

# 平板弯曲断裂问题研究的进展<sup>\*</sup>

中国科学院力学研究所 柳春图 李英治

随着现代技术的飞跃发展,高强度钢、焊接工艺的大量使用,一系列灾难性的工程断裂事故相继发生,引起人们的广泛重视.为了查明事故的原因,很多科学工作者在研究带裂纹的结构强度和裂纹扩展规律方面做了大量工作,开创了断裂力学这门新兴学科,并迅速发展成为固体力学的重要分支.

平板结构是工程中常用的一种结构型式,特别是在航空、化工部门更是一种重要的承载结构.为了保证其安全使用、避免低应力脆断,以及安全设计、合理选材等目的,必须深入了解含裂纹平板的真正受力状态,这就促进了带裂纹平板研究工作的开展.

与平面断裂问题相比,平板弯曲断裂问题有其特殊性.它除了有面内位移之外,还存在着面外位移;平面问题中应力和位移与厚度方向无关,而在平板弯曲问题中裂纹尖端应力场沿厚度方向变化.因此,平板问题实质是三维的力学问题,不同的平板实用理论是对三维问题的不同近似.

鉴于平板弯曲断裂问题的复杂性,与平面断裂问题研究相比,无论在研究的广度或深度上都相差一定距离.从六十年代初到现在,论及平板断裂分析的文章不多,而且多数限于研究无限大板的应力强度因子问题.至于研究有限尺寸平板在各种荷载下应力强度因子计算的文章还不多见.直到近年来,由于计算机的应用,采用有限元法对有限尺寸板断裂问题进行了一些讨论.

由此可见,平板弯曲断裂问题的研究是一个很有实际意义但又有一定难度的课题,目前研究的进展距离工程需要还有一段很大距离.本文的主要目的,是通过对含裂纹平板弯曲问题的讨论、对现有某些文献的归纳和评价,介绍平板弯曲断裂问题研究的现状,以便促进对该问题研究工作的开展.由于作者水平的限制和文章篇幅的关系,因此论及的问题可能会有不少的片面性.

## 一 应用经典的 Kirchhoff 平板理论研究弯曲断裂问题

### 1) 基本方程

在平板弯曲断裂问题分析中,早期大部分著作都应用了经典的 Kirchhoff 平板理论.在该理论中对板的变形作如下假设:

在变形前垂直中面的直线,在变形后没有伸缩,并继续垂直于变形后的中面.这个假设导致了可用一个广义位移  $w(x, y)$  来表示三个位移分量,进而推出熟知的薄板平衡方程:

$$D\left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}\right) = p \quad (1.1)$$

<sup>\*</sup> 本文曾作为 1979 年 11 月在武汉召开的全国高校断裂力学会议的邀请报告,会后经整理修改而成.

式中,  $D$  为抗弯刚度,  $D = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$ .

典型的边界条件有三种:

$$1) \text{ 固支边: } w = \bar{w}, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\psi}_n \quad (1.2a)$$

$$2) \text{ 简支边: } w = \bar{w}, \quad M_n = \bar{M}_n \quad (1.2b)$$

$$3) \text{ 自由边: } M_n = \bar{M}_n, \quad \frac{\partial M_{n,s}}{\partial s} + Q_n = \bar{V}_n \quad (1.2c)$$

在自由边的边界条件中, 真实的边界条件应该有三个, 分别相应于  $M_n$ ,  $M_{n,s}$  和  $Q_n$ . 但是, 在 Kirchhoff 平板理论中, 基本微分方程为四阶, 只要求两个边界条件, 因此需要引入等效剪力的概念:

$$V_n = \frac{\partial M_{n,s}}{\partial s} + Q_n \quad (1.3)$$

从能量的观点出发, 亦可证明在 Kirchhoff 理论中  $M_{n,s}$  和  $Q_n$  并不是独立的. 若边界上挠度有一变分  $\delta w$ , 则所做功为:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_c (-M_{n,s} \frac{\partial \delta w}{\partial s} + Q_n \delta w) ds \\ &= -[M_{n,s} \delta w]_c + \int_c \left( \frac{\partial M_{n,s}}{\partial s} + Q_n \right) \delta w ds \end{aligned}$$

上式右边第一项的值为零, 因此  $\frac{\partial M_{n,s}}{\partial s} + Q_n$  是与广义位移变分  $\delta w$  相应的广义力.

由此看出, 用经典的 Kirchhoff 理论研究断裂问题时, 裂纹边界只能近似满足.

## 2) 含裂纹平板的分析

1961年, Williams<sup>[2]</sup>将位移按照满足裂纹条件的特征函数进行展开, 获得平板弯曲时裂纹尖端应力场的一般表达式.

薄板基本方程在极坐标系下为:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) w = p/D \quad (1.4)$$

边界条件为, 在  $\theta = 0, 2\pi$  处

$$M_s(r, \theta_0) = -D \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right) = 0 \quad (1.5a)$$

$$V_\theta(r, \theta_0) = -D \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial \nabla^2 w}{\partial \theta} + (1-\nu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right] = 0 \quad (1.5b)$$

令解的形式为

$$\begin{aligned} w_n(r, \theta) &= r^{\lambda_n + 1} F(\theta, \lambda_n) \\ &= r^{\lambda_n + 1} [b_1 \sin(\lambda_n + 1)\theta + b_2 \cos(\lambda_n + 1)\theta + b_3 \sin(\lambda_n - 1)\theta \\ &\quad + b_4 \cos(\lambda_n - 1)\theta] \end{aligned} \quad (1.6)$$

将(1.6)代入(1.5a), (1.5b)中, 求得系数之间关系以及决定特征值的方程

$$\sin 2\pi \lambda_n = 0 \quad (1.7)$$

$$\therefore \lambda_n = \frac{m}{2}, \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

于是得到:

$$w(r, \theta) = r^{\frac{3}{2}} \left\{ \left[ \sin \frac{3}{2} \theta + \frac{3(1-\nu)}{7+\nu} \sin \frac{\theta}{2} \right] b_1^{(1)} + \left[ \cos \frac{3}{2} \theta + \frac{3(1-\nu)}{5+3\nu} \cos \frac{\theta}{2} \right] b_2^{(1)} \right\} \\ + r^2 \left\{ \left[ \sin 2\theta \right] b_1^{(2)} + \left[ \cos 2\theta + \frac{1-\nu}{1+\nu} \right] b_2^{(2)} \right\} + O(r^{\frac{5}{2}}) \quad (1.8)$$

若令  $\psi = \theta - \pi$ , 并进行坐标变换(图 1.1),

$$w(r, \psi) = r^{\frac{3}{2}} \left\{ - \left[ \cos \frac{3}{2} \psi - \frac{3(1-\nu)}{7+\nu} \cos \frac{\psi}{2} \right] b_1^{(1)} + \left[ \sin \frac{3}{2} \psi - \frac{3(1-\nu)}{5+3\nu} \sin \frac{\psi}{2} \right] b_2^{(1)} \right\} \\ + r^2 \left\{ \left[ \cos 2\psi + \frac{1-\nu}{7+\nu} \right] b_1^{(2)} + \left[ \sin 2\psi \right] b_2^{(2)} \right\} + O(r^{\frac{5}{2}}) \quad (1.9)$$

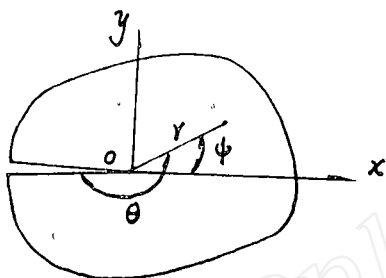


图 1.1

根据广义位移  $w$  与广义内力的关系式可以求出内力, 从而获得裂纹尖端应力场的一般表达式:

$$\frac{2\sigma_r}{3G} = \frac{z}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ \cos \frac{3}{2} \psi - \frac{3+5\nu}{7+\nu} \cos \frac{\psi}{2} \right] b_1^{(1)} + \left[ -\sin \frac{3}{2} \psi + \frac{3+5\nu}{5+3\nu} \sin \frac{\psi}{2} \right] b_2^{(1)} \right\} \\ - \frac{8}{3} z \{ (1 + \cos 2\psi) b_1^{(2)} + [\sin 2\psi] b_2^{(2)} \} + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (1.10a)$$

$$\frac{2\sigma_\psi}{3G} = \frac{z}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ -\cos \frac{3}{2} \psi - \frac{5+3\nu}{7+\nu} \cos \frac{\psi}{2} \right] b_1^{(1)} + \left[ \sin \frac{3}{2} \psi + \sin \frac{\psi}{2} \right] b_2^{(1)} \right\} \\ - \frac{8}{3} z \{ (1 - \cos 2\psi) b_1^{(2)} - [\sin 2\psi] b_2^{(2)} \} + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (1.10b)$$

$$\frac{2\tau_{r\psi}}{3G} = \frac{z}{\sqrt{r}} \left\{ \left[ -\sin \frac{3}{2} \psi + \frac{1-\nu}{7+\nu} \sin \frac{\psi}{2} \right] b_1^{(1)} + \left[ -\cos \frac{3}{2} \psi + \frac{1-\nu}{5+3\nu} \cos \frac{\psi}{2} \right] b_2^{(1)} \right\} \\ + \frac{8}{3} z \{ [\sin 2\psi] b_1^{(2)} - [\cos 2\psi] b_2^{(2)} \} + O(r^{\frac{1}{2}}) \quad (1.10c)$$

1962年Sih, G. C. 和 Paris, P. C. 用复变函数的方法推求无限大板的应力强度因子<sup>[3]</sup>。首先将弯矩和扭矩通过复变函数  $\varphi(z)$ ,  $\psi(z)$  来表示:

$$M_x + M_y = -4D(1+\nu) \operatorname{Re}[\varphi'(z)] \quad (1.11a)$$

$$M_y - M_x + 2iM_{xy} = 2D(1-\nu) [\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)] \quad (1.11b)$$

$$Q_x - iQ_y = -4D\varphi''(z) \quad (1.11c)$$

定义复应力强度因子  $K$ ,

$$K = K_I - iK_{II} \quad (1.12)$$

$K_I$ ,  $K_{II}$  分别为 I 型、II 型弯曲应力强度因子, 它们与展开式系数的关系为:

$$K_I = -\frac{3\sqrt{2}(3+\nu)Ghb_1}{7+\nu} \quad (1.13a)$$

$$K_{II} = -\frac{3\sqrt{2}(3+\nu)Ghb_2}{5+3\nu} \quad (1.13b)$$

根据(1.10a)—(1.10c), 并注意到(1.13a), (1.13b)的关系, 可以得到

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{12(M_r + M_\theta)z}{h^3} = \frac{2\sqrt{2}(1+\nu)z}{(3+\nu)h} \left[ \frac{K_I}{\sqrt{r}} \cos \frac{\theta}{2} - \frac{K_{II}}{\sqrt{r}} \sin \frac{\theta}{2} \right]$$

注意到复应力强度因子的定义(1.12):

$$M_r + M_\theta = \frac{(1+\nu)h^2}{3\sqrt{2}(3+\nu)} \operatorname{Re} \left\{ K \left[ \frac{1}{z-z_1} \right]^{\frac{1}{2}} \right\} \quad (1.14)$$

从(1.11a)和(1.14)便得到复应力函数与复应力强度因子之间的关系:

$$K = -\frac{12\sqrt{2}D(3+\nu)}{h^2} \lim_{z \rightarrow z_1} (z-z_1)^{\frac{1}{2}} \varphi'(z) \quad (1.15)$$

通过保角变换, 将  $z$  平面内长为  $2a$  的直裂纹变换为  $\zeta$  平面内单位圆孔, (1.15)式可简化:

$$K = -\frac{12D(3+\nu)}{h^2 a^{1/2}} \cdot \varphi'(\zeta) \Big|_{\zeta=1} \quad (1.16)$$

于是, 只要求得  $\zeta$  平面上复应力函数  $\varphi(\zeta)$ , 便可以求得应力强度因子的数值. 举一个例子, 考虑一无限大平板含有长为  $2a$  的中心裂纹, 在无穷远处有一均匀弯矩  $M_0$ , 则有<sup>[21]</sup>

$$\varphi(\zeta) = -\frac{M_0 a}{4D(1+\nu)} \left[ \zeta + \frac{1-\nu}{3+\nu} \frac{1}{\zeta} \right] \quad (1.17)$$

将(1.17)代入(1.16)中, 得到

$$K_I = \frac{12z}{h^3} \cdot M_0 \sqrt{a} \quad (1.18a)$$

$$K_{II} = 0 \quad (1.18b)$$

### 3) 讨论

从以上分析可以看出, 采用 Kirchhoff 平板理论研究断裂力学问题, 在理论上是有严重缺陷的, 它导致了剪应力  $\tau_{rz}$ ,  $\tau_{\theta z}$  的奇异性是  $r^{-\frac{3}{2}}$  阶的, 与  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  奇异性  $r^{-\frac{1}{2}}$  阶不同, 并且和更精确的三维特征分析不符合<sup>[4, 5]</sup>. 由于在经典板理论中忽略剪切变形, 因此剪力并不是独立的广义位移, 所以只能求出两个独立的应力强度因子, III型问题应力强度因子并不独立. 此外, 弯曲时应力幅角和平面拉伸时应力幅角也不相同, 因此也无法研究弯曲和拉伸共同作用的问题. 这些都是由于经典板理论对裂纹面边界条件只是近似满足所引起的, 因而不能正确反映裂纹尖端的奇异性质.

## 二 用较精确的平板理论研究弯曲断裂问题

为了克服经典的平板理论的缺陷, 从六十年代开始, 根据较精确的 Reissner 理论和其它理论进行平板弯曲断裂分析.

### 1) 考虑剪切变形的平板理论

在各种考虑剪切变形的平板弯曲理论中, 最简单的是三广义位移理论<sup>[6, 7]</sup>, 它对板的变形作如下假设: 在变形前垂直中面的直线, 在变形后仍为直线. 这个假设导致可以用三个广义位移  $\psi_x$ ,  $\psi_y$ ,  $w$  来表示三个位移分量:

$$u(x, y, z) = -z\psi_x(x, y) \quad (2.1a)$$

$$v(x, y, z) = -z\psi_y(x, y) \quad (2.1b)$$

$$w(x, y, z) = w(x, y) \quad (2.1c)$$

$\psi_x, \psi_y$  是变形前垂直中面直线段在变形后的转角。其中  $\psi_x$  是  $x-z$  平面内的转角，以从  $x$  轴经  $90^\circ$  转到  $z$  轴的转向为正； $\psi_y$  是  $y-z$  平面内的转角，以从  $y$  轴经  $90^\circ$  转到  $z$  轴的转向为正； $w$  为挠度，以向下为正。

将(2.1a)–(2.1c)代入几何方程中，得到应变-位移关系：

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= -z \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= -z \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= 0 \\ \gamma_{xy} &= -z \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ \bar{\gamma}_{xz} &= \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \\ \bar{\gamma}_{yz} &= \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \end{aligned} \quad (2.2a) \text{—} (2.2f)$$

$\bar{\gamma}_{xz}, \bar{\gamma}_{yz}$  代表变形前垂直中面的法线在变形后与中面夹角的变化，因此它们就是平均横向剪切应变。

板中应力可以由下列五个广义内力所完全决定：

$$\begin{aligned} M_x &= \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_x dz, \quad M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z \sigma_y dz, \quad M_{xy} = \int_{-h/2}^{h/2} z \tau_{xy} dz \\ Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} dz, \quad Q_y = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} dz \end{aligned} \quad (2.3a) \text{—} (2.3e)$$

对于均匀各向同性板，应力与内力关系为：

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12z}{h^3} M_x, \quad \sigma_y = \frac{12z}{h^3} M_y, \quad \tau_{xy} = \frac{12z}{h^3} M_{xy} \\ \tau_{xz} &= \frac{3}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q_x, \quad \tau_{yz} = \frac{3}{2h} \left( 1 - \frac{4z^2}{h^2} \right) Q_y \end{aligned} \quad (2.4a) \text{—} (2.4e)$$

将(2.2a)–(2.2f)代入物理方程中，便可求得应力表达，再用(2.3a)–(2.3e)式求得广义内力：

$$\begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial x} + \nu \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial \psi_y}{\partial y} + \nu \frac{\partial \psi_x}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= -\frac{1-\nu}{2} D \left( \frac{\partial \psi_x}{\partial y} + \frac{\partial \psi_y}{\partial x} \right) \\ Q_x &= C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) \\ Q_y &= C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) \end{aligned} \quad (2.5a) \text{—} (2.5e)$$

当平均横向剪应变  $\bar{\gamma}_{xz}$ ,  $\bar{\gamma}_{yz}$  按照能量相等的观点进行定义时, 即令:

$$Q_x \bar{\gamma}_{xz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{xz} \gamma_{xz} dz \quad (2.6a)$$

$$Q_y \bar{\gamma}_{yz} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yz} \gamma_{yz} dz \quad (2.6b)$$

容易确定  $C = \frac{5}{6} Gh$ , 这就是截面平均剪切刚度.

三广义位移平板弯曲理论的平衡方程仍为:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x = 0 \quad (2.7a)$$

$$\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (2.7b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (2.7c)$$

以上方程构成考虑剪切变形平板理论的基本方程. 将 (2.5a) — (2.5c) 代入平衡方程 (2.7a) — (2.7c) 中, 可得到三广义位移表示的平衡方程:

$$D \left( \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x^2} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial y^2} + \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x \partial y} \right) + C \left( \frac{\partial w}{\partial x} - \psi_x \right) = 0 \quad (2.8a)$$

$$D \left( \frac{1+\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_x}{\partial x \partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_y}{\partial y^2} \right) + C \left( \frac{\partial w}{\partial y} - \psi_y \right) = 0 \quad (2.8b)$$

$$C \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi_x}{\partial x} - \frac{\partial \psi_y}{\partial y} \right) + p = 0 \quad (2.8c)$$

$$\text{若 } C = \infty \text{ 则 } \psi_x = \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \psi_y = \frac{\partial w}{\partial y} \quad (2.9)$$

那么, 三个广义位移就退化为一个广义位移, 成为经典板理论. 由此可见, 从经典板理论推广到考虑剪切变形板理论, 就是由一个广义位移增加到三个, 三个广义内力增加到五个, 从而每边由两个边界条件(相应四阶微分方程)增加到三个(相应于六阶微分方程).

## 2) 含裂纹平板的分析

根据 Reissner 理论研究平板弯曲断裂问题是很复杂的. 研究的方法通常采用积分变换, 将断裂力学问题化为对偶积分方程. 在这方面有代表性的工作是在 1960 年 Knowles 和 Wang 曾用 Reissner 理论对无限大板进行分析, 用积分变换求解了裂纹尖端奇异性<sup>[8]</sup>. 文献[8]首次指出, 当采用考虑剪切变形的 Reissner 理论进行断裂分析时, 裂纹尖端剪应力  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$  奇异性性和  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  同阶(均为  $r^{-1/2}$  阶), 应力场的幅角与平面问题应力场幅角完全相同. 文献[8]并且指出, 当板厚趋于零时, 考虑剪切变形所求得的应力强度因子与按经典板理论求得的应力强度因子之比为  $(1+\nu)/(3+\nu)$ . 随后, Hartman 和 Sih 同样用积分变换解了上述问题<sup>[9]</sup>, 所不同的是放松了文献[8]中对板厚为零的假设, 考虑了板的厚度效应. 文献[9]给出裂纹尖端附近应力场表达式为:

$$\sigma_x = \frac{K_I(z)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) - \frac{K_{II}(z)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left( 2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta \right) + O(r^0)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{K_I(z)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) + \frac{K_{II}(z)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta + O(r^\circ) \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I(z)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3}{2} \theta + \frac{K_{II}(z)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left( 1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3}{2} \theta \right) + O(r^\circ) \\ \tau_{xz} &= -\frac{K_{III}(z)}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} + O(r^\circ) \\ \tau_{yz} &= \frac{K_{III}(z)}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} + O(r^\circ) \end{aligned} \quad (2.10a) - (2.10e)$$

文献[9]同时指出板的厚度效应不容忽视. 对于承受均匀弯曲的无限大板, 应力强度因子表达式为:

$$K_I(z) = \frac{12z}{h^3} \Phi(1) M \sqrt{\pi a} \quad (2.11)$$

式中 $\Phi(1)$ 是Fredholm第二类积分方程的解, 如图(2.1)曲线所示.

从图(2.1)可以看出, 当板厚等于零时,  $\Phi(1) = (1+\nu)/(3+\nu)$ , 这就是Knowles和Wang的结果. 但是在 $h/a\sqrt{10} = 0$ 处, 曲线的斜率无穷大. 也就是说, 当板厚从零增加到一个很小的有限值时,  $\Phi(1)$ 数值急剧增大. 从此可以看出, 有的工程界推荐采用 $(1+\nu)/(3+\nu)$ 乘以经典板的结果作为考虑剪切变形理论结果是不能令人放心的.

用考虑剪切变形的Reissner理论代替经典板理论, 研究平板弯曲断裂问题可以说是平板弯曲断裂研究中的一个重要进展. 它纠正了经典板理论带来的一些缺陷, 从而更真实地描写了裂纹尖端应力场的本质, 并为1970年Smith, D. G. 和Smith, C.W. 进行的光弹性试验所证实<sup>[10]</sup>.

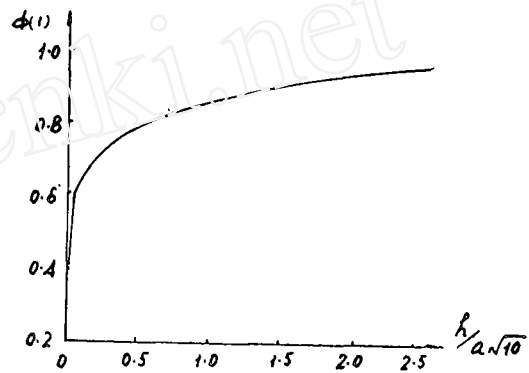


图 2.1

应该指出, 文献[8, 9]不足之处是仅仅给出裂纹尖端应力场级数展开式的首项, 对整个应力场的情况仍不清楚. 由于问题的复杂性, 这个问题的研究长期进展不快. 1979年, Murthy等人发表了对称I型情况下Reissner型板裂纹尖端位移场展开式<sup>[23]</sup>. 1980年, 柳春图为了寻求Reissner型板裂纹尖端位移场的全场解, 给出了I型、II型、III型渐近展开式一般求解方法以及前几项函数和系位的具体表达式<sup>[1]</sup>. 最近, 又获得适用于任意阶的全场解表达式. 这些表达式进一步阐明了Reissner型板裂纹附近的力学性质, 它类似于平面问题Williams展开式的作用, 为平板弯曲断裂分析提供了较好的力学基础.

近年来国内一些单位开展了平板弯曲断裂问题的研究, 并取得一定成果. 清华大学余寿文、杨卫<sup>[11]</sup>用渐近分析的方法, 研究了考虑横向剪切变形的含裂纹平板的应力状态和应力强度因子的渐近解. 兰州大学王凯、汤任基用积分变换研究了经典板的断裂问题<sup>[12, 22]</sup>.

### 3) 讨论

为什么Reissner理论与经典板理论之间的结果差别会那么大, 不仅在裂纹尖端附近的应力分布不同, 而且剪应力在量阶上都有那么大的变化? 在许多文章中都只是笼统地解释为由于经典板理论把三个边界条件变成两个所造成的. 这种解释尚缺乏具体的说明, 要想比较

深入地讨论这个问题，有必要对自由边的边界效应作一个具体的分析。

我们引用文献〔7〕中的例子：

我们考虑一个三边简支、一边自由的矩形板在均布荷载下的弯曲问题，如图 2.2 示。文〔7〕给出了在直线  $x = \frac{a}{2}$  上  $Q_y$  的分布曲线。

无量纲参数  $\delta_a = D/(Ca^2)$ ， $\delta_a$  越大则剪切变形越大， $\delta_a = 0$  相当于不考虑剪切变形的情况。从图 2.2 中可以看出，在远离自由边的板的中间部分，考虑剪切变形和不考虑剪切变形给出几乎相同的  $Q_y$  值，但是在自由边附近，当采用考虑剪切变形的 Reissner 理论时，由于边界条件保留了三个自然边界，就使得  $Q_y$  在自由边附近急剧减小，并且在自由边上等于零。 $\delta_a$  越小，这急剧变化区域越小，也就是边界效应越明显。当  $\delta_a \rightarrow 0$ ，但仍然用 Reissner 理论计算时，在  $y = b$  处，仍然有  $Q_y = 0$ ， $M_{xy} = 0$ 。而当  $y \rightarrow b$  时， $Q_y \neq 0$ ， $M_{xy} \neq 0$ 。

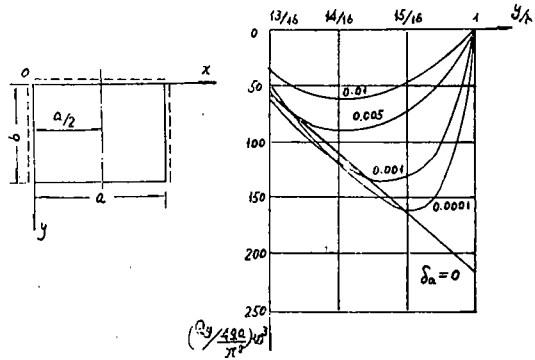


图 2.2

也就是说， $Q_y$ ， $M_{xy}$  在边界上都有一个跳跃，即具有奇异性，有明显的边界效应。这是因为三个自然边界都被保留之故，所以  $Q_y$ ， $M_{xy}$  在边界上严格地等于零。

与此相反，在经典板理论中，三个自然边界只能简化为二个，因此引进等效剪力  $V_y$ ：

$$V_y = \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + Q_y \quad (2.12)$$

$$\text{在 } y = b \text{ 处, } V_y = 0$$

$$\text{在 } y \rightarrow b \text{ 处, } V_y = 0$$

即  $V_y$  在自由边附近缓慢变化，几乎与  $\delta_a$  无关。也就是说，即使是很薄的板，即  $\delta_a \rightarrow 0$ ，若用两种不同理论去进行分析，内力的性态也会完全不同。以上分析表明，即使是很薄的板，当分析裂纹尖端附近的应力分布和计算应力强度因子时，采用经典理论的结果也是不合理的。

#### 4) 其它精确理论

除了 Reissner 理论之外，还有 Goldenweizer 理论以及 H-S 理论。

Goldenweizer 理论与 Reissner 理论的差别在于不再假定应力沿厚度线性分布，而假定：

$$[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] = f_1(z)[M_x, M_y, M_{xy}] \quad (2.13a)$$

$$[\tau_{xz}, \tau_{yz}] = f_2(z)[Q_x, Q_y] \quad (2.13b)$$

$$[\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}] = \int_{-h/2}^{h/2} [f_1(z)u, f_1(z)v, f_2(z)w] dz \quad (2.13c)$$

$f_1(z)$ ， $f_2(z)$  是指定的或实验确定的函数。

1970年，Sih 在求解上述问题时建议将  $f_1(z)$  展开为三角级数，他认为应力分布为〔5〕

$$[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] = (4/h^2) f''(2z/h) [M_x, M_y, M_{xy}] \quad (2.14a)$$

$$[\tau_{xz}, \tau_{yz}] = -(2/h) f'(2z/h) [V_x, V_y] \quad (2.14b)$$



$$\sigma_z = 0 \quad (2.14c)$$

$$f'(2z/h) = b_0 - \sum_{n=1}^m (-1)^n b_n \cos[(2\pi n z/h)] \quad (2.15)$$

可以满足  $\tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$  的条件, 即

$$z = \pm h/2 \text{ 时, } f'(\pm 1) = 0 \quad (2.16)$$

应力强度因子表达式为

$$K_I(z) = (4/h^2) f''(2z/h) \Delta(1) m_0 \sqrt{a} \quad (2.17)$$

$\Delta(1)$  通过数值计算而得, 计算表明, 当板厚从零增加到  $a/5$ , 应力强度因子  $K_I(z)$  增加 95% ( $\nu=0$ ), 77% ( $\nu=0.3$ ), 和 68% ( $\nu=0.5$ ).

Hartranft 和 Sih 进一步建议另一个板的理论<sup>[5]</sup>:

$$[\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}] = (4/h^2) f''(2z/h) [p_x, p_y, p_{xy}] \quad (2.18a)$$

$$[\tau_{xz}, \tau_{yz}] = -\frac{2}{h} f'(2z/h) [q_x, q_y] \quad (2.18b)$$

$$\sigma_z = f(2z/h) p_z \quad (2.18c)$$

它和前一理论的区别是  $f(2z/h)$  不再被指定, 它需要满足  $\sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$  的条件, 新理论的微分方程和边界条件是用最小余能原理获得的. 但是, 这些较精确的理论的精度以及其适用范围目前还不很清楚. 因为数学上的复杂性, 没有看到进一步有关这方面的讨论.

### 三 有限尺寸板弯曲断裂问题的研究

由于数学上的困难, 至今还没有求得在各种荷载作用下基于 Reissner 理论的有限尺寸板的解答. 即使是借助有限元手段讨论有限尺寸板应力强度因子的文章亦不多见. 迟至 1971 年才看到第一篇用有限元计算含裂纹平板弯曲断裂的文章<sup>[13]</sup>. Wilson 采用 Kirchhoff 板元, 仿照有限元法解平面断裂问题的技巧, 在求得各节点挠度之后, 根据经典板的 Williams 展开式推出应力强度因子. 该文计算了应力强度因子随板宽的变化. 文献<sup>[13]</sup>是用有限元法计算平板弯曲断裂问题的初次尝试, 但该文采用 Kirchhoff 板元, 并没有考虑剪切变形影响, 其物理基础显然是存在缺陷的. 而且采用常规板元解算断裂问题, 网格划分较密, 靠近裂纹尖端的单元最大尺寸与裂纹长度之比为 0.005, 可见计算工作量是相当大的.

1976 年, R. S. Barsoum 用厚板退化元配合畸变等参元的方法解算板壳断裂问题<sup>[14]</sup>, 他在 Ziekiewicz 提出的厚板退化元的基础上<sup>[15]</sup>, 将等参元边上的中间节点移到 1/4 边长的位置上(图 3.1), 使裂纹尖端附近应力获得  $r^{-1/2}$  阶奇异性. 文献<sup>[14]</sup>主要讨论

无限大板受均匀弯曲的 I 型问题, 并求解了有限尺寸板在集中荷重下的应力分布. 据文献<sup>[14]</sup>称, 无限大板的计算结果与文献<sup>[9]</sup>给出的解答相比, 在  $h/a > 0.8$  时没有显著误差. 但在薄板时误差较大, 根据我们校核, 误差最大值达 13%. 由于该文采用了厚板单元, 因而考虑了剪切变形影响, 又采用了类似平面问题的畸变等参元方法, 首次在板壳断裂分析中引入包含奇异性的单元. 但是, 畸变等参

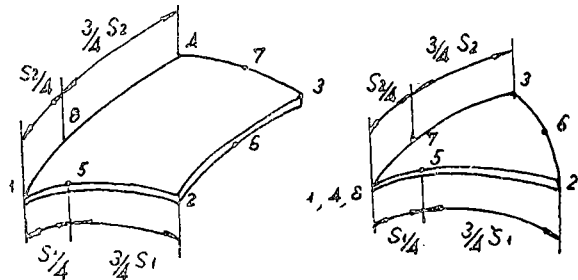


图 3.1

元. 但是, 畸变等参

元通常采用二次或三次多项式为形函数，它获得的应力奇异性是 $r^{-\frac{1}{2}}$ 阶的，即只能得到应力展开式的首项，并且在单元内部不一定符合真实情况，因而影响了计算精度。此外，该方法需要根据位移场用最小二乘法推求应力强度因子，从而增加了计算工作量，并且计算结果与计算选择点有关，在相当大范围内变化。

另一篇考虑剪切变形影响并采用奇异元技巧的文章是 G·Yagawa 在 1979 年发表的<sup>[16]</sup>，它采用叠加法，即将位移矢量 $\vec{u} = \{u, v, w\}^T$ 表达为解析位移(上标为 A)和有限元位移(上标为 F)之和：

$$\vec{u} = \vec{u}^A + \vec{u}^F \quad (3 \cdot 1)$$

而位移 $\vec{u}^A$ 假定为以下形式

$$u^A = f(z) \cdot \hat{u}(x, y) \quad (3.2a)$$

$$v^A = f(z) \cdot \hat{v}(x, y) \quad (3.2b)$$

$$w^A = g(z) \cdot \hat{w}(x, y) \quad (3.2c)$$

这里 $\hat{u}$ 和 $\hat{v}$ 是按照平面问题获得的解析表达式， $\hat{w}$ 采用经典板理论的 Williams 展开式的首项。 $f(z)$ 认为沿板厚线性分布，而认为 $g(z)$ 是常数。

文献<sup>[16]</sup>所采用的位移模式(3.2a)—(3.2c)，对于 I 型问题恰好是 Reissner 型板展开式的首项，因此是合理的。但对于 II 型问题而言，Williams 展开式中挠度 $w$ 的首项与 Reissner 型板展开式的相应项并不相同。因此，位移模式(3.2a)—(3.2c)不宜用于 II 型或复合型问题。

采用叠加法的优点在于全板都取一种单元，不存在奇异元和常规元连接问题；程序编制简单。但是，在远离裂纹尖端的地方，仅取 Williams 展开式首项作为位移模式将会有很大误差。此外，叠加法另一不足之处是当 $a/L$ 较大时(即裂纹尖端靠近自由边界时)，自由边界将出现较大的计算应力，需要反向叠加将其消去，因而加大了工作量<sup>[17]</sup>。

1979 年，Jalees ahmad 等人<sup>[18]</sup>首次用有限元法讨论了 I 型、II 型弯曲复合型问题。该文以 Kirchhoff 板的 Williams 展开式首项为奇异元位移模式(式 3.3)，并在其余区域中采用了 Kirchhoff 板的九节点参数三角形板元：

$$w(r, \theta) = w_0 + \theta_{x_0} r \cos \theta + \theta_{y_0} r \sin \theta + r^{\frac{3}{2}} \left\{ c_1 \left[ -\cos \frac{3}{2} \psi + \frac{3(1-\nu)}{7+\nu} \cos \frac{\psi}{2} \right] + c_2 \left[ \sin \frac{3}{2} \psi - \frac{3(1-\nu)}{5+3\nu} \sin \frac{\psi}{2} \right] \right\} \quad (3.3)$$

文献<sup>[18]</sup>计算了不同宽度平板在纯弯曲和承受均布荷载作用的问题，并对轴流压气机叶片断裂问题进行分析。由于该文采用 Kirchhoff 板元，其物理基础存在缺陷。此外，该文没有采用单一的奇异元广义位移列向量将各奇异元统一起来，因而无法推求奇异元广义位移列向量与应力强度因子之间的关系。这样，虽然采用了奇异元，却不能直接从有限元基本方程中解出应力强度因子。

法国 D. Bergez<sup>[19]</sup>提出在裂纹周围用考虑剪切变形的 Reissner 板元，而其余区域采用 Kirchhoff 板元的算法，其计算精度为 11%。

从上述情况可以看出，关于有限尺寸板弯曲断裂问题的研究还有待进一步开展。现有文献<sup>[14, 16]</sup>考虑了剪切变形影响，但奇异元位移模式仍有待改进，且都限于讨论 I 型问题。而在实际问题中，II 型、III 型以及复合型问题亦是相当普遍的。文献<sup>[18, 19]</sup>虽然可以计算

I型、II型复合型断裂问题,但由于采用 Kirchhoff 板元,物理基础不正确,计算结果距真实解更远。因此,提出一些力学模型合理、适用性广泛的有限元位移模式,讨论有限尺寸板的应力强度因子的性能,是当前平板弯曲断裂分析的主要研究任务之一。

基于以上认识,笔者提出在 Reissner 型平板裂纹尖端位移场展开式<sup>[1]</sup>基础上,采用高阶奇异元计算中厚板弯曲应力强度因子的方法<sup>[20]</sup>,给出了适用于 Reissner 型板静力分析和断裂分析的通用程序,所获得的基本结论是:

1) 采用不同的平板弯曲理论,应力强度因子的数值也有很大的不同。当采用 Kirchhoff 板理论时,板厚  $h$  越小,当裂纹长度  $2a$  一定时,则所求得的应力强度因子与 Reissner 理论的解答的相差反而越大。

2) 采用高阶奇异元计算 Reissner 型板弯曲应力强度因子,与同类工作相比,计算精度有较大的改进。根据足够宽度的板(板宽  $2L=20a$ )的计算结果与无限大板理论解相比较,当  $h/a=1$  时,误差 1% 左右,即使对于  $h/a=0.1$  的薄板,误差只有 3%。而文献<sup>[14]</sup>用畸变等参元方法最大误差达 13%。

3) 将有限尺寸板的  $K_I$  值与无限大板  $K_I$  之比称为有限尺寸效应系数。 $a/L$  增大,板的有限尺寸效应系数随之增大,而且板厚比  $h/a$  越大,该系数增大更多一些。试比较无限大板和  $a/L=0.5$  的有限尺寸板,对于  $h/a=0.1, 0.5, 1$  三种厚度比,应力强度因子分别增加 13.58%, 19.47% 和 22.31%。

4) 根据 Reissner 型板  $J$  积分计算平板弯曲应力强度因子,其精度在 5% 左右。

5) 当仅承受边界均匀弯矩时,简支板的应力强度因子比自由板的应力强度因子小 30% 左右。

6) 矩形板的应力强度因子介于与其同宽的方形板和无限大板之间,当  $h/a=0.1$  时,用方形板代替矩形板误差在 5% 之内。

7) 在  $a/L$  相同的情况下,Reissner 型板的有限尺寸效应系数总是介于 Kirchhoff 板和平面拉伸相应值之间。

8) 当  $r < 0.1a$  时,取裂纹尖端位移场展开式首项为位移模式与取前几阶为位移模式的相差不大,但当  $r > 0.1a$  时误差急剧增大。因此,当仅取展开式首项作为奇异元位移模式时,奇异元尺寸应限制在  $0.1a$  以内。因而不能描写离裂纹尖端稍远地区的奇异性,结果计算精度低于取前几阶为位移模式时的精度。

#### 四 关于非穿透裂纹的研究

非穿透裂纹断裂分析的重要性已被认识多年了。美国北极星导弹发动机外壳在水压试验时飞裂事件已清楚地说明了这个问题。发动机外壳是焊接壳体,在多数情况下裂纹扩展是从焊接部位的表面缺陷开始的。

非穿透裂纹断裂分析的本质是三维断裂力学问题。即使是在承受均匀拉伸的情况下亦未获得精确解答,至于弯曲断裂分析更为困难。

Irwin(1962)首先提出非穿透裂纹承受均匀拉伸的近似解<sup>[24]</sup>。他在 Green 和 Sneddon 的无限体内平椭圆裂纹均匀拉伸公式基础上加上自由表面修正和考虑塑性区的修正。这是 1966 年以前所能找到的唯一计算表面裂纹的公式。

Smith 首先从三维问题去研究非穿透裂纹问题(1966),用 Schwarz 交替法获得半空间

中半圆形裂纹承受均匀拉力的解答<sup>[25]</sup>。随后又有一些研究者进行了这方面的工作，取得一系列成果<sup>[26—29]</sup>。

Cruse(1971)将边界积分法应用到断裂分析中去<sup>[31]</sup>，近年来仍在不断改进。在有限元分析方面，布朗大学 Marcal 等人将奇异元引入三维断裂分析中<sup>[32]</sup>。

1972年以前关于表面裂纹的研究工作汇集在文献<sup>[33]</sup>中。从此之后，提出的解答的数目将近增加一倍。在计算方法方面，日本西谷提出体积力法并计算了一系列问题<sup>[34]</sup>。Newman(1979)对这阶段研究成果作了归纳和总结<sup>[35]</sup>，他提出的经验公式已被美国有关规范所采用<sup>[36]</sup>。

关于非穿透裂纹弯曲断裂研究的文章并不多见。Rice 提出线弹簧模型(1972)，将非穿透裂纹转化为板壳问题进行计算<sup>[30]</sup>。当裂纹长度与深度比较大时，可以获得满意结果；但对于短裂纹，该法和其它方法计算结果相差甚大。Shah 和 Kobayash 使用交替法和叠加原理，亦曾讨论过有限厚度板含半椭圆裂纹的弯曲断裂问题<sup>[28]</sup>。

国内关于非穿透裂纹研究开展得很少。上海交大罗祖道提出过近似算法(1978)；哈工大王铎、大连工学院杨芳毓结合压力容器问题分别进行过分析试验(1978)。最近，清华大学工程力学系亦进行了表面裂纹疲劳扩展的试验研究(1982)。

## 五 今后研究方向

综上所述，平板弯曲断裂问题的研究还有待进一步开展，目前的工作状况距离工程需要还有一段很大距离，还有很多领域需要开拓。

- 1) 建立实用的裂纹尖端应力场的模型和断裂准则，弄清现有各种理论的精度与其适用范围。
- 2) 探讨有限尺寸板在不同宽度、不同厚度、不同支承情况下应力强度因子的计算及其变化规律。
- 3) 建立简单而实用的近似分析方法和计算方法。
- 4) 研究复合型平板弯曲断裂问题和相应的断裂准则。
- 5) 研究塑性、大变形等对平板弯曲断裂的影响。近年来已有一些著作论及这方面的工作。如麻省理工学院 Parks 将线弹簧模型用在含表面裂纹壳体的弹塑性断裂分析中<sup>[37]</sup>(1980,1981)。但总的说来，这方面的研究刚刚开始，还缺少有效的办法。由于篇幅限制，本文就不多论述了。

## 参 考 文 献

- [1] 柳春图(1980), Reissner 型中厚板在弯曲问题中裂纹尖端附近应力应变场, 力学研究所工作报告。
- [2] Williams, M.L.(1961), The bending stress distribution at the base of a stationary crack, *J. Appl. Mech.*, 28: 78—82.
- [3] Sih, G.C. and Paris, P.C.(1962), Crack tip stress intensity factors for plane extensional and plate bending problems, *J. Appl. Mech.*, 29: 306—310.
- [4] Hartranft, R.J. and Sih, G.C.(1969), The use of eigenfunction expansions in the general solution of three-dimensional crack problems, *J. Math. and Mech.*, 19.

- [5] Sih, G.C.(1971), A review of the three-dimensional stress problem for a cracked plate, *Int.Fract.Mech.*, 7: 39—67.
- [6] Reissner, E.(1947), On bending of elastic plates, *Quarterly of Appl. Math.*, 5: 55—68.
- [7] 中国科学院力学研究所固体力学研究室(1978), 夹层板的弯曲振动和稳定, 科学出版社.
- [8] Knowles, J.K.and Wang, N.M.(1960), On the bending of an elastic plate containing a crack, *J.Math.and Phy.*, 39: 223—236.
- [9] Hartranft, R.J.and Sih, G.C.(1968), Effect of plate thickness on the bending stress distribution around through cracks, *J. Math. and Phy.*, 47: 276—291.
- [10] Smith, D.G.and Smith, C.W.(1970), A photo-elastic evaluation of the influence of closure and other effects upon the local bending stresses in cracked plates, *Int.J.Fract.Mech.*, 63: 305—318.
- [11] 余寿文, 杨卫(1981), 考虑横向剪切变形时含裂纹平板的渐近分析, 清华大学工作报告.
- [12] 王凯, 汤任基(1979), 薄裂纹板的弯曲, 兰州大学学报, 自然科学版, 力学专号, 1.
- [13] Wilson, W.K.and Thompson, D.G.(1971), On the finite element method for calculating stress intensity factors for cracked plates in bending, *Eng.Fract.Mech.*, 3: 2.
- [14] Barsoum, R.S.(1976), A degenerate solid element for linear fracture analysis of plate bending and general shells, *Int.J.for Num.Meth. in Eng.*, 10: 551—564.
- [15] Zienkiewicz, O.C.(1971), The finite method in engineering science, MCGRAW-HILL, London.
- [16] Yagawa, G.(1979), Finite element analysis of stress intensity factors for plate extension and plate bending problems, *Int.J.Num.Mech.*, 14, 5.
- [17] 钱伟长等(1979), 在奇异项上叠加有限元法计算应力强度因子, “力学学术交流会”论文.
- [18] Jalees Ahmad and Francis-T.C.Loo(1979), Solution of plate bending problems in fracture mechanics using a specialized finite element technique, *Eng.Fract.Mech.*, 11, 4.
- [19] Bergez, D.(1980), Elastic-plastic fracture mechanics (shells and cracked shells), 在清华大学讲授稿.
- [20] 李英治, 柳春图(1981), Reissner型平板弯曲断裂问题分析, 力学研究所工作报告.
- [21] Г. H. 萨文(1958), 孔附近的应力集中, 卢鼎霍译, 科学出版社.
- [22] 汤任基, 蒋柱中(1979), 有限圆板上的径向裂纹系分析, 兰州大学学报, 自然科学版, 力学专号, 1.
- [23] Murthy, M.V.V., Raju, K.N. and Viswanath, S.(1979), On the bending stress distribution at the tip of a stationary crack from Reissners theory, FRACTURE MECHANICS IN ENGINEERING APPLICATION, Ed. by Sih, G.C. and Valluri, S.R. (*Int.J.Fract.*, 17: 537—552).
- [24] Irwin, G.R.(1962), Crack extension force for a part-through crack in a plate, *J.Appl.Mech.*, 29, 4: 651—654.
- [25] Smith, F.W.(1966), Stresses near a semicircular edge crack, Ph.D

thesis, Univ. of Washington.

- [26] Smith, F.W. and Alavi, M.J. (Aug. 1969), Stress-intensity factors for a penny-shaped crack in a half space, *J. Eng. Fract. Mech.*
- [27] Thresher, R.W. and Smith, F.W. (1972), Stress intensity factors for a surface crack in a finite solid, *J. Appl. Mech.*, 39, 1.
- [28] Shah, R.C., and Kobayashi, A.S. (1971), Stress intensity factor for an elliptical crack under arbitrary normal loading, *J. Eng. Fract. Mech.*, 3, 1.
- [29] Smith, F.W. (1976), The semi-elliptical surface crack—A solution by the alternating, *Int. J. Fract.*, 12, 1.
- [30] Rice, J.R. and Levy, N. (1972), The part-through surface crack in an elastic plate, *J. Appl. Mech.*, 39, 1: 185.
- [31] Cruse, T.A. and Van Buren, W. (1971), Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack, *Int. J. Fract. Mech.*, 7, 1.
- [32] Marcal, V. (1972), Three-dimensional finite element analysis for fracture mechanics, THE SURFACE CRACK: PHYSICAL PROBLEMS AND COMPUTATIONAL SOLUTIONS, Ed. by Swedlow, J.L.
- [33] The surface crack: physical problems and computational solutions, Ed. by Swedlow, J.L.
- [34] Nisitani, H., Stress analysis of notch problems, MECHANICS OF FRACTURE 5, Ed. by Sib, G.C.
- [35] Part-through crack fatigue life prediction, A symposium sponsored by ASTM committee E-24 fracture testing, ASTM STP 687.
- [36] Standard practice for fracture testing with surface crack tension specimens, ASTM Designation: E 740—80.
- [37] Parks, D.M., Inelastic analysis of surface flaws using the line-spring model, ICF5.



(学术会议消息)

## 关于召开第16届国际理论与应用力学大会的预告

国际理论与应用力学联合会 (IUTAM) 将于 1984 年 8 月 19—25 日在丹麦哥本哈根/灵贝的丹麦技术大学 (Technical University of Denmark, Lyngby, Denmark) 召开第 16 届国际理论与应用力学大会 (ICTAM)。会议将围绕分析力学、固体力学和流体力学及其应用的整个科学领域进行学术交流。将根据会议委员会的邀请举行一些特邀报告。多达 540 篇的论文将以宣读和墙报讨论形式在会上交流。

会议将特别注意如下三方面的课题:

**多组分介质性质的微观水平的研究;**

**海洋结构物与波浪的相互作用;**

**动力学系统中无规行为的发展。**

上述每一课题均打算既包括流体又包括固体方面的问题, 并设想每一课题的打头邀请报告具有一定的启发性。

有关参加大会事宜的详细通告将于 1983 年发布。

玄重摘译自: *J. of Fluid Mechanics*, vol. 117 (1982).