

介绍低雷诺数流体动力强干扰理论的一种新方法——多极子法

严宗毅

(中国科学院力学研究所)

一、引言

在化工、大气物理,特别是生物力学等领域中,时常需要讨论低雷诺数下在流体中悬浮粒子的运动和扩散.低雷诺数流动的一个显著特点是流场中的扰动衰减慢,因而传播得远,所以一般不能忽略其他粒子和边界的流体动力干扰.

低雷诺数下的流动可用 Stokes 方程描述:

$$\mu \nabla^2 \mathbf{v} = \nabla p \quad \nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

式中 μ , \mathbf{v} 和 p 分别是流体的粘度、速度向量和压力.当存在多个粒子或其他边界时,求(1)式的精确解是十分困难的.只有极少数特殊情形例如物形和边界刚好都是某些正交坐标系的坐标曲面时是例外.

至于其他情形,以前曾采用两种弱干扰理论——反射法和点力法进行计算^[1].反射法是一种逐次迭代法,每次只轮流地满足部分边界条件.当粒子间距较大时,一两次迭代就能给出较好的结果.但对于浓粒子系或离边界较近时,收敛性迅速变差.点力法是先用一个或一些点力代替粒子产生的扰动,再令物面速度在某种平均意义上为零来满足无滑移条件.点力法没有计及方位的变化,当粒子间距离变小时,这一缺陷更加严重,点力法不能用于有界流动.

也有人想用有限差分法求(1)式的数值解.但由于低雷诺数下扰动衰减太慢,即使用很大的有限域来代替无界流动仍会引起相当大的误差.为了考虑流体动力强干扰,科学工作者致力于寻找一种新方法,希望它满足无滑移条件比点力法精确,而收敛性比反射法好.1958年 Haberman 和 Sayre^[15] 对于球在圆管中的轴对称流动得到了级数截断解.随后,Skalak 等人把无限多个等距分布的球或迴转椭球在圆管中的轴对称流动分解成单个周期(每个只含一个粒子),得到了类似的解(见文献[17]的介绍)这些都是强干扰理论的先驱.可是有限多个(一个以上)粒子的情形由于没有周期性,就复杂得多了.美国纽约市立大学的 Weinbaum 和 Pfeffer 两位教授以及他们的学生,从1971年开始发展了一套行之有效的办法,成功地解决了一系列复杂的强干扰问题^[2-12].这就是本文要介绍的“多极子法”(Multipole Technique).

二、轴对称无界绕流

为了说明什么是多极子法,先来介绍一个较简单的例子—— N 个球的轴对称无界绕流^[2](图1).对于轴对称流动,存在 Stokes 流函数 ϕ :

$$\left. \begin{aligned} v_R &= -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi}{\partial z} \\ v_z &= \frac{1}{k} \frac{\partial \phi}{\partial R} \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

式中 (R, φ, z) 是圆柱坐标系. 于是 (1) 式变为

$$D^2(D^2\psi) = 0, \quad D^2 = \frac{\partial^2}{\partial R^2} - \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (3)$$

由于方程的线性, ψ 可表示为无穷远来流 ψ_∞ 和球扰动 ψ_s 的迭加

$$\psi = \psi_\infty + \psi_s \quad (4)$$

ψ_s 又可表示成以每一球心为原点的球坐标系 (r_j, θ_j, ϕ_j) 下可分离解的迭加^[2]

$$\psi_s = \sum_{j=1}^N \sum_{n=2}^{\infty} (B_{nj} r_j^{-n+1} + D_{nj} r_j^{-n+3}) I_n(\cos \theta_j) \quad (5)$$

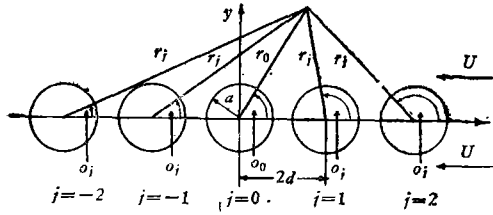


图1 有限多个球的轴对称无界绕流

式中 I_n 是 n 阶 $-1/2$ 度的第一类 Gegenbauer 函数; 它与 Legendre 多项式 P_n 的关系是:

$$I_n(\zeta) = \frac{P_{n-1}(\zeta) - P_n(\zeta)}{2n-1} \quad (n \geq 2) \quad (6)$$

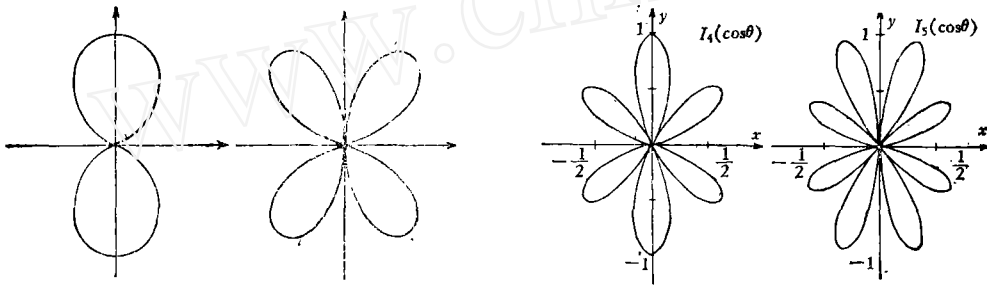


图2 第一类 Gegenbauer 函数的图形

从图2可以看出, $I_n(\cos \theta)$ 表示有 $(2n-2)$ 个分叶的对称于 x 轴的扰动; 因此它和点力不同, 经过迭加之后可以充分表示扰动依赖于方位的变化. 由于 I_2, I_3 的图形类似于偶极子、四极子, 所以称 (5) 式内层级数中的每一项为“多极子”.

和反射法不同, 多极子法不是轮流满足不同球面上的条件, 而是采用配位法, 在每一球面上各选定 M 个离散的点, 让截断至 $N \times M$ 项的级数 (5) 在所有 $N \times M$ 个点上同时满足无滑移条件. 由于每点有 v_R 和 v_z 两个条件, 所以共得 $2 \times N \times M$ 个线性方程, 从中可以解出 $2 \times N \times M$ 个未知数 B_{nj} 和 D_{nj} , 代入 (5) 和 (4) 式, 即得欲求的解. 当边界点选在 $\theta_j = 0, \pi/2, \pi$ 时, 会出现奇异矩阵; 解决的办法是改用一对相差 1° 的点来代替该点.

表1 两相等球的轴对称均匀绕流解

| 间距 d/a | 点数 M | λ (多极子法) | λ (精确解 ^[16]) |
|----------|--------|------------------|----------------------------------|
| 1.0 | 1 | 0.66152 | 0.64515 |
| | 3 | 0.64411 | |
| | 9 | 0.64515 | |
| 2.0 | 3 | 0.74244 | 0.74226 |
| | 5 | 0.74226 | |
| 4.0 | 3 | 0.84414 | 0.84412 |
| | 5 | 0.84412 | |
| 8.0 | 3 | 0.91454 | 0.91454 |

力和力矩的表达式简单是多极子法的一个优点,例如,第 j 个球的阻力是

$$F_j = 4\pi\mu D_{2j} \quad (7)$$

多极子法在本质上是一种精确解法. 因为每一个多极子都是严格满足方程 (3) 的;而且,只要截断的级数保留足够多的项,它可以达到任意的精度. 事实上, M 并不需要取得很大. 从表 1 可以看出, $N = 2$ 时,多极子法的结果迅速收敛于 Stimson 和 Jeffery 采用双球极坐标系求得的精确解^[16]. 表中 λ 叫阻力修正因子,其定义为该球的阻力与孤立球的 Stokes 阻力之比

$$F_j = 6\pi\mu U a \lambda_j \quad (8)$$

由表 1 看出,甚至对于两球相接触这一最不利的情况 ($d/a = 1.0$),只要 $M = 3$ 就可以使误差小于千分之一,而当 $M = 9$ 时可以精确到 4 位、甚至五位有效数字(见表 1). 对于间距较大的情形,所需 M 就更小了.

多极子法的另一个特点是计算速度快. Gluckman 等^[2]算了 $N = 101$ 的球链,取 $M = 1$,在 IBM360-65 机上只需 10 秒钟.

球链的计算得出了一些有意义的结果. 从图 3 可以看出:同一球链(实线)中内球的阻力总比两边的低;从边上算起有同一序号的球(虚线)的阻力随球链变长而降低;即使对于很长的球链,边缘效应也影响很大(注意 $N = 101$ 的情形;如果 $N \rightarrow \infty$,应该有 $\lambda = 0$).

多极子法也能处理多个长迴转椭球或扁迴转椭球的轴对称绕流^[2]. 至于任意形状的凸迴转体,可以用零厚度扁迴转椭球坐标系下的基本解沿表面分布积分来表示^[9].

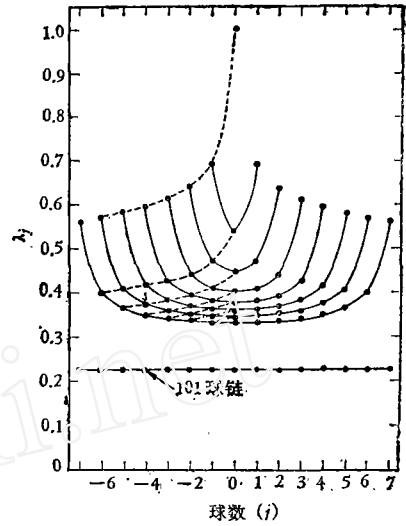


图 3 $d/a = 2$ 时,不同长度球链中各球的阻力修正因子 λ_j

三、轴对称有界绕流

当流场中存在无穷边界时,在这些边界上是无法应用配位法的. 当边界和某一正交坐标面一致时,所对应的基本解往往具有某种积分变换的形式. 能否用解析方式实现无滑移条件乃是多极子法能否成功运用的关键.

作为例子,让我们考虑圆管轴上有限个球的绕流(图 4)^[3]. 这时 (3) 式的解应写作

$$\psi = \psi_p + \psi_s + \psi_w \quad (9)$$

其中, ψ_s 仍由 (5) 式给出,表示球的扰动, ψ_p

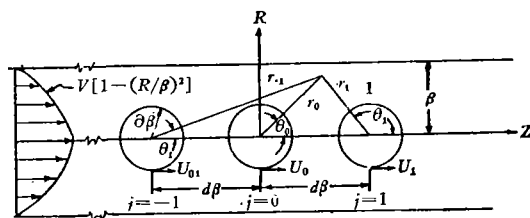


图 4 圆管轴上有限个球的绕流

表示无穷远处的 Poiseuille 流

$$\psi_p = V\beta^2 \left[\frac{1}{2} \left(\frac{R}{\beta} \right)^2 - \frac{1}{4} \left(\frac{R}{\beta} \right)^4 \right] \quad (10)$$

而 ψ_w 表示圆管壁的扰动,可用 Fourier 积分表示为

$$\psi_w = \int_0^\infty [A(t)R I_1(Rt) + C(t)R^2 I_0(Rt)] \cos(zt) dt \quad (11)$$

式中 I_0 和 I_1 是修正的 Bessel 函数. 下一步就得决定未知函数 $A(t)$ 和 $C(t)$, 使得不管 ψ_s 中的 B_{nj} 和 D_{nj} 取任何值,圆管壁 ($R = \beta$) 上的无滑移条件恒成立

$$\begin{aligned}
& \left. \begin{aligned}
& \int_0^\infty \{A(t)tI_0(\beta t) + C(t)[\beta tI_1(\beta t) + 2I_0(\beta t)]\} \cos(zt) dt \\
& = - \sum_{j=1}^N \sum_{n=2}^\infty [B_{nj}F_n^{(1)}(z_j) + D_{nj}F_n^{(2)}(z_j)] \\
& \int_0^\infty \{A(t)\beta I_1(\beta t) + C(t)\beta^2 I_0(\beta t)\} \cos(zt) dt \\
& = - \sum_{j=1}^N \sum_{n=2}^\infty [B_{nj}F_n^{(3)}(z_j) + D_{nj}F_n^{(4)}(z_j)]
\end{aligned} \right\} \quad (12)
\end{aligned}$$

式中 $z_j = z - j\beta$, $F_n^{(i)}$ 是 Legendre 函数的组合。

(12) 式是一个积分方程。不过,它的左端项恰好是 Fourier 余弦积分,因此很容易解析地反演,把 $A(t)$ 和 $C(t)$ 表示成 B_{nj} 和 D_{nj} 的线性函数,从而把 (9) 式化为类似于 (4) 式的形式。然后就可以用配位法满足球面无滑移条件,并确定 B_{nj} 和 D_{nj} 了。

计算结果表明,阻力修正因子 λ_j 随球链长度和球位置的变化很类似图 3 无界流的情形,只是由于管壁的干扰使得 λ_j 显著加大,在球与管径之比 α 较大时尤其明显。Leichtberg 等^[22]还发现,对于浮力中性的球链而言,中间的球速度较慢而两边的较快,因此在流动过程中后一半的球会逐渐聚集在一起,而前一半则逐渐分开。他们认为,这种流体动力干扰是促使红细胞聚集成缢线状簇的远程推动力。

最近, Ganatos 等^[6]应用多极子法,得到了单个球在两平行平面间做垂直运动的解;并对于只有一个平面边界的极限情形,与反射法以及采用双球极坐标系的精确解做了比较。他们发现,当球与平面间距等于球半径时,反射法的误差即已大到 40%,而多极子解则直到间距只有 0.1 倍球半径时始终能与精确解吻合。

四、球之间的非定常干扰

从前两节已经知道,由于相互间的流体动力干扰,球链中各球所受的阻力和运动速度各不相同,因而球链中各球的相对位置随时间而变,从本质上说构成一个非定常问题。

第 i 个球的无量纲运动方程可以写为^[4]

$$\text{Re}_\infty \left(\bar{\rho} + \frac{1}{2} \right) \frac{d\tilde{U}_i}{d\tilde{t}} = 9(1 - \tilde{U}_i \lambda_i) - \frac{9\text{Re}_\infty}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\tilde{t}} \frac{d\tilde{U}_i}{d\tilde{\tau}} \frac{d\tilde{\tau}}{\sqrt{\tilde{t} - \tilde{\tau}}} \quad (13)$$

式中 \tilde{U}_i 和 $\bar{\rho}$ 分别是球的无量纲速度和密度, \tilde{t} 是无量纲时间, Re_∞ 是雷诺数。最后一项叫 Basset 力,反映加速度史的影响。左方的系数 1/2 是视质量。阻力修正因子 λ_i 可在准定常假设下用多极子法对每一瞬时算出。Leichtberg 等^[4]跟踪了 3 至 10 个球的非定常运动,一直到 10^3 倍球直径的距离。对于三个球的情形,当要求 λ_i 的误差小于千分之一时,计算了 5000 个准定常态 ($M = 4$),在 IBM370/168 机上只花了约 10 分钟。正是由于多极子法有计算迅速的优点,才使得研究非定常态强干扰成为可能。他们的计算结果与实验测量符合得很好,并且表明在有重力的低雷诺数流动中,当粒子相对位置由于流体动力干扰而缓慢变化时,只有 Basset 力才是重要的非定常力,视质量和粒子的加速度都可以忽略不计。

五、三维流体动力干扰

对于三维情形,不能象轴对称情形那样引入流函数。这时 (1) 式的解可以写成^[5]

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_\infty + \mathbf{v}_w + \mathbf{v}_s \quad (14)$$

即无穷远处流动、边界干扰与粒子扰动的迭加。 v_w 一般用某种积分变换来表示,而 N 个球形粒子的扰动可表示成^[1]

$$v_i = \sum_{j=1}^N \sum_{n=1}^{\infty} [\nabla x r_j X_{-(n+1)}(r_j, \theta_j, \phi_j) + \nabla \Phi_{-(n+1)}(r_j, \theta_j, \phi_j) - \frac{(n-2)}{\mu \cdot 2n(2n-1)} r_j^2 \nabla P_{-(n+1)}(r_j, \theta_j, \phi_j) + \frac{(n+1)}{\mu n(2n-1)} r_j P_{-(n+1)}(r_j, \theta_j, \phi_j)] \quad (15)$$

而 X, Φ, P 是 Lamb 的球体调和函数^[13]

$$\begin{bmatrix} X_{-(n+1)} \\ \Phi_{-(n+1)} \\ P_{-(n+1)} \end{bmatrix} = \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta_j) \frac{1}{r_j^{n+1}} \left\{ \begin{bmatrix} A_{jmn} \\ C_{jmn} \\ E_{jmn} \end{bmatrix} \cos m\phi_j + \begin{bmatrix} B_{jmn} \\ D_{jmn} \\ F_{jmn} \end{bmatrix} \sin m\phi_j \right\} \quad (16)$$

式中 P_n^m 是连带 Legendre 函数, A_{jmn} 至 F_{jmn} 是待定常数。特别当问题有对称平面 $\phi_j = 0$ 时, $A_{jmn} = D_{jmn} = F_{jmn} = 0$ 。

Ganatos 等先后采用多极子法研究了同一竖直平面内多个球的沉淀问题^[5]和一球位于两平行平面壁之间的平行绕流问题^[2]。三维问题应用配位法的一大困难是边界点的选法对于来流的方向相当敏感。此外,计算时间也稍长。解析地满足无穷边界上的无滑移条件对于成功地运用多极子法具有决定性意义。

六、复杂边界的情形

对于通过有限长孔的流动(包括出入口效应),粒子进入孔之前的流体动力干扰等复杂边界问题,都是长期没有解决的低雷诺数经典问题(图 5)。问题的困难在于:不可能写出一个单一的解表示壁对于整个流场的扰动。因此,得把流场划分为两个区域,在每区中分别写出流函数表达式。在两区的交界面上,假设径向和轴向速度剖面分别等于待定函数 $f(R)$ 和 $g(R)$,让两区的解在运动学上匹配。然后再让界面两侧的压力和切应力连续,从而使两区的解在动力学上匹配,由此决定 $f(R)$ 和 $g(R)$ 。Dagan^[8] 借助于上述办法,得到了这两个问题的多极子解。

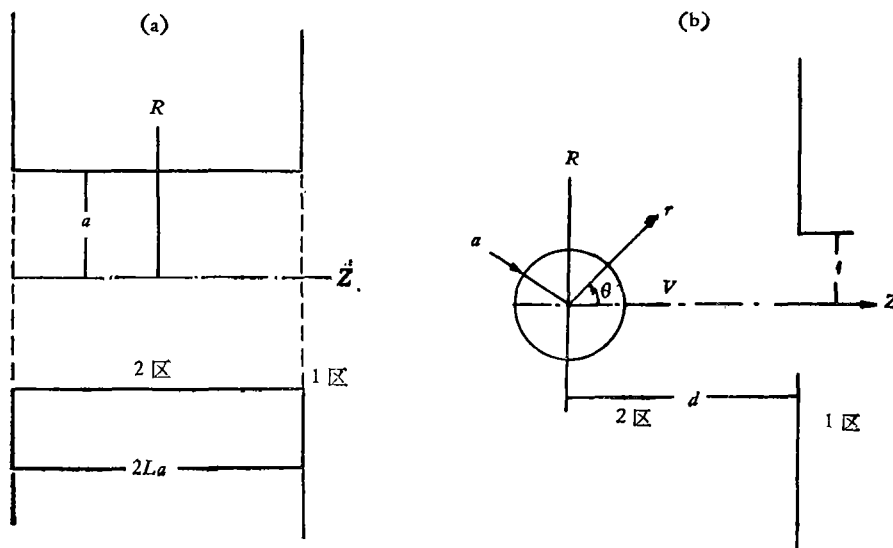


图 5

(a) 有限长孔中的流动 (b) 位于孔中心线上球的绕流

Dagan^[8] 还讨论了球不在孔中心线上的三维问题,和以前所用的精确多极子法不同,这次做了

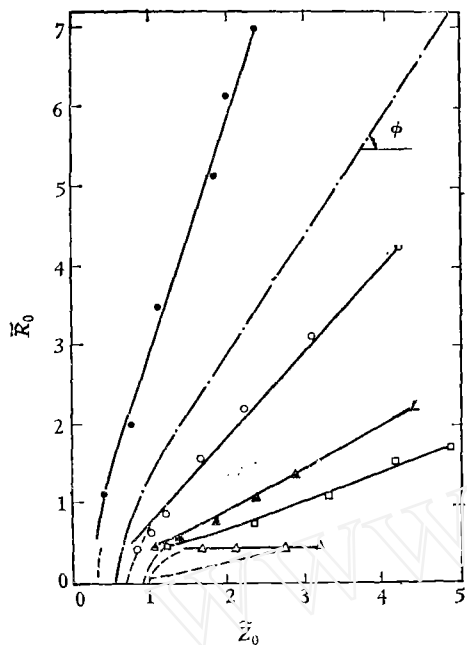


图6 Dagan^[8] 理论与实验所得球轨道的比较(球半径=0.5英寸,孔半径=1.125英寸)

——理论轨道
 ----未扰动的流线
 -·-·-忽略干扰时的临界轨道

了附加的简化假设,得到的结果在离孔不太近的地方近似成立.在此以前,一些作者在计算气溶胶入孔问题时,先忽略粒子的存在得到纯流体入孔的解,然后假设粒子速度与未扰动流体相等,并根据这个解计算粒子的阻力和轨道,也就是完全没有考虑粒子与壁面间的流体动力干扰.他们预言存在一条临界轨道,在临界轨道以外直到壁面之间的粒子是不可能入孔的,Dagan^[8]的结果指出:临界轨道的概念在零雷诺数下是不正确的;由于粒子和壁面的干扰,接近壁面处的粒子偏离未扰动流线,几乎平行壁面地滚动,因此处于任何初始位置的粒子最终都可以流入孔内.这个结论得到了实验的证实(图6).他们的计算还说明了为什么悬浮液流入孔时粒子浓度会降低,从而解释了微循环血流中著名的 Fåhræus 效应^[14,17].

七、应用与展望

如上所述,近十年来用多极子法解决了一系列流体动力强干扰问题,这些问题有其广泛的实际背景和应用.下面我们再举两个涉及细胞一级生物传质问题的例子.

生理实验发现,大于 40 Å 的大分子穿越内皮细胞传输的主要媒介是细胞内的囊泡.为了定量地阐明这一过程的机理,Weinbaum 和 Chien^[10] 提出一个数学模型,认为囊泡象一些球在两个平行平面之间垂直方向扩散(图7).由于球和壁面的流体动力干扰,扩散系数 D 随距离 x 而变

$$D(x) = \frac{KT}{6\pi\mu a\lambda(x)} = \frac{D_0}{\lambda(x)} \quad (17)$$

式中 D_0 是单位粒子在无界介质中的扩散系数(Stokes-Einstein 公式)^[14]; 而 $\lambda(x)$ 就是阻力修正因子,可以用多极子法算出.于是可以进一步算出囊泡的浓度剖面和内皮的通透能力.

另一方面,小的溶质分子传输的主要途径是细胞间隙,它的数学模型可以简化为平行平板之间绕球的平行流动^[7,11]. 在广泛应用的 Kedem-Katchalsky 膜方程中有三个唯象学系数 ω , L_p 和 σ :

$$\left. \begin{aligned} j_s &= \omega RT\Delta C + (1 - \sigma)\bar{C}j_v \\ j_v &= L_p(\Delta P - \sigma RT\Delta C) \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

其中 j_s 和 j_v 分别为溶质流量和总体积流量, R 为气体常数, T 是温度, ΔP 是跨膜压力差, ΔC 是浓度差, \bar{C} 是膜中某一平均浓度. ω 称为扩散通透能力, L_p 是水力学通透能力, σ 叫做反射系数. 我们知道,对于浮力中性的溶质分子,流体动力应与化学势梯度平衡,而力矩应为零. 只要用多极子法求出溶质分子受到的流体动力,就不难算出它们的运动速度和流量,从而得到 ω , L_p 和

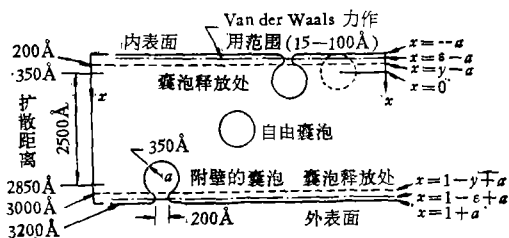


图7 囊泡在平行的外胞浆膜之间穿越内皮细胞的运动

σ 的表达式. Ganatos等^[11]完成了这一分析.

目前多极子法应用范围正在不断扩大^[2-12]. 正在进行的工作有: 球在圆管中的任意(非轴对称)运动, 迴转椭球在平面边界附近的翻滚以及球入孔的三维问题(严格精确解). 这些工作完成后, 可以用于计算圆柱孔膜中的 Kedem-Katchalsky 现象学系数, 揭示红细胞在血管壁附近翻滚对于增加氧、血浆蛋白和血小板扩散的影响, 解释悬浮液流过孔时的浓度突变等等. 还有更多的工作正在计划之中. 多极子法的发展趋势值得我们密切注意.

参 考 文 献

- [1] Happel, J. and Brenner, H., *Low Reynolds Number Hydrodynamics* (1973).
- [2] Gluckman, M., Pfeffer, R. and Weinbaum, S., *J. Fluid Mech.*, **50**(1971), 705—740.
- [3] Leichtberg, S., Pfeffer, R. and Weinbaum, S., *Int. J. Multiphase Flow*, **3**(1976), 147—169.
- [4] Leichtberg, S., Weinbaum, S., Pfeffer, R. and Gluckman, M., *Phil. Trans. Roy. Soc. A***282**(1976), 583—615.
- [5] Ganatos, P., Pfeffer, R. and Weinbaum, S., *J. Fluid Mech.*, **84**(1978), 79—111.
- [6] Ganatos, P., Weinbaum, S. and Pfeffer, R., *J. Fluid Mech.*, **98**(1980), 739—753.
- [7] Ganatos, P., Pfeffer, R. and Weinbaum, S., *J. Fluid Mech.*, **99**(1980), 755—783.
- [8] Dagan, Z., Entrance Effects in Stokes Flow Through a Pore, *Ph. D. Dissertation*, City University of New York (1980).

(下转第 52 页)



(上接第 67 页)

其中 F_i , N_i 分别是第 i 个质点上的主动力和约束反力, m_i , a_i 是第 i 个质点的质量和加速度.

给系统一组任意的虚位移, 其中第 i 个质点的虚位移为 δr_i . 因为矢量 $(F_i + N_i - m_i a_i)$ 等于零, 故与虚位移矢量 δr_i 的总积必为零, 即有

$$(F_i + N_i - m_i a_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (2)$$

设约束是理想约束, $N_i \cdot \delta r_i = 0$

$$\text{得 } (F_i - m_i a_i) \cdot \delta r_i = 0 \quad (3)$$

n 个这样的方程相加, 得

$$\sum_{i=1}^n F_i \cdot \delta r_i - \sum_{i=1}^n m_i a_i \cdot \delta r_i = 0 \quad (4)$$

从牛顿第二定律导出动力学普遍方程(4)不需平衡概念和虚位移原理, 式(4)是牛顿第二定律的逻辑结果.

式(4)经过坐标变换并加上约束是完整约束这一条件, 即可导出拉氏方程

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, 3 \dots s) \quad (5)$$

其中 s 为系统自由度, q 为广义坐标, Q 为

广义力, T 为系统动能, t 是时间.

当约束是完整约束时, 主动力虚功之和等于零与广义力 $Q_j = 0$ ($j = 1, 2, 3 \dots s$) 是相当的. 故式(5)表明, 主动力虚功之和等于零是有理想完整约束的质点系动能满足关系式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots s) \quad (6)$$

的必要和充分条件.

因此, 如果我们把质点系“平衡”的含义扩充定义为质点系处于满足关系式

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial T}{\partial q_j} = 0 \quad (j = 1, 2, 3 \dots s)$$

的运动状态. 那么虚位移原理就可表述为: 有理想, 完整约束的质点系平衡的必要与充分条件是: 主动力在任意虚位移上所作的虚功之和等于零. 它是扩充以后的平衡概念与二类拉氏方程相结合的自然结论. 克服了原虚位移原理证明和表述上的不足之处. 扩充以后的平衡概念也使平衡原定义与静力学基本公理之间的矛盾得到统一. 按照平衡概念扩充以后的含义, 任何静止的系统都是处于平衡状态, 但是处于平衡状态的系统不一定静止.

与加在两极间电压大小无关。为满足显示的需要,在实验中除改变两极间电解电压外,还可以改变两极间距离,改变水温和水的电解率以改变电解电流强度,从而达到改变发生氢气泡量多少的目的。图 8a、b 表示两极间距离改变时对显示的影响。

2. 测量精度。做定量测量时其精度除与距离标尺读数精度有关外,还取决于脉冲周期的精度和稳定性。应选取 W/T 在 0.1 左右,且每张照片记录的脉冲线在 10 条以上,以减少平均误差。加在两极间的脉冲电压前后沿应越陡越好,否则脉冲泡的边缘不清楚而带来测量误差。

在做定常涡脱落周期测量时应选用较宽的周期 T , 以分清是那条线形成的涡,减少误差。

3. 氢气泡上浮问题,在水介质设备中使用氢气泡技术,则要求做为示踪粒子的氢气泡在水流动中具有较好的跟随性,不上浮或上浮效应极小。通过分析氢气泡在水中的运动可以求出其上浮速度并可建立氢气泡直径(即阴极丝的直径)与水速的关系。

氢气泡在水中以流速 u_∞ 随水一起流动。如果坐标取在气泡上,则气泡在水中只有向上的运动。这是由于它在水中受浮力

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 g \rho_{H_2O} \left(1 - \frac{\rho_{H_2}}{\rho_{H_2O}} \right) \quad (2)$$

作用的结果。其中 g 为重力加速度, ρ_{H_2O} 为水的密度, ρ_{H_2} 为氢的密度, R 为气泡直径。

由于氢气泡直径很小,所受浮力也小,气泡的运动雷诺数 $Re = \frac{uR}{\gamma_{H_2O}} \ll 1$, 根据 Stokes 理

论其所受的阻力 F_i ,

$$F_i = 6\pi\mu_{H_2O}u_fR \quad (3)$$

式中 μ_{H_2O} 为水的粘性系数; u_f 为气泡上浮速度。因为 $F = F_i$ 并取 $\rho_{H_2}/\rho_{H_2O} \approx 10^{-4}$, 则气泡在水中的上浮速度为

$$u_f = \frac{2}{9} \frac{g}{\gamma_{H_2O}} R^2 \quad (4)$$

若取气泡直径为 10—50 μm 则上浮速度为 $5 \times 10^{-3} - 1.4 \times 10^{-1} \text{cm/s}$ 。当假设气泡直径与丝直径相同时,并认为 $u_f/u_\infty < 0.005$ 时,可以忽略气泡上浮效应,因此要求水流速度与阴极丝之间满足下列关系

$$\frac{R^2}{u_\infty} \leq 4.34 \times 10^{-7} \quad (5)$$

即水流速度在 1—25 cm/s 时其丝直径要求小于 10—50 μm 。流速越低要求丝越细,反之亦然(上述计算采用 cgs 制)。

4. 干扰。阴极丝和丝的支架对流场有一定的干扰,因此在非显示地方尽量不放丝。此外电解出来的氢气泡不可能百分之百随水流走,有一部份要合并且附着在实验段壁面或实验模型上而造成干扰。但只要随时清除便可解决。

5. 在使用未经软化处理的水时,由于水中含有大量 Ca^{++} Mg^{++} 和其他离子。在电解时除在阴极丝上产生 H_2 外,这些杂质会附着在阴极丝的表面形成覆盖层影响 H_2 泡的产生。这就需要不断地用交换电极的方法清除它。

(本文于 1981 年 10 月 12 日收到)

(上接第 17 页)

- [9] Gluckman, M., Weinbaum, S. and Pfeffer, R., *J. Fluid Mech.*, 55(1972), 677—709.
 [10] Weinbaum, S. and Chien, S., *Mathematics of Microcirculation Phenomena* (ed. Gross, J. F. and Popel, A.) (1980), 109—131.
 [11] Ganatos, P., Weinbaum, S., Fischbarg, J. and Liebovitch, L., *Advances in Bioengineering*, Amer. Soc. Mech. Engineers (1980), 193.
 [12] Leichtberg, S., Weinbaum, S. and Pfeffer, R., *Biorheology*, 13(1976) 165—179
 [13] Lamb, H., *Hydrodynamics* (1932).
 [14] Caro, C. G., Pedley, T. J., Schroter, R. C. and Seed, W. A., *The Mechanics of the Circulation* (1978),
 [15] Haberman, W. L. and Savre, R. M., *David W. Taylor Model Basin Report No. 1143*, Washington D. C. (1958).
 [16] Stimson, M. and Jeffery, G. B., *Proc. Roy. Soc., A*, 111(1926) 110.
 [17] 严宗毅,力学与实践, 3, 2(1981), 4—9.