

摄动法在研究弹-粘塑性波问题中的应用

段祝平

王厘尔

(中国科学院力学研究所)

(中国科学院数学研究所)

提要 采用控制金属材料宏观塑性流动的两个无量纲物理参数作为小参数,将一维弹/粘-塑性问题的解摄动展开,从而,求解非线性波动方程的问题可以转化成求解相应的齐次或非齐次电报方程的问题,用 Laplace 积分变换或级数展开技术首先得到零次精确解。然后,用 Riemann 函数方法可获得一次和高次摄动解。与非线性问题的数值解比较,在恒应力或恒速度边界条件下,一次摄动解给出了波动问题的良好近似。这就表明,摄动技术在研究一类广泛的弹/粘-塑波问题中是有效的。

一、引言

在塑性波动的研究中,有两类相辅相成的问题:1) 已知本构方程,寻求具体波动问题的解;2) 把实验技术和波的理论结合起来,去研究具体材料的本构方程。这里,广泛采用数值方法(特征线方法或有限差分方法)。这是因为很难求得问题的精确解。本文提出对于一类非线性弹/粘-塑性波的传播问题,有时可以用正则摄动方法寻求问题的近似解。

二、控制方程与问题的提出

根据文献[1],控制一维应力弹/粘-塑性波在金属中传播的基本方程是:

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial \sigma}{\partial x} &= \beta \frac{\partial^3 v}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} &= \frac{1}{\rho c^2} \frac{\partial \sigma}{\partial t} + q(\sigma, \varepsilon) \end{aligned} \right\} \quad (2.1a-c)$$

其中, x 为质点的拉氏坐标, t 为时间, ρ 是密度, v 、 σ 和 ε (取压应力和压应变为正)分别是质点速度、应力和应变。 ρc 是弹性声抗, β 表征侧向惯性效应对一维方程的修正。式(2.1a)的右端三阶导数项对弹性激波波头上的解起重要作用。函数 $q(\sigma, \varepsilon)$ 称为塑性松弛函数,一般是 σ 和 ε 的非线性函数。不同作者,对函数 $q(\sigma, \varepsilon)$ 提出了许多不同的本构模型^[2-7],段祝平^[1]等提出可将位错速度进行 Taylor 级数展开,给出了函数 $q(\sigma, \varepsilon)$ 的一般形式:

本文系编委郑哲敏研究员推荐,于1981年10月收到。

$$q(\sigma, \varepsilon) = \begin{cases} K(1 + M\varepsilon^p) \sum_{m,n} A_{mn} \left(\frac{\sigma}{\sigma_r^*} - 1\right)^m \cdot (\varepsilon^p)^n & \text{(对有明显屈服点金属)} \\ K(1 + M\varepsilon^p) \sum_{m,n} B_{mn} \left(\frac{\sigma}{\sigma_r^*}\right)^m (\varepsilon^p)^n & \text{(对没有明显屈服点金属)} \end{cases} \quad (2.4a-b)$$

其中 $K^{-1} = \tau$ 是塑性流动的特征松弛时间, M 是位错线性增值系数, A_{mn} 和 B_{mn} 是位错阻尼系数. σ_r^* 是某一特征应力. 对 25CrMnSi 合金钢, 取 (2.4a) 中级数的一次项, 计算结果与实验就有较好吻合^[1]. 这时, 有

$$q(\sigma, \varepsilon) = K(1 + M\varepsilon^p) \left(\frac{\sigma}{\sigma_r^*} - 1 - H\varepsilon^p\right), \quad \text{当 } \left|\frac{\sigma}{\sigma_r^*}\right| > 1 + H|\varepsilon^p| \quad (2.5)$$

如将自变量和因变量进行无量纲化

$$\bar{t} = \frac{t}{\tau}, \quad \bar{x} = \frac{x}{c\tau}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_r^*}, \quad \bar{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{\varepsilon_r^*} \quad (2.6a)$$

且引进无量纲参数

$$\varepsilon_r^* = \frac{\sigma_r^*}{\rho c^2}, \quad \nu_r^* = c\varepsilon_r^* \quad (2.6b)$$

这时方程组 (2.1a-c) 可以化为:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \bar{t}} + \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{x}} &= \beta \frac{\partial^2 \bar{\nu}}{\partial \bar{t} \partial \bar{x}^2} \\ \frac{\partial \bar{\nu}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{t}} &= 0 \\ \frac{\partial \bar{\varepsilon}}{\partial \bar{t}} - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{t}} &= \frac{\partial \bar{\varepsilon}^p}{\partial \bar{t}} = (1 + M\bar{\varepsilon}^p)(\bar{\sigma} - 1 - H\bar{\varepsilon}^p) \end{aligned} \right\} \quad (2.7a-c)$$

这里, $\beta = \beta \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^2$, $\tau_0 = \frac{a}{c}$ (a 是细杆半径). 因此 β 取决于不同时间参数 τ_0 与 τ 之比. τ_0 是试杆几何尺寸和弹性波速决定的, 而 τ 是材料的特性松弛时间. 为简化起见, 在下面运算中, 所有无量纲量将保持原有符号. 不同材料 β 取不同的值. 为求解 (2.7a-c), 引进初始和边界条件:

当 $t = 0$, $\nu = 0$ 时

$$\sigma - \varepsilon = \begin{cases} 0 & \text{无预加静载} \\ \bar{\sigma}_0 & \text{有预加静载} \end{cases} \quad (2.8a-c)$$

设细长杆的无量纲长度为 l , 则在不计横向运动修正时, 边界条件的一般形式为:

当 $x = 0$ 时,

$$L_1[\sigma] = \left[\alpha_1 \frac{\partial}{\partial t} + \alpha_2 \frac{\partial}{\partial x} + \alpha_3 \right] \sigma = f_1(t) \quad (2.9a)$$

当 $x = l$ 时,

$$L_2[\sigma] = \left[\beta_1 \frac{\partial}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial}{\partial x} + \beta_3 \right] \sigma = f_2(t) \quad (2.9b)$$

其中 L_1 和 L_2 代表线性算子, α_i 或 β_i ($i = 1, 2, 3$) 均为常数, 由表 1 给出. 关于 $x = l$ 的情形是类同的.

表 1 不同 α_i 值对应不同边界条件

边界条件 ($x = 0$)	α_1	α_2	α_3	$t_1(t)$	说 明
已知边界应力	0	0	1	$\neq 0$	$t_1(t)$ 为任意时间函数
已知边界速度	0	1	0	$\neq 0$	$t_1(t)$ 为 $x=0$ 边界的加速度, 如等于相同杆对速
刚性锤头打击	0	1	$-\frac{\rho_1 a^2 c_1 \tau}{M}$	0	M 为锤头质量 τ 为特征松弛时间
弹性杆打击塑性杆	$-\frac{1}{\rho_1 c_1}$	1	0	0	$\rho_1 c_1$ 表示硬杆与塑性杆的弹性声抗比

为了在初、边界条件 (2.8a—c) 和 (2.9a—b) 下求解 (2.7a—c), 通常应用数值方法. 但在用数值方法去拟合实验曲线时, 发现 M 和 H 是两个具有不同物理意义的小参数, M 为位错密度的线性增值系数, H 是位错运动的阻尼系数, 而且它们通常在 0.01—0.1 范围内变化, 如对 25CrMnSi 合金钢, 段祝平等入计算表明^[8], 取 $M = 0.05$, $H = 0.013$ 时, 实验结果和理论有较好的符合. 这就启发我们可用摄动方法求解上述问题.

三、 $\beta = 0$ 时, 入射波问题的摄动解

1. 零次摄动解

利用 (2.7a—c) 的特征方程和弹性前驱波上的守恒条件, 容易得到波头峰值衰减满足的规律^[2],

$$v = \varepsilon = \sigma = 1 + (\sigma_0 - 1)e^{-t/2}, \text{ 当 } x = t \quad (3.1)$$

其中 $\sigma_0 = v_0 = \varepsilon_0 = \sigma(0, 0) = \varepsilon(0, 0) = v(0, 0)$ 表示相应量在 $x = 0, t = 0$ 时的值如图 1.

式 (3.1) 表明, 波头峰值衰减与 M 和 H 无关. 另外, 初、边界条件 (2.8a—c) 和 (2.9a—b) 亦不依赖于 M 和 H . 这就表明, 我们可以用正则摄动方法求解上述问题. 为此假设

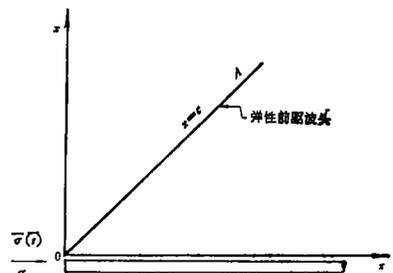


图 1 弹/粘-塑性应力波在 (x, t) 平面中传播

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= \sigma_{00} + M\sigma_{01} + H\sigma_{10} + \dots = \sum_{i,j=0}^{\infty} \sigma_{ij} M^i H^j \\ v &= v_{00} + Mv_{01} + Hv_{10} + \dots = \sum_{i,j=0}^{\infty} v_{ij} M^i H^j \\ \varepsilon &= \varepsilon_{00} + M\varepsilon_{01} + H\varepsilon_{10} + \dots = \sum_{i,j=0}^{\infty} \varepsilon_{ij} M^i H^j \\ \varepsilon^p &= \varepsilon_{00} - \sigma_{00} = \sum_{i,j=0}^{\infty} \varepsilon_{ij}^p M^i H^j \end{aligned} \right\} \quad (3.2a-d)$$

将(3.2a-c)代入(2.7a-c),令 $\beta = 0$,比较小参数 M 和 H 的幂次,可得各次近似解满足的方程.对零次解有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{00}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial v_{00}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial t} &= \sigma_{00} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (3.3a-c)$$

由于边界条件和激波条件都不显含 M 和 H ,则对零次解显然满足(3.1)和(2.9a-b).然后简化(3.3a-c)可得齐次电报方程:

$$\frac{\partial^2 \sigma_{00}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{00}}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial t} = 0 \quad (3.4)$$

利用 Laplace 变换,在(2.9a)和(3.1)下可得到满足(3.4)的零次应力解:

$$\sigma_{00} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \frac{p F_1(p) + (\alpha_2 - \alpha_1)(\sigma_0 - 1) - \alpha_3 e^{-\sqrt{p(p+1)}x} \cdot e^{pt}}{p(\alpha_3 + \alpha_2 p - \alpha_1 \sqrt{p(p+1)})} dp \quad (3.5)$$

其中

$$F_1(p) = \int_0^{\infty} f_1(t) e^{-pt} dt \quad (3.6)$$

积分(3.5)当 $t > x \geq 0$ 时是绝对收敛的.它给出了相当一类广泛问题的解.一般条件下,求积(3.5)是颇复杂的,现讨论三种能获得分析解的特殊情形.

例 1. 恒值边界载荷

如表 1 所示,有 $\sigma_{00}|_{x=0} = \sigma_0^*$,故

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 = 1, \quad F_1(p) = \sigma_0^*/p \quad (3.7)$$

将上式代入(3.5),经过反演运算,得

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &= 1 + \frac{\sigma_0^* - 1}{2\pi} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{p(p+1)}x}}{p} e^{pt} dp \\ &= 1 + (\sigma_0^* - 1) e^{-t/2} \left\{ I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2} \right) + \frac{1}{2} \int_x^t I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{s^2 - x^2} \right) \left[I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{s^2 - s^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{s}{\sqrt{s^2 - s^2}} I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{s^2 - s^2} \right) \right] ds \right\} \quad \text{当 } 0 \leq x \leq t \leq l \end{aligned} \quad (3.8)$$

其中 I_0 和 I_1 分别为零阶和1阶虚宗变量 Bessel 函数.

例 2. 恒速边界条件

这时 $v_{00}|_{x=0} = v_0^*$,按表 1,有

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = \alpha_3 = 0, \quad F_1(p) = 0 \quad (3.9)$$

将上式代入(3.5),可得

$$\begin{aligned} \sigma_{00} &= 1 + \frac{(v_0^* - 1)}{2\pi i} \int_{c_0-i\infty}^{c_0+i\infty} \frac{e^{-\sqrt{p(p+1)}x}}{\sqrt{p(p+1)}} e^{pt} dp \\ &= 1 + (v_0^* - 1) e^{-t/2} I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2} \right) \end{aligned} \quad (3.10)$$

这就是早期 Malvern 给出的解^[2].

例 3. 弹性杆撞击弹/粘-塑性杆

如表 1 所示,有

$$\alpha_1 = -\frac{1}{\rho_1 c_1}, \quad \alpha_2 = 1, \quad \alpha_3 = 0$$

$$f_1(x) = 0 \implies F(p) = 0 \tag{3.11}$$

代入 (3.5) 得

$$\sigma_{00} = 1 + \frac{(1 + 1/\rho_1 c_1)(\sigma_0 - 1)}{2\pi i} \int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{e^{-\sqrt{p(p+1)}x}}{p \left(p + \frac{1}{\rho_1 c_1} \sqrt{p(p+1)} \right)} e^{st} dp$$

$$= \begin{cases} 1 + \frac{1}{2}(\nu_{p0} - 1)e^{-s/2} \left[\left(\frac{t-x}{t+x} \right)^{1/2} I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2} \right) + I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2} \right) \right], & \text{当 } \rho_1 c_1 = 1 \text{ 时} \\ 1 + h_0 e^{-s/2} \left\{ I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{t^2 - x^2} \right) - \frac{1}{\rho_1 c_1} e^{-s_0(t-x)} + \left(\frac{1}{2} - s_0 \right) \int_x^t e^{-s_0(t-s)} \right. \\ \left. \times I_0 \left(\frac{1}{2} \sqrt{s^2 - x^2} \right) ds - \frac{x}{2\rho_1 c_1} \int_x^t e^{-s_0(t-s)} \cdot \frac{I_1 \left(\frac{1}{2} \sqrt{s^2 - x^2} \right)}{\sqrt{s^2 - x^2}} ds \right\}, & \text{当 } \rho_1 c_1 \neq 1 \text{ 时} \end{cases} \tag{3.12a}$$

$$\tag{3.12b}$$

其中小 ν_{p0} 是弹性杆的初速. 且

$$h_0 = \frac{\nu_{p0} - 1 - \frac{1}{\rho_1 c_1}}{1 - \frac{1}{\rho_1 c_1}}$$

和

$$s_0 = \frac{1 + (\rho_1 c_1)^2}{2[(\rho_1 c_1)^2 - 1]}$$

解 (3.9), (3.10) 和 (3.12a—b) 给出了应力的零次近似解, 这就容易得到应变和速度的零次解. 推导从略.

2. 一次摄动解

类似于前面的推导, 可证明应力的一次摄动解 σ_{01} 和 σ_{10} 分别满足下列非齐次电报方程

$$\frac{\partial^2 \sigma_{01}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{01}}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{01}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [(\sigma_{00} - 1)\epsilon_{00}^p] \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{10}}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \sigma_{10}}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_{10}}{\partial t} = 1 - \sigma_{00} \tag{3.14}$$

和零齐次边界条件

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } x = t \text{ 时 } & \sigma_{10} = \sigma_{01} = 0 \\ \text{当 } x = 0 \text{ 时 } & \sigma_{10} = \sigma_{01} = 0 \end{aligned} \right\} \tag{3.15a—b}$$

可以运用 Riemann 函数方法求解上述非齐次方程 (3.13) 在齐次边界条件 (3.15a—b) 下

的解.

定理 若 $f(x, t)$ 在区域 $Q: 0 \leq x \leq t \leq \infty$ 上为连续可积函数, 则非齐次电报方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = -4e^{-t/2} \cdot f(x, t) \quad (3.16)$$

满足齐次边界条件

$$\left. \begin{array}{l} t=0 \quad u=0 \\ x=0 \quad u=0 \end{array} \right\} \quad (3.17a-b)$$

的解 $u(x, t)$ 唯一存在, 即

$$u(x, t) = e^{-t/2} \int_{t-x}^{t+x} \{S(\tau; t, x) - R(\tau; t, x)S_0(\tau; t, x)\} d\tau \quad (3.18)$$

其中 I_0 是零阶 Bessel 函数, 且有

$$S(\tau; t, x) = \int_{t-x}^{\tau} I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\tau-t-x)(\phi-t+x)}\right) \tilde{f}(\phi, \tau) d\phi,$$

$$S_0(\tau; t, x) = \int_0^{\tau} I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\tau-t-x)\phi}\right) \tilde{f}(\phi, \tau) d\phi,$$

$$\tilde{f}(\phi, \tau) = f\left(\frac{\phi-\tau}{2}, \frac{\phi+\tau}{2}\right) \text{ 和 } R(\tau; t, x) = \frac{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\tau-t+x)(\tau-t-x)}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau-t-x)}\right)}$$

证: 作变换

$$\xi = t - x, \quad \eta = t + x \implies x = \frac{1}{2}(\eta - \xi), \quad t = \frac{1}{2}(\eta + \xi) \quad (3.19a-b)$$

$$u(x, t) = e^{-t/2} \omega(\xi, \eta) \quad (3.20)$$

将其代入 (3.16) 和 (3.17a-b) 得函数 ω 满足

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial \xi \partial \eta} - \left(\frac{1}{4}\right)^2 \omega(\xi, \eta) = \tilde{f}(\xi, \eta) \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{array}{l} \xi = 0, \quad \omega = 0 \\ \xi = \eta, \quad \omega = 0 \end{array} \right\} \quad (3.22a-b)$$

上述边值问题容易通过 Riemann 函数方法求解^[10] (计算略),

$$\omega(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \left\{ S(\tau; \xi, \eta) - \frac{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{(\tau-\xi)(\tau-\eta)}\right)}{I_0\left(\frac{1}{2}\sqrt{\tau(\tau-\eta)}\right)} S(\tau; 0, \eta) \right\} d\tau \quad (3.23)$$

将该解代入 (3.20), 可得 (3.18). 将在 (3.13) 和 (3.14) 相应的非齐次项代入 (3.18) 就可得到相应的一次摄动解. 且可以类似证明, 任意高次近似解都可以通过 (3.18) 以逐次叠代的方式给出. 下面将给出具体算例.

四、当 $\beta \neq 0$ 时, 问题的解

1. 线性率型介质的色散关系

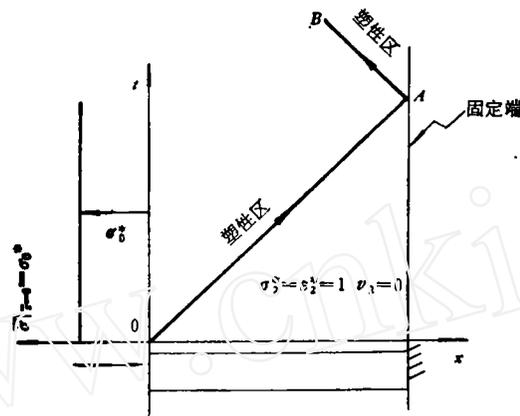


图 2 塑性波在预压杆中的传播

在 (2.7a-c) 中, 当 $\beta \approx 0$ 时, 问题求解颇为复杂. 由该方程组决定的弹/粘-塑性波, 既有耗散效应, 又有色散效应. 为了说明这一点, 先讨论一下 Malvern 介质的色散关系, 这时取 $M = 0$.

设一预压拉杆, 一端固定, 如图 2 所示. 在静载下, 材料刚达到屈服, 然后在边界上给一突加载荷. 假定 (2.7a-c) 的解可表示成

$$\left. \begin{aligned} \sigma &= 1 + \sigma_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ \varepsilon &= 1 + \varepsilon_0 e^{i(kx - \omega t)} \\ v &= v_0 e^{i(kx - \omega t)} \end{aligned} \right\} \quad (4.1a-c)$$

其中 k 是波数, ω 是频率, σ_0 , ε_0 和 v_0 是波幅, 将 (4.1a-c) 代入 (2.7a-c), 设波幅不全恒等于零, 则

$$k = k_1(\omega) + ik_2(\omega) \quad (4.2)$$

且有

$$\left. \begin{aligned} \frac{k_1(\omega)}{\omega} &= \frac{1}{2} [(A^2(\omega) + B^2(\omega))^{\frac{1}{2}} + A(\omega)]^{\frac{1}{2}} \\ \frac{k_2(\omega)}{\omega} &= \frac{1}{2} \{ [A^2(\omega) + B^2(\omega)]^{\frac{1}{2}} - A(\omega) \}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \right\} \quad (4.3a-b)$$

其中

$$A(\omega) = \frac{[1 - (1 + H)^2 \beta^2] \omega^2 - \beta \omega^4 + H(1 + H)}{[H - (1 + H)\beta \omega^2]^2 + \omega^2(1 - \beta \omega^2)^2}$$

$$B(\omega) = \frac{\omega}{[H - (1 + H)\beta \omega^2]^2 + \omega^2(1 - \beta \omega^2)^2}$$

其中 $k_2 = k_2(\omega)$ 表示衰减系数. 图 3, 图 4 给出了当 $H = 0.10$ 时, 不同 β 值时, $k_1(\omega)$ 和 $k_2(\omega)$ 随 ω 的变化规律. 从曲线中可知, 不计侧向惯性时衰减指数 k_2 接近 $1/2$. 而且当 $\beta \approx 0$ 时, k_1 和 k_2 存在一个极大值. 随着 β 的增大, k_1 和 k_2 的峰值下降. 因此, 当材料的特征松弛时间大于材料的几何尺寸决定的特征时间时, 材料的衰减指数是减少的.

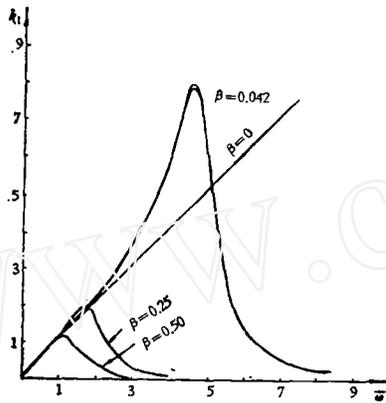


图3 Malvern 介质的典型频散曲线
其中 $H = 0.10$

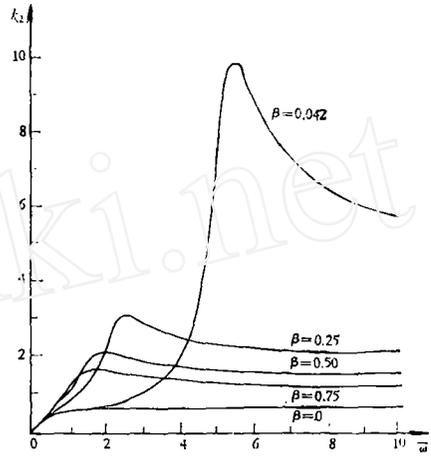


图4 Malvern 材料中, 衰减指数与频率关系曲线, 其中 $H = 0.10$

2. 上述问题的一个级数解

为了研究 β 对解的影响, 考虑如图 2 所示的问题, 设突加载荷 σ_0^* 保持不变, 显然零次摄动解 $v_{00}, \sigma_{00}, \varepsilon_{00}$ 满足

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_{00}}{\partial t} + \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial x} &= \beta \frac{\partial^2 v_{00}}{\partial t \partial x^2} \\ \frac{\partial v_{00}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial t} &= 0 \\ \frac{\partial \varepsilon_{00}}{\partial t} - \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial t} &= \sigma_{00} - 1 \end{aligned} \right\} \quad (4.4a-c)$$

从上述方程消去 ε_{00} 和 v_{00} , 可得线性齐次方程

$$L_\beta[\sigma_{00}] = 0 \quad (4.5)$$

其中 L_β 为线性算子

$$L_\beta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial}{\partial t} + \beta \left(1 + \frac{\partial}{\partial x} \right) \frac{\partial^2}{\partial t \partial x}$$

应力 σ_{00} 满足的边界, 初始条件为:

$$\left. \begin{aligned} \text{当 } t=0, \quad \sigma_{00} &= 1, \quad \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial t} = 0 \\ \text{当 } x=0, \quad \sigma_{00} &= 1 + \sigma_0^* \\ \text{当 } x=l, \quad v_{00} &= 0 \Rightarrow \frac{\partial \sigma_{00}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.6a-c)$$

设

$$\sigma_{00}(x, t) = 1 + \sigma_0^* \left\{ 1 + \frac{1}{l} e^{-t/l} \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \cdot B_n(x) \right\} \quad (4.7)$$

将 (4.7) 代入 (4.5), 利用分离变量法可求得 $A_n(t)$ 和 $B_n(x)$,

$$A_n(t) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1}{\sqrt{-\eta_n}} \sin \sqrt{-\eta_n} t + 2 \cos \sqrt{-\eta_n} t \right) & 0 \leq n \leq N^* - 1 \\ \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{1 + 2\sqrt{\eta_n}}{2\sqrt{\eta_n}} e^{\sqrt{\eta_n} t} + \frac{2\sqrt{\eta_n} - 1}{2\sqrt{\eta_n}} e^{-\sqrt{\eta_n} t} \right) & n \geq N^* \end{cases} \quad (4.8a-b)$$

$$B_n(x) = \sin \lambda_n x \quad (4.8c)$$

其中

$$\lambda_n = \frac{\pi}{l} (1/2 + n), \quad \eta_n = \frac{\beta \lambda_n^2 - 3}{4(1 + \beta \lambda_n^2)}$$

且

$$N^* = \left(\frac{l}{\pi} \sqrt{\frac{3}{\beta}} - \frac{1}{2} \right)$$

表示括号内数的整数部分

当 $\beta = 0$ 时, 解 (4.7) 脱化为:

$$\sigma_{00} = 1 + \sigma_0^* \left[1 - \frac{e^{-t/2}}{l} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} \left(\frac{2}{3} \sin \frac{3}{2} t + 2 \cos \frac{3}{2} t \right) \sin \lambda_n x \right] \quad (4.9)$$

将 σ_{00} 代入 (4.4c), 可得到应变解

$$\begin{aligned} \varepsilon_{00} = \sigma_{00} + \int_0^t (\sigma_{00} - 1) dt = 1 + \sigma_0^* \left\{ (I(x) + t) - \frac{1}{l} \left[\sum_{n=0}^{N^*-1} \left(\frac{1 + 3\eta_n}{\lambda_n \sqrt{-\eta_n} (\eta_n + \frac{1}{4})} \right. \right. \right. \\ \left. \left. \times \sin \sqrt{-\eta_n} t \cdot e^{-t/2} + \frac{2(\eta_n - \frac{1}{4})(\cos \sqrt{-\eta_n} t \cdot e^{-t/2} - 1)}{\lambda_n (\eta_n + \frac{1}{4})} \right) \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=N^*}^{\infty} \left(\frac{(\frac{1}{2} + \eta_n)^2}{\sqrt{\eta_n} - \frac{1}{2}} (e^{(\sqrt{-\eta_n} - \frac{1}{2})t} - 1) + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{\eta_n}}{\sqrt{\eta_n} + \frac{1}{2}} (e^{-(\frac{1}{2} + \sqrt{\eta_n})t} - 1) \right) \frac{\sin \lambda_n x}{\lambda_n \sqrt{\eta_n}} \right] \right\} \end{aligned} \quad (4.10)$$

其中 $I(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x > 0 \end{cases}$

3. 当 $\beta \approx 0$ 时, 求一次摄动解的近似方法

类似于 (3.17) 与 (3.18), 当 $\beta \approx 0$ 时, 一次摄动解满足

$$L_\beta[\sigma_{01}] = \left(1 - \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) (1 - \sigma_{00}) \quad (4.11)$$

$$L_\beta[\sigma_{01}] = \left(1 - \beta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \left[\frac{\partial}{\partial t} (\sigma_{00} - 1) \varepsilon_{00}^0 \right] \quad (4.12)$$

σ_{10} 和 σ_{01} 同样满足齐次初始和边界条件

$$\left. \begin{aligned} t=0, \quad \sigma_{01} &= \frac{\partial \sigma_{01}}{\partial t} = \sigma_{10} = \frac{\partial \sigma_{10}}{\partial t} = 0 \\ x=0, \quad \sigma_{10} &= \sigma_{01} = 0 \\ x=l, \quad \frac{\partial \sigma_{10}}{\partial x} &= \frac{\partial \sigma_{01}}{\partial x} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.13a-c)$$

虽然可用级数方法求解上述问题,但运算是十分复杂的.这里给出一个近似方法.一般讲, β 也是一个小量,它对解的影响主要表现在波头 $\xi = t - x = 0$ 附近.通过特征线方法已证明,当 $\beta = 0$ 时,波头附近的解与 M 和 H 无关.因此,在求一次摄动解时,可将算子 L_β 简化为电报方程的算子,故仍可采用 Riemann 函数方法.把式(4.7)和(4.10)代入(3.22),便可近似求出一次摄动解.

五、摄动解与差分解比较

为了说明一次摄动解的精度,这里给出了一个具体的算例.在文献[9]中,给出了加变阶因子的差分格式寻求(2.7a-c)在弹性杆打击塑性杆的问题的数值解,计算方法可达到二阶精度.我们采用相类似的差分格式计算恒值应力条件下 $\sigma|_{x=0} = 2$ 的数值解,并将它和一次摄动解加以比较.略去冗长的计算过程,这里我们仅给出数值结果.计算是在中国科学院数学所 FELIXC-512 机上执行的,计算中取 $M = 0.05$, $H = 0.013$, 而且设 $\beta = 0$, 图5给出了三个不同位置 $x = 0$, $x = 1.5$ 和 $x = 5$ 时,应变波形的比较.

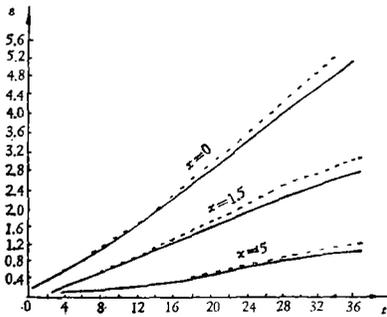


图5 当 $\sigma|_{x=0} = 2$ 时不同位置上应变波形的比较

— 差分数值解
- - 一次摄动解
 $H = 0.013 \quad M = 0.05 \quad \beta = 0$

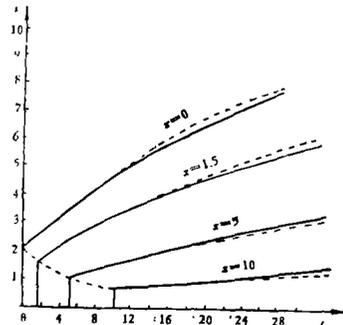


图6 当 $\sigma|_{x=0} = 2$ 时不同位置上速度波形比较

— 差分数值解
- - 一次摄动解
 $H = 0.013 \quad M = 0.05 \quad \beta = 0$

图6给出四个不同位置 $x = 0$, $x = 1.5$, $x = 5$ 和 $x = 10$ 时,速度波形的比较.图7给出了五个不同时刻应力波形的比较.从这些图中,可以看出,在波头上,当 $t < 10$ 时,差分解与摄动解是重叠的.当 $30 > t > 10$ 时,摄动解与差分解的相对误差不超过5%左右.尤其,当已知应力边界条件时,应力的摄动解和差分解吻合的十分好.对于其他边界条件,如等速边界条件,我们进行了同样计算,得到的结论是相同的,这里不再重复.

值得指出,由于零次摄动解与 σ_{01} 和 σ_{10} 并不依赖于物理参数 M 和 H ,从而这里分析解有普遍的意义,尤其是用该解去拟合实验结果,确定材料的本构常数.迄今为止,在

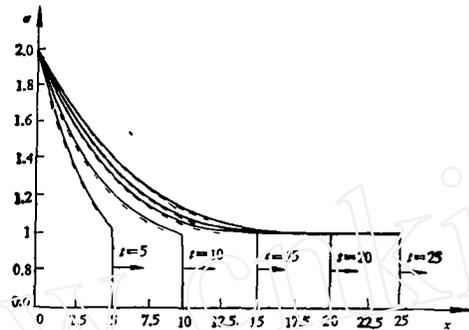


图 7 应力的差分解与摄动解在不同时刻应力波形的比较

— 差分数值解
 · 一次摄动解
 $H = 0.013 \quad M = 0.05 \quad \beta = 0$

塑性波动力学的研究中尚没有利用摄动方法去寻求问题解答的报道。本文的结果提供了一种途径,说明摄动方法在研究弹/粘-塑性波动问题中是一种十分有效的工具。

参 考 文 献

- [1] 段祝平等, 塑性波理论及其对研究 25CrMnSi 合金钢动力学性能的应用, 1980 年中国科学院力学研究所报告。
- [2] Malvern, E. L., *J. Appl. Mech.*, 41 (1951), 137.
- [3] Gilman, J. J., Dislocation dynamics and the response of materials to impact, *Appl. Mech. Rev.*, 21 (1968), 767.
- [4] Greenman, W. T., Vreeland, T. Jr., Dislocation mobility in copper, *J. Mech. Phys. Solids*, 22 (1974), 555.
- [5] Herrmann, W. et al., Attenuation of Elastic-Plastic Stress waves, after "Shock Waves and the Mechanical Properties of Solids", ed. by Burke, J. J. and Volker, Weiss (1971).
- [6] Seeger, *Phil. Mag.*, 49 (1955), 194.
- [7] Kawata, K. et al., High Velocity Deformation of Solids, IUTAM Symposium Tokyo/Japan, ed. by K. Kawata and J. Shioiri.
- [8] Clifton, R. C., On the Analysis of Elastic/Visco-Plastic Waves of Finite Uniaxial Strain, ed. by J. J. Burke et al. (1971).
- [9] 段祝平、孙琦清、王雁尔, 高应变率下金属的动力学性能的实验与理论研究——一维粘塑性波的数值方法, *力学进展*, 10 (1980), 76.
- [10] 谷超豪等, 数学物理方法 (第二版), 上海科技出版社 (1961).

ON THE APPLICATION OF PERTURBATION METHOD TO THE STUDY OF ELASTIC/VISCO-PLASTIC WAVES

Duan Zhuping

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Wang Lier

(*Institute of Mathematics, Academia Sinica*)

Abstract

The purpose of this paper is to develop a regular perturbation method for solving the problem of one dimensional elastic/visco-plastic wave propagation in materials of Malvern's type. Firstly, non-dimensionalized linear multiplication coefficient and damping coefficient of dislocation are introduced as two independent small parameters into the perturbation expansion of solution. Thus, the problem of solving the non-linear wave equations is transformed into finding the solution of homogeneous/nonhomogeneous telegraph equations. Secondly, an analytical zeroth order approximate solution can be obtained by means of Laplace transform or series expansion technique. Then the first order and higher order approximate solutions are derived from the zeroth order approximate solution based on the method of finding the Riemann function.

Through the comparison of the first order approximate solution with the numerical solution of the corresponding non-linear governing equations under the boundary condition of constant stress $\sigma|_{x=0} = \text{const}$, it is seen that the first order approximate solution is quite good. Lastly, it appears that, from the results given in this paper, the perturbation method is quite powerful in the study of elastic/visco-plastic wave propagation theory.