应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Orr-Sommerfeld方程的Green函数和积分方程解法

李家春

（中国科学院力学研究所，1981年11月2日收到）

摘　要

本文提出了一种求解线性稳定性理论Orr-Sommerfeld方程的方法．我们首先定义了该方程的Green函数，并将它表达成矩阵形式；然后证明了Green函数的互易性；最后导出了等价于原方程的线性积分方程．该方法适用于两固壁间任意Reynolds数下各种主流速度分布的情况．

一、引　言

为了探讨物理问题的数学准确解在实际上是否能真正实现，人们研究了稳定性问题．流体运动稳定性理论可以帮助我们了解湍流的发生和不同运动状态间的过渡．五十年代以前，研究仅局限于线性理论．近廿年来，人们才开始对有限振幅扰动的非线性理论予以足够的重视．

平行流的稳定性是流体运动稳定性的典型问题．如果仅考虑横向“Tollmien波”的模式，线性理论便可归结成Orr-Sommerfeld方程（以下简称为O-S方程）的本征值问题．二十年代，W．Heisenberg等首先用渐近方法进行过研究．但由于对转向点附近的奇异性以及粘滞性对稳定性的影响缺乏了解，渐近分析在数学上、物理上遇到了极大困难．四十年代，由于林家翘的出色工作[1]，才找到了正确选择渐近解分支的途径，并用Reynolds应力解释了从主流通过粘滞性的作用把能量传递给扰动并使之波幅增长而引起失稳的现象．他的结果同G．B．Schubauer，H．K．Skramstad的实验是一致的．然而，用上述方法得到的解并非是一致有效的．近卅年来，对于O-S方程的一致有效渐近解进行了大量研究[2],[3]．它们要借助于人们所不熟悉的特殊函数——广义Airy函数来表达．为了得到中性稳定曲线，还要经过繁冗的计算，因此人们常常通过别的途径进行研究．

1953年，L．H．Thomas[4]把有限差分法用于这个问题．他采用了Numerov五点差分格式将O-S方程化成线性代数方程组，再用Gauss消去法计算．他得到了本征值、本征函数和临界Reynolds数，但研究仅限于最不稳定的模式．

求解O-S方程的另一有效方法是正交函数展开法．1958年，C．L．Dolph，和D．C．Lewis[5]，1962年A．P．Gallagher和A．M．Mercer[6]，1968年C．E．Grosch[7]分别用

Chandrasekhar-Reid函数系及其推广形式来展开，研究了平面Couette流，平面Poiseuille流和非定常流的稳定性．一般说来，展开式应取相当多的项（譬如：二十项）才能获得较准确的结果．1971年，S. A. Orszag[8]又用 Chebyshev 多项式为正交函数系来进行展开．对于无限次可微的函数，其精度可大大提高．上述方法都归结成展开系数的无限阶线性代数方程组，它可以在某项处截断来进行计算，并同渐近解和 L. H. Thomas 的结果进行了比较．

本文提出了用Green 函数方法来求解O-S方程；找到了 Green 函数的矩阵表达式；证明了它的互易性；最后导出了相应的线性积分方程．若采用了适当的积分近似表达式，就可归结成非自伴矩阵的广义特征值问题，它通常可用QR方法求解．由于它适用于任意 Reynolds 数下各种不同速度分布的流动，具有一定普遍意义；随着积分方程理论的发展，可以期望，它提供了求解O-S方程的另一有效途径．

二、问题的数学提法

现在用线性理论来研究平行流的稳定性．由 Squire 定理，我们仅讨论二维横向扰动模式，即所谓“Tollmien波”就可以了．这时，扰动流函数可假定为

$$\psi(t,x,y)=\phi(y)e^{i\alpha(x-ct)} \tag{2.1}$$

其中，α为波数，ϕ为波幅，c是复数，其实部c_r为波速，而αc_i为波幅的时间增长（或衰减）指数．

因为在基本流$U(y)$上叠加了扰动(2.1)以后仍要满足 Navier-Stokes 方程和相应的边界条件，经线性化后，我们便可得到关于扰动波幅$\phi(y)$的O-S方程：

$$\{(D^2-\alpha^2)^2+i\alpha R[(U-c)(D^2-\alpha^2)-D^2U]\}\phi=0 \tag{2.2}$$

边界条件为

$$\phi(1)=\phi'(1)=0 \tag{2.3}$$

$$\phi(-1)=\phi'(-1)=0 \tag{2.4}$$

在方程（2.2)中，物理量均已无量纲化，R为Reynolds数，$D=\dfrac{d}{dy}$是微分算子，边界条件(2.3),(2.4)是在固定壁面上的条件．

这样，平行流的线性稳定性理论就归结为O-S方程的本征值问题，我们可以根据本征值c虚部c_i的符号来判定流体运动是否稳定．若$c_i(\alpha,R)>0$，流动是不稳定的；若$c_i(\alpha,R)<0$，流动是稳定的；$c_i(\alpha,R)=0$ 则是中性稳定的情况．

如引言所述，可以用各种方法来求解上述本征值问题．下面我们来叙述本文首先采用的Green函数方法．

三、Green函数及互易原理

从O-S方程（2.2），边界条件（2.3），（2.4），我们可按如下方式定义Green函数

$$(D^2-\alpha^2)^2\ G(y,\eta)=\delta(y-\eta) \tag{3.1}$$

$$G(1,\eta)=G'_y(1,\eta)=0 \tag{3.2}$$

$$G(-1,\eta)=G'_y(-1,\eta)=0 \tag{3.3}$$

$$G_y^{(i)}(\eta+0,\ \eta)-G_y^{(i)}(\eta-0,\ \eta)=\delta_3^i \qquad i=0,\ 1,\ 2,\ 3 \tag{3.4}$$

方程中，δ为Dirac delta函数，上标“$'$”“i”表示对y的一次或i次微商，δ_3^i为Kronecker记号．由此可见，$G(y,\eta)$ 在区域$-1\leqslant y\leqslant\eta$，$\eta\leqslant y\leqslant 1$ 中分别满足齐次方程和齐次边界条件．在$y=\eta$处，Green 函数本身及其一、二阶导数连续，其三阶导数有间断．因此，在区域$\eta\leqslant y\leqslant 1$ 中，$G(y,\eta)$可表达为如下函数的线性组合

$$\phi_1(y)=\mathrm{sh}\alpha(y-1)-\alpha(y-1)\mathrm{ch}\alpha(y-1) \tag{3.5}$$

$$\phi_2(y)=(y-1)\mathrm{sh}\alpha(y-1) \tag{3.6}$$

在区域 $-1\leqslant y\leqslant\eta$ 中，则可表达为另两个函数的线性组合

$$\phi_3(y)=\mathrm{sh}\alpha(y+1)-\alpha(y+1)\mathrm{ch}\alpha(y+1) \tag{3.7}$$

$$\phi_4(y)=(y+1)\mathrm{sh}\alpha(y+1) \tag{3.8}$$

于是

$$G(y,\eta)=\begin{cases} A_1(\eta)\phi_1(y)+A_2(\eta)\phi_2(y) & \eta\leqslant y\leqslant 1 \quad (3.9)\\ -A_3(\eta)\phi_3(y)-A_4(\eta)\phi_4(y) & -1\leqslant y\leqslant\eta \quad (3.10)\end{cases}$$

该函数已满足方程（3.1）及边界条件（3.2）、（3.3），现在我们只需利用条件（3.4）来确定系数$A_i(\eta)$，$(i=1,\ 2,\ 3,\ 4)$由此便可导出系数$A_i(\eta)$的线性方程组：

$$\mathscr{D}\mathbf{A}=\mathbf{E} \tag{3.11}$$

其中$\mathscr{D}$为系数行列式矩阵

$$\mathscr{D}=\begin{vmatrix} \phi_1(\eta) & \phi_2(\eta) & \phi_3(\eta) & \phi_4(\eta)\\ \phi_1'(\eta) & \phi_2'(\eta) & \phi_3'(\eta) & \phi_4'(\eta)\\ \phi_1''(\eta) & \phi_2''(\eta) & \phi_3''(\eta) & \phi_4''(\eta)\\ \phi_1'''(\eta) & \phi_2'''(\eta) & \phi_3'''(\eta) & \phi_4'''(\eta)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} \begin{matrix}\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)\\ -\alpha(\eta-1)\mathrm{ch}\alpha(\eta-1)\end{matrix} & (\eta-1)\mathrm{sh}\alpha(\eta-1) & \begin{matrix}\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)\\ -\alpha(\eta+1)\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)\end{matrix} & (\eta+1)\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)\\ -\alpha^2(\eta-1)\mathrm{sh}\alpha(\eta-1) & \begin{matrix}\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)\\ +\alpha(\eta-1)\mathrm{ch}\alpha(\eta-1)\end{matrix} & -\alpha^2(\eta+1)\mathrm{sh}\alpha(\eta+1) & \begin{matrix}\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)\\ +\alpha(\eta+1)\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)\end{matrix}\\ \begin{matrix}-\alpha^2[\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)\\ +\alpha(\eta-1)\mathrm{ch}\alpha(\eta-1)]\end{matrix} & \begin{matrix}2\alpha\mathrm{ch}\alpha(\eta-1)\\ +\alpha^2(\eta-1)\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)\end{matrix} & \begin{matrix}-\alpha^2[\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)\\ +\alpha(\eta+1)\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)]\end{matrix} & \begin{matrix}2\alpha\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)\\ +\alpha^2(\eta+1)\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)\end{matrix}\\ \begin{matrix}-\alpha^2[2\alpha\mathrm{ch}\alpha(\eta-1)\\ +\alpha^2(\eta-1)\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)]\end{matrix} & \begin{matrix}3\alpha^2\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)\\ +\alpha^3(\eta-1)\mathrm{ch}\alpha(\eta-1)\end{matrix} & \begin{matrix}-\alpha^2[2\alpha\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)\\ +\alpha^2(\eta+1)\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)]\end{matrix} & \begin{matrix}3\alpha^2\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)\\ +\alpha^3(\eta+1)\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)\end{matrix}\end{vmatrix} \tag{3.12}$$

A，**E** 分别为向量：

$$\mathbf{A}(\eta)=\begin{bmatrix} A_1(\eta)\\ A_2(\eta)\\ A_3(\eta)\\ A_4(\eta)\end{bmatrix} \qquad \mathbf{E}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\\ 1\end{bmatrix} \tag{3.13}$$

由此可以得到

$$A_i(\eta)=\frac{\Delta_{4i}}{\Delta} \tag{3.14}$$

式中，Δ，Δ_{4i} 为系数行列式和相应的代数余子式．A_i 的表达式为：

$$A_1=\frac{\{-\alpha(\eta+1)[\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)-2\alpha\mathrm{ch}\,\alpha(\eta-1)]+\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)[\alpha(\eta-1)\mathrm{ch}2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha]\}}{\overline{\Delta}} \tag{3.15}$$

$$A_2=\frac{[2\alpha^3(\eta+1)\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)-\alpha^2(\eta-1)\mathrm{sh}2\alpha\,\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)]}{\overline{\Delta}} \tag{3.16}$$

$$A_3=\frac{\{-\alpha(\eta-1)[\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)+2\alpha\mathrm{ch}\alpha(\eta+1)]+\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)[\alpha(\eta+1)\mathrm{ch}\,2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha]\}}{\overline{\Delta}} \tag{3.17}$$

$$A_4=\frac{[-2\alpha^3(\eta-1)\mathrm{sh}\alpha(\eta+1)+\alpha^2(\eta+1)\mathrm{sh}2\alpha\,\mathrm{sh}\alpha(\eta-1)]}{\overline{\Delta}} \tag{3.18}$$

其中

$$\overline{\Delta}=\frac{\Delta}{2\alpha}=2\alpha^3(\mathrm{sh}^2\,2\alpha-4\alpha^2)$$

我们宁可用矩阵形式来表达上述结果

$$\mathbf{A}_1(\eta)=\begin{bmatrix} A_1(\eta) \\ A_2(\eta) \end{bmatrix}=\mathscr{M}\begin{bmatrix} \phi_3(\eta) \\ \phi_4(\eta) \end{bmatrix}=\mathscr{M}\mathbf{\Phi}_2(\eta) \tag{3.19}$$

这里

$$\mathscr{M}=\frac{1}{\overline{\Delta}}\begin{bmatrix} -2\alpha\mathrm{ch}2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha & -2\alpha^2\mathrm{sh}2\alpha \\ 2\alpha^2\mathrm{sh}2\alpha & \alpha^2(2\alpha\,\mathrm{ch}\,2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha) \end{bmatrix} \tag{3.20}$$

同样地，

$$\mathbf{A}_2(\eta)=\begin{bmatrix} A_3(\eta) \\ A_4(\eta) \end{bmatrix}=\mathscr{N}\begin{bmatrix} \phi_1(\eta) \\ \phi_2(\eta) \end{bmatrix}=\mathscr{N}\mathbf{\Phi}_1(\eta) \tag{3.21}$$

其中

$$\mathscr{N}=\frac{1}{\overline{\Delta}}\begin{bmatrix} 2\alpha\mathrm{ch}2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha & -2\alpha^2\mathrm{sh}2\alpha \\ 2\alpha^2\mathrm{sh}2\alpha & -\alpha^2(2\alpha\,\mathrm{ch}\,2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha) \end{bmatrix} \tag{3.22}$$

显然，

$$\mathscr{N}=-\mathscr{M}^T \tag{3.23}$$

上标 T 表示矩阵的转置，于是

$$G(y,\eta)=\begin{cases} \mathbf{\Phi}_1^T(y)\mathbf{A}_1(\eta)=\mathbf{\Phi}_1^T(y)\mathscr{M}\mathbf{\Phi}_2(\eta) & \eta\leqslant y\leqslant 1 \\ -\mathbf{\Phi}_2^T(y)\mathbf{A}_2(\eta)=-\mathbf{\Phi}_2^T(y)\mathscr{N}\mathbf{\Phi}_1(\eta) & -1\leqslant y\leqslant\eta \end{cases} \tag{3.24}$$

由（3.23）式显然可知

$$G(\eta,y)=\begin{cases} -\mathbf{\Phi}_2^T(\eta)\mathbf{A}_2(y)=-\mathbf{\Phi}_2^T(\eta)\mathscr{N}\mathbf{\Phi}_1(y)=\mathbf{\Phi}_1^T(y)\mathscr{M}\mathbf{\Phi}_2(\eta) & \eta\leqslant y\leqslant 1 \\ \mathbf{\Phi}_1^T(\eta)\mathbf{A}_1(y)=\mathbf{\Phi}_1^T(\eta)\mathscr{M}\mathbf{\Phi}_2(y)=-\mathbf{\Phi}_2^T(y)\mathscr{N}\mathbf{\Phi}_1(\eta) & -1\leqslant y\leqslant\eta \end{cases} \tag{3.25}$$

比较（3.24），（3.25)，我们证明了Green函数的互易性质

$$G(y,\,\eta)=G(\eta,\,y) \tag{3.26}$$

这对于自伴的方程(3.1)是必然的结论．

如果我们引进向量 $\mathbf{\Phi}(y)$

$$\Phi(y)=\begin{pmatrix}\mathrm{ch}\,\alpha y\\ \mathrm{sh}\,\alpha y\\ y\,\mathrm{ch}\,\alpha y\\ y\,\mathrm{sh}\,\alpha y\end{pmatrix} \tag{3.27}$$

也就可以用$\Phi(y)$，即$\mathrm{ch}\alpha y$，$\mathrm{sh}\alpha y$，$y\mathrm{ch}\alpha y$，$y\mathrm{sh}\alpha y$的线性组合来表达Green函数了．由(3.24)(3.25)得

$$G(y,\eta)=\begin{cases}\Phi^T(y-1)\mathscr{G}\Phi(\eta+1) & \eta\leqslant y\leqslant 1\\ \Phi^T(\eta-1)\mathscr{G}\Phi(y+1) & -1\leqslant y\leqslant\eta\end{cases} \tag{3.28}$$

式中矩阵

$$\mathscr{G}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&\mu_{11}&-\alpha\mu_{11}&\mu_{12}\\ 0&-\alpha\mu_{11}&\alpha^2\mu_{11}&-\alpha\mu_{12}\\ 0&\mu_{21}&-\alpha\mu_{21}&\mu_{22}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\ 0&-2\alpha\mathrm{ch}2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha&\alpha[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha]&-2\alpha^2\mathrm{sh}2\alpha\\ 0&\alpha[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha]&-\alpha^2[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha]&2\alpha^3\mathrm{sh}2\alpha\\ 0&2\alpha^2\mathrm{sh}2\alpha&-2\alpha^3\mathrm{sh}2\alpha&-\alpha^2[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha]\end{pmatrix} \tag{3.29}$$

上式中μ_{ik}为矩阵$\mathscr{M}$第i行、第k列的元素．我们不妨称矩阵$\mathscr{G}$为Green矩阵．

四、Orr-Sommerfeld方程的等价积分方程

在上一节，我们得到了Green函数的表达式，于是，我们不难得到如下形式的积分方程

$$\phi(y)=-i\alpha R\int_{-1}^{1}G(y,\eta)[(U-c)(D_\eta^2-\alpha^2)-D_\eta^2U]\phi(\eta)d\eta \tag{4.1}$$

上式中$D_\eta=\dfrac{d}{d\eta}$指关于η的微分算子．用分部积分，将上式变成

$$\phi(y)=-i\alpha R\int_{-1}^{1}[(U-c)(G''_{\eta\eta}-\alpha^2G)+2U'_\eta G_\eta]\phi(\eta)d\eta \tag{4.2}$$

由(3.27)式

$$\frac{d\Phi(\eta)}{d\eta}=\mathscr{D}\Phi(\eta) \tag{4.3}$$

其中矩阵$\mathscr{D}$为

$$\mathscr{D}=\begin{pmatrix}0&\alpha&0&0\\ \alpha&0&0&0\\ 1&0&0&\alpha\\ 0&1&\alpha&0\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

类似地，

$$\frac{d\Phi^T(\eta)}{d\eta}=\Phi^T(\eta)\mathscr{D}^T \tag{4.5}$$

$\mathscr{D}^T$ 为矩阵 $\mathscr{D}$ 的转置.

$$\mathscr{D}^T=\begin{bmatrix} 0 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & \alpha & 0 \end{bmatrix} \tag{4.6}$$

所以

$$G_\eta(y,\eta)=\begin{cases}\Phi^T(y-1)\mathscr{G}\mathscr{D}\Phi(\eta+1) & \eta\leqslant y\leqslant 1 \\ \Phi^T(\eta-1)\mathscr{D}^T\mathscr{G}\Phi(y+1) & -1\leqslant y\leqslant \eta\end{cases} \tag{4.7}$$

不妨将矩阵 $\mathscr{G}\mathscr{D}$，$\mathscr{D}^T\mathscr{G}$ 看作 Green 矩阵 的微商 $\mathscr{G}'$

$$\mathscr{G}_1'=\mathscr{G}\mathscr{D}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\alpha^2\text{sh}2\alpha & -2\alpha^3\text{sh}2\alpha & \alpha^2[2\alpha\text{ch}2\alpha+\text{sh}2\alpha] \\ 0 & 2\alpha^3\text{sh}2\alpha & 2\alpha^4\text{sh}2\alpha & -\alpha^3[2\alpha\text{ch}2\alpha+\text{sh}2\alpha] \\ 0 & \alpha^2[2\alpha\text{ch}2\alpha-\text{sh}2\alpha] & \alpha^3[2\alpha\text{ch}2\alpha-\text{sh}2\alpha] & -2\alpha^4\text{sh}2\alpha \end{bmatrix} \tag{4.8}$$

同样地，可得

$$\mathscr{G}_2'=\mathscr{D}^T\mathscr{G}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha^2\text{sh}2\alpha & -2\alpha^3\text{sh}2\alpha & \alpha^2[2\alpha\text{ch}2\alpha-\text{sh}2\alpha] \\ 0 & 2\alpha^3\text{sh}2\alpha & -2\alpha^4\text{sh}2\alpha & \alpha^3[2\alpha\text{ch}2\alpha-\text{sh}2\alpha] \\ 0 & \alpha^2[2\alpha\text{ch}2\alpha+\text{sh}2\alpha] & -\alpha^3[2\alpha\text{ch}2\alpha+\text{sh}2\alpha] & 2\alpha^4\text{sh}2\alpha \end{bmatrix} \tag{4.9}$$

对于二次微商有类似的结果：

$$\left.\begin{aligned} \mathscr{G}_1''&=\mathscr{G}\mathscr{D}^2 \\ \mathscr{G}_2''&=\mathscr{D}^{T^2}\mathscr{G} \end{aligned}\right\} \tag{4.10}$$

式中

$$\mathscr{D}^2=\begin{bmatrix} \alpha^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\alpha & \alpha^2 & 0 \\ 2\alpha & 0 & 0 & \alpha^2 \end{bmatrix} \tag{4.11}$$

而 $\mathscr{D}^{T^2}$ 为它的转置. 令

$$\begin{aligned} \mathscr{K}_1&=(\mathscr{G}_1''-\alpha^2\mathscr{G})=\mathscr{G}(\mathscr{D}^2-\alpha^2\mathscr{E}) \\ \mathscr{K}_2&=(\mathscr{G}_2''-\alpha^2\mathscr{G})=(\mathscr{D}^{T^2}-\alpha^2\mathscr{E})\mathscr{G} \end{aligned} \tag{4.12}$$

式中，$\mathscr{E}$ 为单位矩阵，不难得到

$$\mathscr{K}_1=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4\alpha^3\text{sh}2\alpha & 2\alpha^2[2\alpha\text{ch}2\alpha+\text{sh}2\alpha] & 0 & 0 \\ 4\alpha^4\text{sh}2\alpha & -2\alpha^3[2\alpha\text{ch}2\alpha+\text{sh}2\alpha] & 0 & 0 \\ 2\alpha^3[2\alpha\text{ch}2\alpha-\text{sh}2\alpha] & -4\alpha^4\text{sh}2\alpha & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.13}$$

$$\mathscr{K}_2=\frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 0 & 4\alpha^3\mathrm{sh}2\alpha & -4\alpha^4\mathrm{sh}2\alpha & 2\alpha^3[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha-\mathrm{sh}2\alpha] \\ 0 & 2\alpha^3[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha] & -2\alpha^3[2\alpha\mathrm{ch}2\alpha+\mathrm{sh}2\alpha] & 4\alpha^4\mathrm{sh}2\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.14}$$

所以

$$G''_{\eta\eta}-\alpha^2G=\begin{cases}\Phi^T(y-1)\mathscr{K}_1\Phi(\eta+1) & \eta\leqslant y\leqslant 1\\ \Phi^T(\eta-1)\mathscr{K}_2\Phi(y+1) & -1\leqslant y\leqslant \eta\end{cases} \tag{4.15}$$

将（4.7），（4.15）代入积分方程（4.2）可得

$$\int_{-1}^{1}\{\Phi^T[\max(y-1,\eta-1)][U\mathscr{K}_j+2U'_\eta\mathscr{G}'_j]\Phi[\min(y+1,\ \eta+1)]\}\phi(\eta)d\eta$$
$$-c\int_{-1}^{1}\{\Phi^T[\max(y-1,\ \eta-1)]\mathscr{K}_j\Phi[\min(y+1,\ \eta+1)]\}\phi(\eta)d\eta$$
$$-\frac{i}{\alpha R}\phi(y)=0 \tag{4.16}$$

其中

$$j=\begin{cases}1 & \eta\leqslant y\leqslant 1\\ 2 & -1\leqslant y\leqslant\eta\end{cases}$$

或者

$$\int_{-1}^{y}[\Phi^T(y-1)(U\mathscr{K}_1+2U'_\eta\mathscr{G}'_1)\Phi(\eta+1)]\phi(\eta)d\eta$$
$$+\int_{y}^{1}[\Phi^T(\eta-1)(U\mathscr{K}_2+2U'_\eta\mathscr{G}'_2)\Phi(y+1)]\phi(\eta)d\eta$$
$$-c\left\{\int_{-1}^{y}[\Phi^T(y-1)\mathscr{K}_1\Phi(\eta+1)]\phi(\eta)d\eta+\int_{y}^{1}[\Phi^T(\eta-1)\mathscr{K}_2\Phi(y+1)]\phi(\eta)d\eta\right\}$$
$$-\frac{i}{\alpha R}\phi(y)=0 \tag{4.17}$$

这是齐次线性积分方程，由它的可解性条件便可求得本征值及本征函数.

致谢：对于谈镐生教授的指导和鼓励，作者表示衷心的谢意.

参　考　文　献

1. Lin, C. C., *The Theory of Hydrodynamic Stability*, Cam. Uni. Press. (1955).
2. Lakin, W. D., NG, B. S. and Reid, W. H., Approximations to the eigenvalue relation for the Orr-Sommerfeld problem, *Phi. Trans. Roy. Soc. Lon.*, 289, 1360, (1978).
3. 李家春，流体运动稳定性和渐近方法，力学与实践，3，4，(1981).
4. Thomas, L. H., The stability of plane Poiseuille flow, *Phys. Rev.* 91 (1953), 780.
5. Dolph, C. L., and Lewis, D. C., On the application of infinite systems of ordinary differential equations to perturbations of plane Poiseuille flow, *Quar. Appl. Math.*, 16 (1958), 97.
6. Gallagher, A. P. and Mercer, A. M., On the behaviour of small disturbances in plane

Couette flow, *Jour Fluid Mech.*, 13 (1962), 91.

7. Grosch, C. E. and Salwen, H., The stability of steady and time-dependent plane Poiseuille flow, *Jour. Fluid Mech.*, 34 (1968), 177.

8. Orszag, S. A., Accurate solution of the Orr-Sommerfeld stability equation, *Jour. Fluid Mech.*, 50 (1971), 689.

Green Function and Integral Equation Method for the Orr-Sommerfeld Equation

Li Jia-chun

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, an alternative method has been presented to solve the Orr-Sommerfeld equation in the linear theory of stability. To begin with, we define a Green function which is expressed in terms of matrix. Subsequently, the reciprocity of it has been shown. Finally, a linear integral equation that is equivalent to the original Orr-Sommerfeld equation is derived. The method is applied to the cases with two solid walls and any velocity distribution of the main flow at any Reynolds number.