta x)\,dx_2 = -\int af(\varphi)\,dx_2 - \int a\Delta p_2(\Delta x)\,dx_2,$$

$$\delta A_1 + \delta A_2 = \int af(\varphi)\,d(x_1 - x_2) + \int a\left[\Delta p_1(\Delta x)\frac{dx_1}{dt} - \Delta p_2(\Delta x)\frac{dx_2}{dt}\right]dt.$$

上述积分都是对整个过程积分，其中

$$\int a\left[\Delta p_1(\Delta x)\frac{dx_1}{dt} - \Delta p_2(\Delta x)\frac{dx_2}{dt}\right]dt$$

$$= \int a\left[\Delta p_1(\Delta x)\frac{v+u_1}{1+\frac{u_1 v}{c^2}} - \Delta p_2(\Delta x)\frac{v+u_2}{1+\frac{u_2 v}{c^2}}\right]dt,$$

u_1，u_2 为在 K_0 系 x_{01} 及 x_{02} 的速度，$u_1=0$，$u_2=\varphi'(t_0)$．对上式取极限得

$$\begin{aligned}\delta A_{\text{可逆}} &= \lim_{\varphi'\to 0}(\delta A_1 + \delta A_2)\\ &= \int_{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,l_0}^{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,(l_0+\delta l_0)} af(\varphi)\,d(x_1 - x_2) + v\int_G^{G+\delta G} dG\\ &= -\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\int_{l_0}^{l_0+\delta l_0} af(\varphi)\,d\varphi + v\delta G,\end{aligned} \tag{47}$$

把（47）式代入（8）式，并利用（46）及（15）、（16）或（15′）、（16′）式，我们得到

$$\delta E = \delta Q + \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\delta A_{0\text{可逆}} + v\delta G,$$

即

$$\begin{aligned}\delta Q &= \delta E - v\delta G - \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\delta A_{0\text{可逆}}\\ &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,(\delta E_0 - \delta A_{0\text{可逆}})\\ &= \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\,\delta Q_0.\end{aligned} \tag{48}$$

从而据方程 (7) 式得到温度变换关系，

$$T = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\, T_0.$$

这与我们在第二节中得到的结果一致.

四、结　论

我们否定了 Ott-Møller 的观点，肯定了 Planck-Einstein 观点的正确性，而且用 Møller 自己的模型否定了他自己的观点，这样就消除了温度相对论变换中的争论. Landsberg 的观点是为了迴避温度变换问题中的矛盾而提出的，现在既然我们已消除了矛盾，也就自然否定了 Landsberg 的观点.

对于本工作，葛荣寿、康寿万和蔡树棠教授提出了有益的意见，我们在此表示深切谢意.

参　考　文　献

[1] Balesca, R., *Physica*, **40**(1968).
[2] Haar. D. Ter. *Physics Report*, **1**(1971).
[3] Planck, *Sitzungsber d. Kgl. Preuβ. Akad d. Wissersch*, 1970.
[4] 爱因斯坦，A.，爱因斯坦文集，商务印书馆，1977，188—190.
[5] Edd'ngton, A. S., *The Mathematical Theory of Relativity*, 1952, 34.
[6] Moller, G., *Relativistic Thermodynamics*, København, 1967.
[7] Landsberg, P. T., *Physics Letter*, **45**(1980), No. 3.
[8] 王竹溪，热力学，高等教育出版社，1955，82.
[9] ——，热力学简程，人民教育出版社，1964，32.