

用SAP5程序计算具有干摩擦之隔振问题

田千里

李盛章

(中国科学院力学研究所)

(北京工业学院)

摘 要

实验证明同时具有干摩擦与粘性阻尼之隔振器是一种简单而有效的设备,它能够显著地降低悬臂结构的振动水平。但干摩擦是非线性力,计算比较复杂,它不能用通用程序为SAP5求介。本文将摩擦力表达为福里哀级数,求得了响应的级数解,其每一项均对应于某一模态之线性解,可由SAP5程序求出。由于级数收敛很快,因而只需少数几项就能得到足够精确的结果。

一 引 言

由于振动环境恶劣,因而隔振器的应用十分广泛,连高层建筑物也采用它来减振,但振源多半是宽频带的,而其中低频成份又往往占据主导地位,因而隔振频率往往选得很低,如果采用单纯的粘弹性隔振器容易导致静态或风载作用下的不稳定。所以近年来人们多致力于研究各种非线性隔振器,干摩擦隔振器就是一种简单的非线性隔振器,当外界激励很小时,结构不需要减振,此时干摩擦将隔振器锁紧,好似一把安全锁保证了结构的静态稳定性。当激励大到一定程度后安全锁打开,隔振器开始起作用,此时干摩擦起耗能减振作用。由于干摩擦不受温度影响,性能比高分子材料稳定,因而这种干摩擦隔振器有很大的优越性。但在稳态高谱激振时当激励超过一定水平后在共振区干摩擦会失去其控制振动的能力^[1],因而需要与粘弹性材料共同使用,既能控制共振又对温度不太敏感,构造简单而减震效果显著。一机部抗震办公室与七机部七〇三所联合设计的高压电器隔振器就是这种型式的隔振器,是一种很有吸引力的设备。摩擦力与表面状态,正压力等有关,如何控制摩擦力需要根据具体的结构材料进行试验才能决定。由于引入摩擦力后使问题变为非线性,求介起来比较麻烦,所以目前关于这种类型的减振器的研究多停留在简单的一至二自由度体系的水平上^{[2][3][4]},复杂结构都是多自由度体系,对复杂结构应用这种隔振器应当如何分析计算是推广使用它的一个关键,为此本文推广文献^[4]的方法将摩擦力表达为福里哀级数,分别对级数之每一项使用SAP5程序求介,计算了任意复杂悬臂结构使用这种隔振器的响应,求得了响应之级数解。

二 运动方程的建立

如图1,一个复杂的悬臂结构,离散化为多质点弹性体系,各质点之质量为 m_j , $j=1, 2, \dots, m$,结构的底座通过隔振器与地面相连。

结构是线性系统,而隔振器是非线性系统,所以要将此问题分为两步求解,首先列出结构本

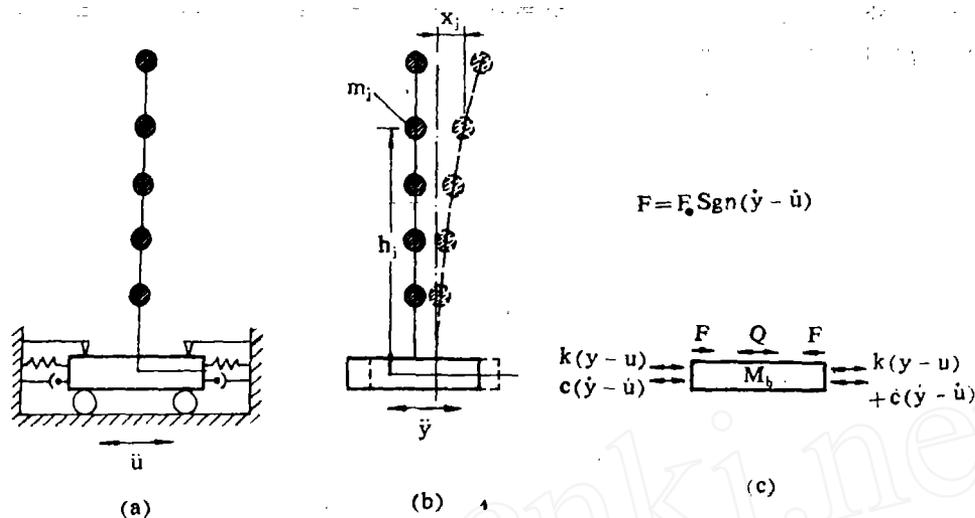


图 1 结构运动与受力示意图

身的运动方程，如图(1-b)有

$$M\ddot{X} + KX = -M\{1\}\ddot{y} \tag{1}$$

当地面作简谱运动时令 $\ddot{u} = \ddot{u}_0 \exp[i(\omega t + \phi)]$ ，底座之响应为 $\ddot{y} = \ddot{y}_0 \exp(i\omega t)$ ， $z = y - u$ 为底座与地面之间的相对位移响应， $i = \sqrt{-1}$ ，

$\{1\}^T = [1, 1, 1, \dots]$ ， T 代表转置。

如图(1-c)，第二步可以列出结构底座之运动方程

$$M_T \ddot{y} + 2kz + 2c\dot{z} + Q = 2F_0 \text{sgn}(\dot{z}) \tag{2}$$

其中 F_0 为摩擦力之幅度， sgn 为方向符号，

$$M_T = M_b + \sum_{j=1}^m m_j, \quad M_b \text{ 为结构底座质量,}$$

$$Q \text{ 为悬臂结构根部切力,} \quad Q = - \sum_{j=1}^m m_j \omega^2 x_j \tag{3}$$

m_j, x_j 分很是 M, X 之第 j 个元素。由(1)–(3)式可以看出 Q 是 x_j 的函数，而 x_j 又是 y 的函数，所以需要将(1)–(3)式联立求解才能计算响应。

我们将 $\text{sgn}(\dot{z})$ 展开为福里哀级数

$$\text{sgn}(\dot{z}) = \frac{4}{\pi} \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{\sin n\omega t}{n} \tag{4}$$

再将 y, X, Q 分解为

$$y = y_0 + \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} y_n \tag{5a}$$

$$X = X_0 + \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} X_n \tag{5b}$$

$$Q = Q_0 + \sum_{1,3,5,\dots}^{\infty} Q_n \tag{5c}$$

下标“0”对应于基础运动引起的各量，下标 n 对应于式(4)中 n 次谐波引起的各量，

将(4), (5a), (5b), (5c)四式代入(1), (2)两式, 将基础运动与干摩擦两部分分开, 并整理同阶次谐波项就得到如下两组方程式

$$M_r \ddot{y}_0 + 2k(y_0 - u) + 2c(\dot{y}_0 - \dot{u}) + Q_0 = 0 \quad (6a)$$

$$M \ddot{X}_0 + K X_0 = -M\{1\} \ddot{y}_0 \quad (6b)$$

$$M_r \ddot{y}_n + 2k y_n + 2c \dot{y}_n + Q_n = \frac{8F_0}{\pi} \frac{\sin(n\omega t)}{n} \quad (7a)$$

$$M \ddot{X}_n + K X_n = -M\{1\} \ddot{y}_n \quad (7b)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, \infty$$

显然, 这样分解后, 每个方程都线性化了, 式(6a)(6b)为基础运动时系统之运动方程, 式(7a)(7b)为干摩擦激振系统之运动方程。

三 运动方程式求解

式(6a)(7a)中 Q_0, Q_n 与 X_0, X_n 有关, 因而这是一个超静定问题, 仿照结构力学中的冗力法, 令

$$Q_0 = \bar{Q}_1 \ddot{y}_0, \quad Q_n = \bar{Q}_n \ddot{y}_n, \quad X_0 = \bar{X}_1 \ddot{y}_0, \quad X_n = \bar{X}_n \ddot{y}_n \quad (8)$$

其中凡是字母头上带横杠的符号均代表底座承受单位加速度之简谐运动时相应的切力与位移响应。通用有限元程序 SAPV 中之 NYDN=5 一节具有一次输入若干频率的基础简谐运动算出各种响应之功能, 因而由 SAP 5 程序很容易求得在结构底座作单位加速度之简谐运动时的各种响应

$$\bar{Q}_n(n\omega_j) \text{ 与 } \bar{X}_n(n\omega_j) \quad (9)$$

这里 $n = 1, 3, 5, \dots, \infty$ 为福里哀级数的项阶,

$j = 1, 2, 3, \dots, m$ 为需要求响应解的离散频率点数。

此时 y_0 及 y_n 仍是未知数, 注意到 $Q_0 = \bar{Q}_0 \ddot{y}_0, Q_n = \bar{Q}_n \ddot{y}_n$, 分别代入式(6a)与式(7a), 即可求得在地面作简谐运动 $u = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ 时之系统响应

$$y_0 = \frac{\sqrt{1 + (2\alpha\beta)^2} U_0}{\sqrt{\left[1 - \beta^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_1}{M_r}\right)\right]^2 + (2\alpha\beta)^2}} \cos(\omega t + \phi - \gamma) \quad (10)$$

其中
$$\alpha = \frac{c}{\sqrt{2M_r k}}, \quad \beta = \omega/\omega_a, \quad \omega_a^2 = \frac{2k}{M_r} \quad (11)$$

$$\gamma = \tan^{-1} \frac{2\alpha\beta^3 \left(1 + \frac{\bar{Q}_1}{M_r}\right)}{\left[1 - \beta^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_1}{M_r}\right)\right]^2 + (2\alpha\beta)^2} \quad (12)$$

不难看出式(10)是单自由度体系在基础作高谐运动时的响应, 这个单自由度体系之质量为 $(M_r + \bar{Q}_1)$ 。

$$y_n = \frac{4F_0/n\pi k}{\sqrt{\left[1 - (n\beta)^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_n}{M_r}\right)\right]^2 + (2n\alpha\beta)^2}} \sin(n\omega t - \theta_n) \quad (13)$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, \infty$$

式(13)是单自由度体系受简谐力 $\frac{4F}{n\pi} \sin n\omega t$ 激励时的响应, 此单自由度之质量为 $(M_r + \bar{Q}_n)$,

$$\text{其中} \quad \theta_n = \tan^{-1} \frac{2n\alpha\beta}{1 - (n\beta)^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_n}{M_r}\right)} \quad (14)$$

$$\text{令} \quad 1 - (n\beta)^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_n}{M_r}\right) = C_n$$

$$2n\alpha\beta = S_n$$

$$C_n^2 + S_n^2 = R_n^2$$

$$n = 1, 3, 5, \dots, \infty$$

$$\text{则有} \quad y(t) = v_0 \left[\frac{\sqrt{11 + S_1^2}}{R_1} \cos(\omega t + \phi - \gamma) + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4F_0}{\pi k n R_n U_0} \sin(n\omega t - \theta_n) \right] \quad (15)$$

$$z(t) = y(t) - u(t) = U_0 \left[\frac{1 - C_1}{R_1} \cos(\omega t + \phi - \theta_1) + \frac{4F_0}{\pi k U_0} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n R_n} \sin(n\omega t - \theta_n) \right] \quad (16)$$

因为摩擦力反向时对应于 $\bar{z}(0) = 0$, 由之可得

$$\phi = \theta_1 + \arcsin \left(\frac{R_1}{1 - C_1} \frac{4F_0}{\pi b U_0} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{C_n}{R_n^2} \right) \quad (17)$$

式(15)给出了悬臂结构底座位移响应之级数解, 级数之每一项对应一个单谐运动, 用 SAPV 可以算出结构底座承受各单谐运动时之各种响应(位移、切力、弯矩等), 叠加各单项响应便得到了我们所要求的结构响应, 由于级数收敛很快, 一般只取级数前几项就有足够之精度, 有些文献在处理干摩擦时往往只取级数之第一项^[5], 因而计算是十分简便的

四 关于解的几点讨论

1. 如果上部结构是刚体, 则 $Q = 0$, 便是文献[4]中已经研究过的单自由度体系, 此时(15)(17)两式分别与[4]中之[5][6]式相同, 显然式(15)是一个等效单自由度体的位移响应式, R_n 中包含的 \bar{Q}_n 代表悬臂结构的等效质量, 它在图端悬臂结构之各阶自然频率 ω_r 处具有峰值, $\frac{\bar{Q}_n}{M_r} \gg 1$ 使 $1/R_n \rightarrow 0$, 注意到当 $Q = 0$ 时级数之系数为 $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ 阶, 而在我们感兴趣的结构各阶自然频率处 $1/R_n \rightarrow 0$, 因而使级数收敛性更进一步加速, 所以一般只取级数的少数几项就有足够之精度了。

2. 式(15)中 $\frac{\sqrt{1 + S_1^2}}{R_1}$, $\frac{F_0}{k R_n}$, 分别为具有粘性阻尼的单自由度体在承受基础简谐运动与外力简谐激振时之响应函数, 此单自由度体之等效质量为 $M_r(1 + \bar{Q}_n/M_r)$, 当 $\beta^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_1}{M_r}\right) = 1$ 时 $\theta_1 = \pi/2$, $y(t)$ 及 $z(t)$ 具有峰值

$$y(t) = U_0 \left[\sqrt{1 + \frac{1}{S_1^2}} \cos(\omega t + \phi - \gamma) + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4F_0}{\pi n k R_n U_0} \sin(n\omega t - \theta_n) \right]$$

$$z(t) = U_0 \left[\frac{1}{R_1} \sin(\omega t + \phi - \gamma) + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{4F_0}{\pi n k R_n U_0} \sin(n\omega t - \theta_n) \right]$$

如果没有干摩擦, 幅度放大约为 $\frac{1}{2\alpha} \sqrt{\frac{M_r + \bar{Q}_1}{M_r}}$ 倍, 引进干摩擦后使放大倍数降低。

$\beta^2 \left(1 + \frac{\bar{Q}_1}{M_r} \right) = 1$ 时 $\omega_0 = \omega_a \sqrt{\frac{M_r}{M_r + \bar{Q}_1}}$, 只要 ω_0 小于图端悬臂结构之基频就有

$\frac{\sqrt{1+S_i^2}}{R_1} \Big|_{\omega=\omega_r} < 1$, 即固端悬臂结构之各阶共振均处于隔振器之隔振区, 因而各阶共振响应

都会得到衰减。(ω_r 为固端悬臂结构之第 r 阶自然频率, $r=1, 2, \dots, n$)。

3. 应当指出的是, 如果隔振器的阻尼很小, 则结构在 ω_0 处之响应, 由于底座运动之放大, 有可能超过未加隔振器前之响应。以一机部抗震办公室与无夕减震器厂共同设计研制的水平剪切式隔振器的应用为例, 该设备用于高压电器悬臂结构之底部, 当隔振器阻尼值 β 不同时, 计算出结构顶端的位移响应如下表。

表 1 隔振器阻尼对结构响应之影响

响 应(公分)	β	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
X_1		13.00	7.00	5.00	3.80	3.40
X_2		1.4	0.95	0.95	0.90	0.85

其中 X_1 为隔振器共振频率(即 ω_0)处结构顶端位移, X_2 为悬臂结构第一阶共振频率处结构顶端之位移。需要指出的是如果不加隔振器, 则固端悬臂结构基频共振时之顶端位移为 9 公分, 可见加隔振器后虽能使结构之一阶响应降低, 但在隔振器的共振频率处如果阻尼太小则由于底座振幅放大, 结构响应也可能大于 9 公分, 所以在宽频激励条件下使用隔振器时其阻尼值不能太小。高分子材料的阻尼值很大, 但其性能对温度十分敏感, 引进干摩擦后可以克服这一缺点, 更重要的是利用干摩擦可在构造上改进悬臂结构之稳定性, 例如在悬臂结构底座下安装水平剪切式隔振器, 并用导向设备限制其转动, 调整导向设备的摩擦力(如改变垫片材料与压紧力)就可以大大的提高其静态与抗风载的稳定性。

4. 当激振频率或幅度过低, 惯性力不足以克服摩擦力时, 隔振器不起作用, 此时悬臂结构为一般固端悬臂结构, 其响应计算可由 SAP5 程序直接算出, 当 $(M_r + \bar{Q})\omega^2 U_0 > F_0$ 后, 隔振器开始起作用, 才须用式(15)计算底座运动。

(本文于 1982 年 2 月 18 日收到)

参 考 文 献

- [1] J.P. 邓哈陀, 机械振动学, 科学出版社 (1964) p. p. 416
- [2] M.S. Hundal, "Response of a base excited system with coulomb and viscous friction" Jour. of Sound and Vibration, 1979, 64 (3) PP. 371-378.
- [3] A. Schlesinger, "Vibration isolation in the response of coulomb friction" Jour of Sound and Vibration, 1979, 63 (2)pp. 213-224.
- [4] E.S. Levitan, "Forced oscillation of a spring-mass system having combined coulomb and viscous damping" Jour of Acoust Soc. Am. (1960), 32 (10) pp. 1265-1269.
- [5] R. Plunkett, "Friction Damping" Damping Applications for Vibration Control, A. S. M. E, A.M.D.-Vol 38 pp. 65-74.

To Calculating the Frictional Isolation Problem by SAP5

Tian Qian-li

(Institute of Mechanics, The Chinese Academy of Sciences)

Li Sheng-zhang

(Beijing Polytechnic College)

Abstract

Experiments show that an isolator which employs a combination of coulomb and viscous damping is a very simple and effective device, it can considerably reduce the vibration level of a cantilever structure. But unfortunately, owing to the nonlinearity of the frictional force, the dynamic analysis of a complex structure based on such system is rather difficult, it cannot be calculated by a general program such as SAP5.

By using the Fourier series to represent the frictional force, a series solution for the structural response is obtained in the present paper.

Each term of the series solution that corresponding to a linear solution of a certain mode is obtained from SAP5. The convergence of the series is very rapid, so a few terms are enough to get an accurate result.

第三届国际近海结构性能会议

3rd International Conference

Behaviour of Off-shore Structures

近海采油平台的设计十分复杂,需要决定环境载荷,勘测与设计基础,对结构进行应力分析,涉及到流体动力学,材料学,结构静动力学,土力学,基础工程学等学科以及它们相互间的耦合作用,随着水深的增加技术难度也不断加大,为了让工程师们与研究工作者能够交流在设计平台时取得的基本理论与应用研究的成果,讨论平台设计中出现的新的技术问题,1976年挪威理工学院发起与荷兰的Delft大学,美国的麻省理工学院(M.I.T)英国的伦敦大学共同组织了一个国际委员会,决定每三年安排一次国际性的近海结构性能会议,简称BOOS会议。第三届BOOS会议于1982年8月2日至5日于英国麻省理工召开,参加会议的有来自二十多个国家的400余名代表,中国科学院力学研究所,武汉岩石土力学研究所,大连工学院等有五位代表分别出席了会议。

会上以大会报告、分组技术报告及广告会议三种形式交流了上百篇技术报告。

几个石油公司在大会上作了综述报告,介绍了近年来新发展的深水平台的技术现况,提出了需要进一步研究的重要课题。在深水建造平台结构动力分析十分重要,但要进行动力分析必须在现场决定基础的性能,给出环境条件为风、浪、流、水、地震等,这些都需要做大量研究工作。技术讲座分流体动力学,基础与结构三个方面进行。和前两届会议相比,这届会议的内容更深更广的研究了深水平台的技术问题,如进行了张力桩的试验与分析,对锚索系统、立管系统进行了非线性分析,提出了拉索塔与张力腿式平台的设计概念与动响应分析,这些柔性系统在流体中振动时除了非线性问题外还有自激振动问题。

深水平台设计的一个重要问题是设法控制结构之动力响应,延长疲劳寿命,一方面要发展柔性平台,另一方面要求对固定式平台作更精确的动力分析,不论是那一种平台,主要的问题都是流体动力载荷、结构分析,与基础设计三个方面,和它们间的相互作用,由于海上采油是一门新型而又重要的工业,有许多问题有待于工程师和研究人员去探索介决。

(田千里)