

九节点四边形等参数单元

中国科学院力学研究所 吴永礼

摘 要

某些作者^[2~4]给出的数值结果表明,在单元形状不规则时,八节点和十二节点的四边形等参数单元的刚度变硬。因此,应用不规则单元所得的结果误差很大。计算结果没有由二个或四个六节点三角形组成的四边形所得的结果好。本文表明,假使四边形单元是九节点单元,拉格朗日多项式作为插值函数,那么不规则单元所得的结果与规则单元所得的结果基本上一致。数值结果表明,九节点等参数单元比八节点、十二节点四边形等参数单元和由二个或四个六节点三角形组成的四边形单元好。

一、前 言

等参数单元是有限元中一类比较重要的单元。普遍采用的形状函数是“Serendipity”族函数^[1]。近年来,一些作者讨论了四边形八节点和十二节点单元在单元形状不规则时,产生刚度变硬,因而产生计算结果不好的现象。Stricklin等^[2]以悬臂梁为例,比较了五种单元划分对计算结果的影响,在四边形形状与矩形差别较大时,八节点单元的计算结果极不合理,计算结果还表明,八节点的四边形等参数单元不如由二个或四个六节点三角形组成的四边形单元好。Bäcklund^[3]对八节点四边形单元采用 2×2 高斯积分点,重新计算了文献[2]中的例子,计算结果表明比用 3×3 高斯积分点要略微好一些,但没有实质性的改进。Gifford^[4]用十二节点的四边形等参数单元又对此问题进行了计算,给出了用 3×3 和 4×4 高斯积分点计算的最大位移和最大应力的结果,数值计算结果表明,即使采用十二节点的单元,在四边形形状不规则时,结果仍旧不如由二个或四个六节点三角形组成的四边形单元好。

本文通过数值算例表明,利用Lagrange多项式作为形状函数的九节点四边形等参数单元不但比八节点等参数单元好,而且比十二节点等参数单元和六节点三角形组成的四边形单元好。四边形的形状发生变化时,计算结果变化不大,因而,九节点四边形等参数单元是一种比较好的等参数单元。

二、算例和计算结果

八节点和九节点等参数四边形单元的形状函数和计算步骤在文献[1、5]中有所介绍,这里不再重复,下面给出二个例子的计算结果。

1982年2月收到。

例 1, 图 1 所示的悬臂梁^[2~4], 分五种单元划分情况, 载荷为集中力 P , 表 1~2 汇集了文献[2~4]的计算结果及本文用八节点和九节点单元计算的结果。

为了考察在其他载荷作用下, 网格划分的影响和二种等参数单元的精确度, 表 3 列出了同一个梁在集中端弯矩作用下八节点和九节点等参数单元的计算结果。

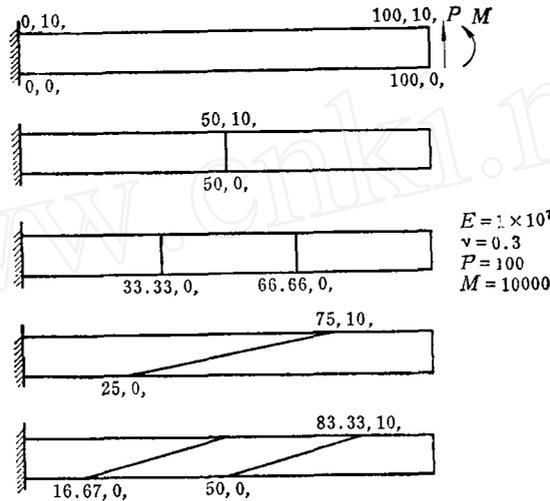


图 1 悬臂梁和单元划分

Fig. 1 A cantilever beam and element configuration

表 1 图 1 所示的悬臂梁在载荷 P 作用下, 端部上、中、下各点的位移。梁理论 (考虑剪应变) $\nu = 0.04032$

Table 1 Tip deflection of a cantilever beam under load P as shown in fig.1 ($\nu = 0.04032$ by beam theory including shear strain)

网格	三角形组成的四边形 ⁽²⁾		12节点四边形 ⁽⁴⁾		8节点四边形		9节点四边形	
	二个三角形	四个三角形	3 × 3	4 × 4	3 × 3	2 × 2	3 × 3	2 × 2
1	0.03001	0.03087	0.03761	0.03761	0.03054	0.03758	0.03101	0.04023
					0.03051	0.03755	0.03100	0.04027
					0.03054	0.03758	0.03101	0.04023
2	0.03719	0.03804	0.03875	0.03875	0.03720	0.03871	0.03817	0.04023
					0.03721	0.03872	0.03816	0.04027
					0.03720	0.03871	0.03817	0.04023
3	0.03871	0.03935	0.03926	0.03926	0.03877	0.03922	0.03937	0.04023
					0.03876	0.03922	0.03937	0.04027
					0.03877	0.03922	0.03937	0.04027
4	0.03185	0.03202	0.01970	0.01542	0.00644	0.01449	0.03165	0.04434
					0.00647	0.01463	0.03164	0.04194
					0.00643	0.01456	0.03167	0.04434
5	0.03824	0.03845	0.03165	0.02928	0.01766	0.03026	0.03326	0.04262
					0.01773	0.03112	0.03326	0.04131
					0.01766	0.03117	0.03326	0.04262

表2 图1所示的梁在载荷 P 作用下,根部的最大应力。梁理论: ± 600.0 Table 2 Peak stresses at the root of a cantilever beam under load P as shown in Fig.1 (± 600.0 by beam theory)

网 格	8 节 点 2×2	9 节 点 2×2	12节点〔4〕 3×3	12节点〔4〕 4×4
1	± 600.0	± 600.0	± 600.0	± 600.0
2	± 600.0	± 600.0	± 600.0	± 600.0
3	± 600.0	± 600.0	± 600.0	± 600.0
4	+262.9 -142.2	+605.6 -614.8	+668.2 -394.5	+480.2 -305.2
5	+440.3 -385.6	+603.8 -609.9	+859.2 -602.0	+762.7 -565.1

表3 图1所示的梁在弯矩 M 作用下的位移和应力(2×2)Table 3 Tip deflection and peak stresses of a cantilever beam under a moment M as shown in Fig.1 (2×2)

网 格	端 部 各 点 的 位 移			最 大 应 力		
	8 节 点	9 节 点	梁 理 论	8 节 点	9 节 点	梁 理 论
1	0.05735 0.05728 0.05735	0.06000 0.06000 0.06000	0.06000	± 600.0	± 600.0	± 600.0
2	0.05848 0.05844 0.05848	0.06000 0.06000 0.06000		± 600.0	± 600.0	
3	0.05899 0.05895 0.05899	0.06000 0.06000 0.06000		± 600.0	± 600.0	
4	0.02138 0.02297 0.02572	0.06000 0.06000 0.06000		+245.0 -89.3	± 600.0	
5	0.04723 0.04713 0.04595	0.06000 0.06000 0.06000		+458.0 -404.5	± 600.0	

例2, 图2所示的悬臂梁,分二种单元划分情况,载荷仍分为集中力和集中弯矩二种情况。表4列出了用八节点和九节点二种单元计算的结果。表中的应力是采用文献〔6〕中的方法计算得到的。

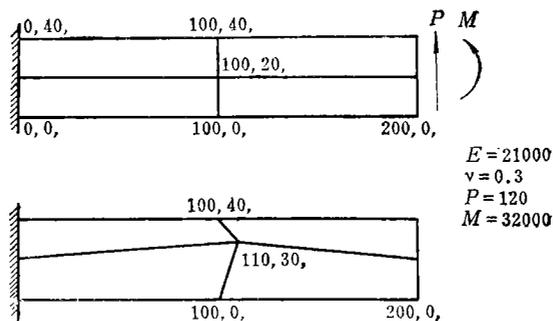


图2 悬臂梁和单元划分

Fig.2 A cantilever beam and element configuration

表4 图2所示的梁在载荷 P 或弯矩 M 作用下的位移和应力(2×2)
 Table 4 Tip deflection and peak stresses of a cantilever beam
 under load P or moment M as shown in Fig.2 (2×2)

载 荷	网 格	端 部 各 点 的 位 移			根 部 最 大 应 力		
		8 节 点	9 节 点	梁 理 论	8 节 点	9 节 点	梁 理 论
集 中 力 P	1	2.8983	2.9320	2.9486	± 92.01	± 90.64	± 90.00
		2.9030	2.9405				
		2.9069	2.9405				
		2.9030	2.9405				
		2.8983	2.9320				
	2	2.8575	2.9315	5.7143	$+ 82.26$ $- 84.83$	$+ 87.91$ $- 90.92$	
		2.8469	2.9231				
		2.8265	2.9399				
		2.8449	2.9228				
		2.8517	2.9301				
弯 矩 M	1	5.6696	5.7114	5.7143	± 122.6	± 120.3	± 120.0
		5.6610	5.7109				
		5.6656	5.7094				
		5.6610	5.7109				
		5.6696	5.7114				
	2	5.6916	5.7176	5.7143	$+ 116.9$ $- 105.5$	$+ 120.0$ $- 120.4$	
		5.6853	5.7098				
		5.6768	5.7111				
		5.6857	5.7087				
		5.6917	5.7176				

三、结论和看法

本文的计算结果表明,对于九节点等参数单元,用 2×2 高斯积分点较好。这一点是与文献[3~5]中的八节点和十二节点等参数单元计算结果相一致的。

等参数单元虽然可以用于任意单元形状,但是用矩形单元比较好,单元形状与矩形形状差别越大,计算结果的误差就越大。在 Serendipity 族的八节点和十二节点等参数单元中,这个现象特别明显,而在九节点等参数单元中,这个现象不太明显。例如表1中第4、5两种网格,用 Serendipity 族的等参数单元所得的结果极不合理,误差可达60%,表2中的应力误差也是很大的;而用九节点等参数单元时,误差始终很小,只有百分之几。这是九节点单元比八节点或十二节点单元优越的一个主要点。

从数学理论上分析单元形状对计算结果的影响是很重要的一个课题。但是,目前尚未取得较大的进展。文献[8~9]中曾用 Taylor 级数展开的办法,探讨过单元边界形状对高阶单元的精度影响,结论是当单元边界为曲线边界时,高阶等参数单元的收敛性将下降到与线性单元一样的量级。但是,文献[10]中则不同意这种证明方法,而从另一个角度来解释这种现象。本文的计算所用的单元是直线四边形,而且边上点都处于中分点的位置,上述文献中的两种观点都不能解释本文的计算结果。

把拉格朗日多项式作为位移插值函数用于规整形单元(矩形和长方体)的想法最早是 Argyris 等^[7]提出来的。文献[5]认为这种单元没有 Serendipity 族等参数单元好,目前普遍采用的也是 Serendipity 族等参数单元,但是本文提供的计算结果却表明九节点等参数单元是比较好的一种单元。

顺便指出, 九节点单元中的内节点的自由度可以在形成单元刚度矩阵后用凝缩法消去, 这样九节点单元与八节点单元的总刚度矩阵所需的内存是相同的。因而, 这两种单元所需计算机内存量基本上是相同的。

参 考 文 献

- [1] Zienkiewicz, O. C., Irons, B. M., Ergatoudis, J., Ahmad, S., and Scott, F. C. Isoparametric and associated element families for two and three dimensional analysis in Finite element method in stress analysis, Holland, I and Bell, K eds. Chapter 13 Tapir Trondheim 1969.
- [2] Stricklin, J. A., Ho, W. S., Richardson, E. Q. and Haisler, W. E., On isoparametric vs linear strain triangular elements. Int. Jour. Num. Methods in Eng. Vol 11 1041-1043 1977.
- [3] Bäcklund, J. On isoparametric elements. Int. Jour. Num. Methods in Eng. Vol 12 731 1978.
- [4] Gifford, L. M. More on distorted isoparametric elements. Int. Jour. Num. Methods in Eng. Vol 14 290-291 1979.
- [5] Zienkiewicz, O. C. The finite element method. third edition. McGraw-Hill Book Company (UK) Limited 1977.
- [6] Hinton, E., Scott, F. C. and Ricketts, R. E. Local least squares stress smothing for parabolic isoparametric elements. Int. Jour. Num. Methods in Eng. Vol 9 235-238 1975.
- [7] Argyris, J. H., Buck, K. E., Fried, I., Garezek, G., and Sharpf, D. W., Some new elements for matrix displacement methods. 2nd Conf. on Matrix Methods in struct. mech., Air. Force Inst. of Techn., Wright Patterson Base, Ohio, Oct. 1968.
- [8] Fried, I., Accuracy of complex finite elements. AIAA Journal Vol 10 347-349 1972.
- [9] Fried, I., Possible loss of accuracy in curved (isoparametric) finite elements—comment on a paper by Henshell, Walters and Warburton. Jour. Sound and Vibration Vol 23 507-510 1972.
- [10] Henshell, R. D., Walters, D. and Warburton, G. B., On possible loss of accuracy in curved finite elements. Jour. Sound and Vibration, Vol 23 510-513 1972.

9-NODE QUADRILATERAL ISOPARAMETRIC ELEMENT

Wu Yongli

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

Several Authors have presented numerical results which demonstrated the stiffening of 8-node and 12-node quadrilateral isoparametric elements when distorted from a rectangular shape. In consequence the error introduced by using distorted 8-node or 12-node quadrilateral isoparametric element is significant. The results obtained by distorted elements are essentially consistent with those obtained by undistorted elements if 9-node element is used as quadrilateral isoparametric element and Lagrange polynomials as interpolation functions. Numerical results show that 9-node isoparametric element is superior to 8-node isoparametric element, 12-node isoparametric element and quadrilateral element consisting of two or four linear strain triangles.