

分解刚度法在各向异性多层扁壳理论中的应用*

王震鸣 刘国玺 吕明身

(中国科学院力学研究所, 1980年7月18日收到)

摘要

本文按文献[3]中胡海昌阐述的方法, 在文献[1]的基础上, 将分解刚度法推广应用到各向异性多层扁壳的横向变形、稳定和横向振动问题上去, 取得了简单实用、计算工作量和误差都较小的近似计算方法。

一、引言

由碳纤维-环氧等先进复合材料制成的各向异性多层扁壳特别是夹层扁壳, 由于层间剪切模量较低, 一般应考虑由层间剪切产生的沿厚度方向的剪切变形。由文献[1]可以看到, 在考虑了沿厚度方向的剪切变形以后, 具有五个广义位移 u_0 , v_0 , ϕ_x , ϕ_y 和 ω , 比采用Kirchhoff假定的扁壳增加了两个广义位移 ϕ_x 和 ϕ_y , 方程相当复杂, 在求解具体问题时, 常常遇到数学上的困难, 计算工作量很大。

为简单起见, 在60年代和70年代的许多复合材料板壳结构研究工作, 常忽略沿厚度方向的剪切变形, 采用Kirchhoff假定, 这样, 广义位移只有三个, u_0 , v_0 和 ω , 方程简单一些, 求解起来比较容易。算得的结果, 在某些情况下, 误差较小, 有实用价值。但在另一些情况下, 对于横向变形问题, 特别是屈曲波数较多的板壳稳定问题和高阶的固有振动问题, 采用Kirchhoff假定算得的结果, 有时误差大于15~50%, 不容忽视, 这说明考虑沿厚度方向剪切变形的必要性。对于板壳结构, 一般地说, 忽略沿厚度方向的剪切变形所带来的误差, 对于自由边要小些, 简支边要大些, 固支边则更要大些。在文献[2]中第六章, 给出了各向异性多层板在求解横向挠度、临界载荷和横向振动固有频率的算例, 说明经典理论的解与考虑沿厚度方向剪切变形的解相比, 有时差别很大, 不能忽略。

当沿厚度方向的剪切变形所产生的影响不可忽略, 但仍处于次要地位时(通常在工程结构上遇到的就是这种情况), 采用分解刚度法是很有效的, 而且是相当精确的。

1947~1952年间, Bijlaard P. P. 在Hoff型夹层板理论的基础上, 就夹层板的临界载荷问题, 提出了一个简单的近似计算方法, 即分解刚度法, 求得了在许多具体情况下临界载荷的近似值。在我国, 60年代初, 胡海昌在一份内部报告中, 在Reissner夹层板理论的基础上, 推广了解刚度法, 用以求解横观各向同性夹层板的横向挠度与固有频率的近似值, 在

* 胡海昌推荐。

理论上作了严格的论证。他的主要结果编写在[3]中第九章。

本文按胡海昌阐述的方法,在文献[1]的基础上,将分解刚度法推广应用到求解各向异性多层扁壳的横向变形、稳定和横向振动问题上去,得到了简单实用、计算工作量和误差都较小的近似计算方法。

二、各向异性多层扁壳的基本方程

采用文献[1]中的符号和基本方程。对于各向异性多层扁壳的小挠度理论和不考虑温差的情况,由文献[1]中(2.11)和(2.23)式,分别可得

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R_x} \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R_y} \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2w}{R_{xy}} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{Bmatrix} \quad (2.1)$$

和

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{66} & C_{46} \\ C_{46} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (2.2)$$

在(2.1)和(2.2)式中, A_{ij} 为拉伸刚度, D_{ij} 和 B_{ij} 分别为对所选坐标轴的弯曲刚度与弯曲拉伸间的耦合刚度,由[1]中(2.12)式给出; C_{ij} 为剪切刚度,由[1]中(2.35)式给出。

对于横向载荷 q_0 和在 X, Y 方向对所选坐标系的分布力矩 m_x, m_y 作用下的弯曲问题,在内力 N_x^0, N_y^0, N_{xy}^0 作用下的线性稳定问题和横向固有振动问题,由[1]中(3.1)式可得平衡方程:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - I \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + m_x = 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - I \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + m_y = 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_x}{R_x} - \frac{2N_{xy}}{R_{xy}} - \frac{N_y}{R_y} + q_0 = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

其中

$$q_0 = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q_z - \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (2.4)$$

在(2.3)中, $(-I \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2})$ 和 $(-I \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2})$ 为惯性力矩; 在(2.4)中, $(-\bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2})$ 为惯性力. $\bar{\rho}$ 和 I 由[1]中(3.2)式给出.

将(2.1), (2.2)代入(2.3)式, 可得广义位移 u_0, v_0, ϕ_x, ϕ_y 和 w 表示的偏微分方程组.

$$\left. \begin{aligned} L_{11}u_0 + L_{12}v_0 + L_{13}\phi_x + L_{14}\phi_y + L_{15}w &= 0 \\ L_{12}u_0 + L_{22}v_0 + L_{23}\phi_x + L_{24}\phi_y + L_{25}w &= 0 \\ L_{13}u_0 + L_{23}v_0 + \left(L_{33} - I \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_x + L_{34}\phi_y + L_{35}w &= 0 \\ L_{14}u_0 + L_{24}v_0 + L_{34}\phi_x + \left(L_{44} - I \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\phi_y + L_{45}w &= 0 \\ L_{51}u_0 + L_{52}v_0 + L_{53}\phi_x + L_{54}\phi_y + L_{55}w + q_0 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

在(2.5)中, 线性微分算子 $L_{11}, L_{12}, L_{13}, \dots$ 等, 由[1]中(4.3)式给出, 略去 $L_{15}, L_{25}, L_{35}, L_{45}$ 中的小量后可得

$$\left. \begin{aligned} L_{11} &= A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{12} &= A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{13} &= B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{14} &= L_{23} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{15} &= -L_{51} = \left(\frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} + \frac{2A_{16}}{R_{xy}}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}}\right) \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{22} &= A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{24} &= B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ L_{25} &= -L_{52} = \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} + \frac{2A_{26}}{R_{xy}}\right) \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{33} &= D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{55} \\ L_{34} &= D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{12} + D_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{45} \\ L_{35} &= -L_{53} = \left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} - C_{55}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} - C_{45}\right) \frac{\partial}{\partial y} \\ L_{44} &= D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{44} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
 L_{46} = -L_{64} = & \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} - C_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{2B_{26}}{R_{xy}} - C_{44} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\
 L_{55} = & - \left(\frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{2A_{12}}{R_x R_y} + \frac{4A_{16}}{R_x R_{xy}} + \frac{A_{22}}{R_y^2} + \frac{4A_{26}}{R_y R_{xy}} + \frac{4A_{66}}{R_{xy}^2} \right) \\
 & + \left(C_{65} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{45} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)
 \end{aligned} \quad (2.6)$$

由[1]中(3.3)式, 边界条件为

$$\left. \begin{aligned}
 N_n = \bar{N}_n, \text{ 或 } u_n = \bar{u}_n; \quad N_{n'} = \bar{N}_{n'}, \text{ 或 } u_{n'} = \bar{u}_{n'} \\
 M_n = \bar{M}_n, \text{ 或 } \phi_n = \bar{\phi}_n; \quad M_{n'} = \bar{M}_{n'}, \text{ 或 } \phi_{n'} = \bar{\phi}_{n'} \\
 Q_n + N_n \frac{\partial w}{\partial n} + N_{n'} \frac{\partial w}{\partial t} = \bar{Q}_n, \text{ 或 } w = \bar{w}
 \end{aligned} \right\} \quad (2.7)$$

可以看到, 在给定边界条件(2.7)的情况下, 求解方程组(2.5)还会遇到数学上的困难. 下面我们采用分解刚度法求近似解.

三、各向异性多层扁壳理论中的分解刚度法

各向异性多层扁壳共有四种刚度: A_{ij} , B_{ij} , D_{ij} , ($i, j=1, 2, 6$) 和 C_{ij} , ($i, j=4, 5$). 它们之间是有联系的, 可在[1]中(2.12)式和(2.35)式明显的看到, 在外载荷作用下产生横向变形、确定临界载荷时或计算横向振动固有频率时, 一般说来, 它们之间又存在着相互联系.

分解刚度法, 顾名思义就是将刚度分解开来, 认为它们之间是独立无关的, 没有相互联系. 在给定的载荷、扁壳形状和边界条件下, 先按剪切刚度 $C_{ij} = \infty$, A_{ij} , B_{ij} 和 D_{ij} 为有限值; 再按 C_{ij} 为有限值, $D_{ij} = \infty$, $A_{ij} = B_{ij} = 0$, 分别求解横向挠度、临界载荷与横向振动固有频率, 然后按比较合理的公式(3.29)进行综合, 求得所要的结果.

分解刚度法只适用于弹性体系的小应变和小挠度的情况. 一般说来, 它是一种近似方法, 其精确度与所用的综合公式以及边界条件有关. 本文所给出的方法, 只适用于扁壳和平板.

对于考虑沿厚度方向剪切变形的各向异性多层扁壳和夹层扁壳, 当 $C_{ij} = \infty$, A_{ij} , B_{ij} 和 D_{ij} 为有限值, 意味着不产生沿厚度方向的剪切变形, 所以扁壳变形前中面的法线, 在扁壳变形后仍为中面的法线, 这样, 问题就转化为求扁壳的经典理论解, 这是解的主要部分. 当 C_{ij} 为有限值, $D_{ij} = \infty$, $A_{ij} = B_{ij} = 0$ 时, 问题转化为不产生弯曲变形, 只产生剪切变形的平板. $D_{ij} = \infty$ 意味着不产生弯曲变形; C_{ij} 为有限值, 就考虑了沿厚度方向的剪切变形; $A_{ij} = B_{ij} = 0$, 意味着在简化扁壳方程中的作用相当于取 $R_x = R_y = R_{xy} = \infty$ 所起的作用, 使一些有关的项消失, 转化为平板问题, 不能理解为 $E_{ij} = 0$, 而与 $D_{ij} = \infty$ 时引伸出 $E_{ij} = \infty$ 对立起来. 因为分解刚度法仅不过是一种求解问题时很有效的近似计算方法, 已经说明, 假定各刚度之间是独立无关没有联系的.

C_{ij} 和 D_{ij} 这两种刚度, 在本质上类似于两个串联着的弹簧, 见图1. 在外载荷作用下所产生的变形, 近似地等于对 C_{ij} 和 D_{ij} 分别作用时所产生变形的总和. 但是 C_{ij} 和 D_{ij} 这两种刚度不是同类的量, C_{ij} 与扁壳在厚度方向的剪切变形有关, 而 D_{ij} 与扁壳整体的抗弯性能有关, 对于边界条件的要求也不相同. C_{ij} 和 D_{ij} 这两者所组成的体系的综合刚度, 可



图 1

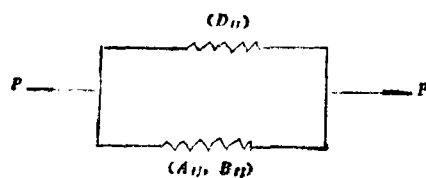


图 2

形象地设想为与两个串联着的弹簧相类似的模型, 由于涉及一些复杂的因素, 却不能用弹簧串联的公式来计算它们的综合刚度, 也无法用复杂的公式来表示它们的综合刚度. 两个弹簧串联以后, 其综合刚度将小于其中任何一个弹簧的刚度, 因此在载荷作用下挠度增大, 总挠度等于两个弹簧分别在同一载荷作用下所产生的挠度之和; 做成的单自由度振动系统, 其固有频率要降低, $\omega^2 = \frac{\omega_1^2 \omega_2^2}{\omega_1^2 + \omega_2^2}$, 其中的 ω_1 和 ω_2 , 分别为两个弹簧各自的固有频率. 由

C_{1i} 和 D_{1i} 组合的体系, 其变形近似地等于 $C_{1i} = \infty$ (即不产生沿厚度方向的剪切变形) 和 D_{1i} 为有限值时所产生的弯曲挠度 w_b , 加上 $D_{1i} = \infty$ (即不产生弯曲变形) 和 C_{1i} 为有限值时所产生的剪切挠度 w_s . 对于不考虑表板自身抗弯刚度的夹层板, 一般只涉及 C_{1i} 和 D_{1i} 这两种刚度, 不涉及刚度 A_{1i} 和 B_{1i} . 所以夹层板的横向挠度 $w = w_b + w_s$.

在夹层板的横向变形中, D_{1i} 和 C_{1i} 对产生变形是有耦合影响的, 现将 C_{1i} 和 D_{1i} 截然分开, 不考虑它们在产生变形时的耦合影响, 所以 $w = w_b + w_s$ 不能严格地成立, 但可得到良好的近似. [3] 中第九章指出, 对于边界简支的多角形夹层板, 轴对称变形下的圆形夹层板以及其他沿厚度方向的剪力 Q_x, Q_y 是静定的夹层板, 此公式严格地成立. 对于用分解刚度法求解夹层板的临界载荷与固有频率, 亦是这样的情况.

关于夹层板的临界载荷和固有频率的计算, 可作如下说明. 由于 C_{1i} 和 D_{1i} 的综合刚度比 C_{1i} 和 D_{1i} 中任何一个都要小, 所以临界载荷与固有频率也比分别计算时要小, 由于 C_{1i} 和 D_{1i} 的综合刚度在本质上是按串联原则综合的, 因此临界载荷和固有频率按下式综合.

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{N_c} &= \frac{1}{(N_{cr})_1} + \frac{1}{(N_{cr})_2} \\ \frac{1}{\omega^2} &= \frac{1}{(\omega)_1^2} + \frac{1}{(\omega)_2^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

在 (3.1) 式中, $(N_{cr})_1$ 和 $(\omega)_1, (N_{cr})_2$ 和 $(\omega)_2$ 分别为 $C_{1i} = \infty, D_{1i}$ 为有限值时和 $D_{1i} = \infty, C_{1i}$ 为有限值时算得的临界载荷与固有频率.

在扁壳结构中, C_{1i} 和 D_{1i} 之间的关系, 和夹层板中这两者间的关系相同.

在 (2.2) 式中, 当 $C_{1i} = \infty$, 因为 Q_x, Q_y 应为有限值, 所以要求, $\phi_x + \frac{\partial w}{\partial x} = 0$,

$\phi_y + \frac{\partial w}{\partial y} = 0$, 即

$$\phi_x = -\frac{\partial w}{\partial x}, \quad \phi_y = -\frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.2)$$

这就是 Kirchhoff 假定. 将 (2.3) 中第三、四式代入第五式得

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - \frac{N_x}{R_x} - \frac{2N_{xy}}{R_{xy}} - \frac{N_y}{R_y} + q_1 = 0 \quad (3.3)$$

其中

$$q_1 = q_z + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} + N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \bar{\rho} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.4)$$

将 (3.2) 代入 (2.5) 中第一、二式得

$$\left. \begin{aligned} L_{11}u_0 + L_{12}v_0 + \mathcal{L}_{13}w &= 0 \\ L_{12}u_0 + L_{22}v_0 + \mathcal{L}_{23}w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} \mathcal{L}_{13} &= \left(\frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} + \frac{2A_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{15}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad - \left[B_{11} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + 3B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{26} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] \\ \mathcal{L}_{23} &= \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} + \frac{2A_{26}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \\ &\quad - \left[B_{16} \frac{\partial^3}{\partial x^3} + (B_{12} + 2B_{66}) \frac{\partial^3}{\partial x^2 \partial y} + 3B_{26} \frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2} + B_{22} \frac{\partial^3}{\partial y^3} \right] \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

将 (2.1) 式代入 (3.3) 式, 注意到 (3.2) 式, 化简后得

$$\mathcal{L}_{13}u_0 + \mathcal{L}_{23}v_0 + \mathcal{L}_{33}w + q_1 = 0 \quad (3.7)$$

其中

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{33} &= - \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} \right. \\ &\quad \left. + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] + 2 \left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 4 \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &\quad + 2 \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{2B_{26}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \left(\frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{2A_{16}}{R_x R_y} + \frac{A_{16}}{R_x R_{xy}} + \frac{A_{22}}{R_y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4A_{26}}{R_y R_{xy}} + \frac{4A_{66}}{R_{xy}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.8)$$

由 (3.5) 和 (3.7) 式以及下面所给的边界条件, 即可求解经典理论的横向挠度 (w)₁, 临界载荷 (N_c)₁ 和横向振动的固有频率 (ω)₁.

边界条件: 在采用 Kirchhoff 假定时, 参照文献[4], 可得多层扁壳的边界条件.

简支边:

$$\left. \begin{aligned} S_1: & w=0, M_n=0, u_n=\bar{u}_n, u_t=\bar{u}_t \\ S_2: & w=0, M_n=0, N_n=\bar{N}_n, u_t=\bar{u}_t \\ S_3: & w=0, M_n=0, u_n=\bar{u}_n, N_n=\bar{N}_n \\ S_4: & w=0, M_n=0, N_n=\bar{N}_n, N_{nt}=\bar{N}_{nt} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

固支边:

$$\left. \begin{aligned} C_1: w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad u_n = \bar{u}_n, \quad u_t = \bar{u}_t \\ C_2: w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad N_n = \bar{N}_n, \quad u_t = \bar{u}_t \\ C_3: w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad u_n = \bar{u}_n, \quad N_n = \bar{N}_n \\ C_4: w=0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad N_n = \bar{N}_n, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt} \end{aligned} \right\} \quad (3.10)$$

自由边:

$$N_n = \bar{N}_n, \quad N_{nt} = \bar{N}_{nt}, \quad M_n = \bar{M}_n, \quad Q_n + \frac{\partial M_{nt}}{\partial t} = \bar{Q}_n \quad (3.11)$$

在 (3.9) ~ (3.11) 式中, 所用记号与文献 [1] 相同.

为了探讨分解刚度法的综合公式, 由 (3.5) 和 (3.7) 式消去 u_0 和 v_0 , 导出仅含 w 的方程. 由 (3.5) 得

$$\left. \begin{aligned} (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)u_0 &= (L_{12}\mathcal{L}_{23} - L_{22}\mathcal{L}_{13})w \\ (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)v_0 &= (L_{12}\mathcal{L}_{13} - L_{11}\mathcal{L}_{23})w \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

将 (3.7) 式乘以线性算子 $(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)$, 然后将 (3.12) 式代入得

$$[(L_{12}\mathcal{L}_{23} - L_{22}\mathcal{L}_{13})\mathcal{L}_{13} + (L_{12}\mathcal{L}_{13} - L_{11}\mathcal{L}_{23})\mathcal{L}_{23} + \mathcal{L}_{33}]w + (L_{11}L_{22} - L_{12}^2)q_1 = 0 \quad (3.13)$$

记

$$\mathcal{L}_0^{AB} = (L_{12}\mathcal{L}_{23} - L_{22}\mathcal{L}_{13})\mathcal{L}_{13} + (L_{12}\mathcal{L}_{13} - L_{11}\mathcal{L}_{23})\mathcal{L}_{23} \quad (3.14)$$

因 (3.14) 式的右边仅与 A_i, B_i 有关, 所以在 \mathcal{L}_0 的右上角加上 AB . 由 (3.8) 式可以看到, \mathcal{L}_{33} 分别与 D_i, A_i 和 B_i 有关, 也用 \mathcal{L}_{33}^D 和 \mathcal{L}_{33}^{AB} 分别表示之.

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{33}^D &= - \left[D_{11} \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 4D_{16} \frac{\partial^4}{\partial x^3 \partial y} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \right. \\ &\quad \left. + 4D_{26} \frac{\partial^4}{\partial x \partial y^3} + D_{22} \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right] \\ \mathcal{L}_{33}^{AB} &= -2 \left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} - 4 \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ &\quad - 2 \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \left(\frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{2A_{12}}{R_x R_y} + \frac{4A_{16}}{R_x R_{xy}} + \frac{A_{22}}{R_y^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{4A_{26}}{R_y R_{xy}} + \frac{4A_{66}}{R_{xy}^2} \right) \end{aligned} \quad (3.15)$$

记

$$\mathcal{L}_1^{AB} = L_{11}L_{22} - L_{12}^2 \quad (3.16)$$

则由 (3.13) 式得

$$(\mathcal{L}_0^{AB} + \mathcal{L}_{33}^{AB} + \mathcal{L}_{33}^D)w + \mathcal{L}_1^{AB}q_1 = 0 \quad (3.17)$$

当计算横向挠度时,

$$q_1 = q_2 + \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_y}{\partial y} \quad (3.18)$$

当计算临界载荷时,

$$q_1 = N_x^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy}^0 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y^0 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.19)$$

当计算横向振动固有频率时,

$$q_1 = \left[I \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) - \bar{\rho} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \quad (3.20)$$

当 D_{ii} 为有限值, $A_{ii} = B_{ii} = 0$ 时, 由(3.7)式得

$$\mathcal{L}_{33}^D w + q_1 = 0 \quad (3.21)$$

(3.21)式不能由(3.17)式得到. 因为由(3.5)和(3.7)式的三个方程化为(3.17)式时, 对(3.7)式乘了 $(L_{11}L_{22} - L_{12}^2)$, 现在 $L_{11}L_{22} - L_{12}^2 = 0$, 不能作这样的运算, 因此应该只用(3.7)式推得(3.21)式.

由(3.21)式结合边界条件, 可算得在广义载荷 q_1 作用下, 经典理论平板的 $(w)_D$, $(N_{cr})_D$ 和 $(\omega)_D$.

当 A_{ii} 和 B_{ii} 为有限值, $D_{ii} = 0$ 时, 由(3.17)式可得

$$(\mathcal{L}_0^{AB} + \mathcal{L}_{33}^{AB})w + \mathcal{L}_1^{AB}q_1 = 0 \quad (3.22)$$

结合边界条件, 可算得在广义载荷 q_1 作用下无矩理论扁壳的 $(w)_{AB}$, $(N_{cr})_{AB}$ 和 $(\omega)_{AB}$.

由于 D_{ii} 和 A_{ii} , B_{ii} 之间在本质上是并联的关系, 见图 2. 因此, 对于经典理论板壳, 有

$$\left. \begin{aligned} (w)_1 &= \frac{1}{\frac{1}{(w)_D} + \frac{1}{(w)_{AB}}} \\ (N_{cr})_1 &= (N_{cr})_D + (N_{cr})_{AB} \\ (\omega)_1^2 &= (\omega)_D^2 + (\omega)_{AB}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.23)$$

现在考虑扁壳在沿厚度方向剪切变形的影响. 当 C_{ii} 为有限值, $D_{ii} = \infty$, $A_{ii} = B_{ii} = 0$ 时, 由(2.1)式

$$\left. \begin{aligned} M_x &= D_{11} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{12} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{16} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ M_y &= D_{12} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{22} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{26} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \\ M_{xy} &= D_{16} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + D_{26} \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + D_{66} \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.24)$$

当 $D_{ii} = \infty$, 因 M_x , M_y , M_{xy} 应为有限值, 所以要求

$$\frac{\partial \phi_x}{\partial x} = \frac{\partial \phi_y}{\partial y} = \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} = 0 \quad (3.25)$$

由(2.2)式可得

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial Q_x}{\partial x} \\ \frac{\partial Q_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{55} & C_{45} \\ C_{46} & C_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{Bmatrix} \quad (3.26)$$

将(3.26)式代入(2.3)中第五式得

$$(C_{65} + C_{45}) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (C_{45} + C_{44}) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + q_0 = 0 \quad (3.27)$$

由(3.27)式及相应的边界条件, 可求得不产生弯曲变形只产生沿厚度方向剪切变形的平板的 $(w)_c$, $(N_{cr})_c$ 和 $(\omega)_c$. 因此

$$\left. \begin{aligned} (w)_{CD} &= (w)_c + (w)_D \\ \frac{1}{(N_{cr})_{CD}} &= \frac{1}{(N_{cr})_c} + \frac{1}{(N_{cr})_D} \\ \frac{1}{(\omega)_{CD}^2} &= \frac{1}{(\omega)_c^2} + \frac{1}{(\omega)_D^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

考虑到 A_{ij} , B_{ij} , C_{ij} 和 D_{ij} 这四种刚度之间, C_{ij} 和 D_{ij} 是串联的关系, 它们两个的综合刚度与 A_{ij} , B_{ij} 之间是并联的关系, 见图 3. 用(3.28)式中的 $(w)_{CD}$, $(N_{cr})_{CD}$ 和 $(\omega)_{CD}^2$ 取代(3.23)式

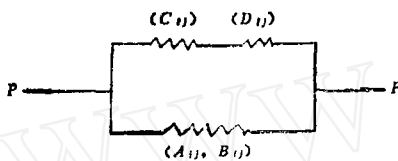


图 3

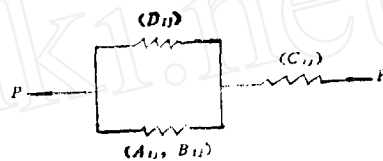


图 4

中的 $(w)_D$, $(N_{cr})_D$ 和 $(\omega)_D^2$, 则最后的综合公式为

$$\left. \begin{aligned} w &= \frac{1}{\frac{1}{(w)_c} + \frac{1}{(w)_D} + \frac{1}{(w)_{AB}}} \\ N_{cr} &= \frac{1}{\frac{1}{(N_{cr})_c} + \frac{1}{(N_{cr})_D}} + (N_{cr})_{AB} \\ \omega^2 &= \frac{1}{\frac{1}{(\omega)_c^2} + \frac{1}{(\omega)_D^2}} + (\omega)_{AB}^2 \end{aligned} \right\} \quad (3.29)$$

对于各种特殊情况, 可以参照文献[1]作出相应的简化.

对于四边简支的各向同性夹层曲板在横向载荷作用下的挠度问题, 在轴压下的稳定问题和横向振动固有频率的问题, 经过计算表明, 在考虑拉伸刚度 A 的同时, 如将两块表板对自身中面的抗弯刚度 $2D_f$ 亦看作是夹层板的剪切刚度 C 和弯曲刚度 D 综合后的刚度相并联的, 见图 5, 采用和(3.27)式相类似的综合公式, 在选用挠度函数 $w = \bar{w} \sin \frac{m\pi x}{l} \sin \frac{n\pi y}{b}$ 时, 保留

纵横向的半波数 m, n 为待定数, 则用分解刚度法算得的 w, N_{cr} 和 ω 的最后表达式, 与采用文献[3]中第六章的公式所得的精确解完全相同. 这说明综合公式(3.29)合理地考虑了各刚度之间在本质上的串联并联关系, 是比较精确的, 在曲板问题的一定场合下是精确解. 因此, 我们估计综合公式(3.29)给出的近似结果是良好的, 今后用数值计算来表明这一点.

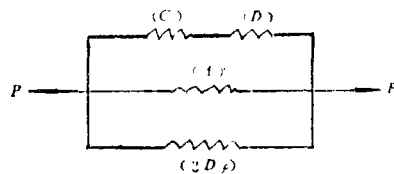


图 5

对于稳定问题, 应将失稳时在 X, Y 方向的半波数 m, n 作为待定值, 在按(3.29)式综合

后,依次取 $m=1,2,3,\dots$; $n=1,2,3,\dots$,算出临界载荷的最小值.对于横向变形和固有振动频率, m, n 的数值一般容易确定.

如果已经算得了或从手册或其他资料上查到了 $(w)_1, (N_{cr})_1$ 和 $(\omega)_1$ 的值,不想分别计算 $(w)_D, (N_{cr})_D, (\omega)_D$ 和 $(w)_{AB}, (N_{cr})_{AB}, (\omega)_{AB}$,则可采用比较方便但精度较(3.29)式略差的第二种综合公式:

$$\left. \begin{aligned} w &= (w)_1 + (w)_c \\ \frac{1}{N_{cr}} &= \frac{1}{(N_{cr})_1} + \frac{1}{(N_{cr})_c} \\ \frac{1}{\omega^2} &= \frac{1}{(\omega)_1^2} + \frac{1}{(\omega)_c^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.30)$$

其中 $(w)_c, (N_{cr})_c$ 和 $(\omega)_c$ 和(3.29)式中采用的相同.

从(3.30)式可以看到,它采用了 $D_{i,j}$ 和 $A_{i,j}, B_{i,j}$ 先并联,然后再和 $C_{i,j}$ 串联的模式.见图4.可以证明,(3.30)式给出的结果与(3.29)式给出的结果相比, w 偏大, N_{cr} 和 ω 偏小.在工程设计中,这偏于安全,因此也可以采用.

本文承蒙胡海昌教授审阅和指正,深表谢意.

参 考 文 献

1. 王震鸣,刘国玺,吕明身,各向异性多层扁壳的大挠度方程,应用数学和力学, 3, 1 (1981).
2. Vinson, J. R. and T. W. Chou, *Composite materials and their use in structures*, (1975).
3. 中国科学院北京力学研究所固体力学研究室板壳组著,《夹层板壳的弯曲稳定和振动》,科学出版社, (1977).
4. Jones, R. M., *Mechanics of composite materials*, (1975).

Application of the Method of Split Rigidities to Anisotropic Laminated Shallow Shells

Wang Zhen-ming Liu Guo-xi Lu Ming-shen

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper, according to the method stated by Hu Hai-chang in reference [3], on the basis of reference [1], the method of split rigidities is generalized to the problems of lateral deflection, stability and lateral vibration for anisotropic laminated shallow shells, and a simple and practical approximate method is obtained, in which the errors and computing works are comparatively small.