中 国 科 学

1982 年 7 月　　　　A　辑　　　　第 7 期

伴随变分方法在液体表面张力不稳定问题中的应用

徐 硕 昌

(中国科学院力学研究所，北京)

摘　　要

本文应用一次近似变分直接方法[1,2]对于旋转液体柱、柱形液体环，柱面内外液体膜等各种情形的表面张力不稳定问题作了统一的处理，得到“柱芯-液体-液体-柱壳”系统旋转运动稳定的充要条件，使以往的研究结果均可作为特例导出．同时阐明了旋转不稳定的物理机理，澄清以往研究中存在的一些争论．

一、引　　言

在十九世纪七十年代，Plateau，Rayleigh 就开始研究这一课题[3]．近二十年来，由于化学工程、造纸工业，摄影和电影技术等的需要，促使这一课题的研究迅速发展．许多研究者研究了液体柱包括旋转、固体芯、固体壳和多层液体等因素作用下的表面张力不稳定问题[4—17]．文献[4]概述了这一课题的实际应用．

上述研究[4—17]都是用简正模法处理，由于必须具体求解本征值问题才能得到稳定条件，所以一般只能考虑简单的模型，有的工作是用摄动法[4,15,17]处理大雷诺数和小雷诺数情形．有的工作[11,12]直接进行繁杂的数值计算．在文献［1，2］中应用伴随变分方法处理本征值问题，可以不必具体求解本征值问题，即一次近似变分直接方法．在本文中，我们将应用这一方法，对这个问题的普遍情形作统一的数学处理．如需求不稳定模式，本文的变分原理将提供变分直接方法的基础．

本文处理的模型见图 1．中心是无限长半径为 $r = a$ 的固体柱芯，外部是一同轴柱壳（半径为 c），其间充满两种不可压、粘滞液体，分界面为 $r = b$ 的柱面．区域 I（$a < r < b$）内的液体密度，压力和粘性系数分别为 $\rho_{01}(r)$，$p_{01}(r)$，$\mu_1(r)$；区域 II（$b < r < c$）内液体密度、压力，粘性系数分别为 $\rho_{02}(r)$，$p_{02}(r)$，$\mu_2(r)$．两种液体之间表面张力为 T．整个系统在平衡时绕对称轴整体旋转．这个模型似乎是液体射流柱的稳定问题和两同心圆柱间流稳定问题的耦合．这个模型和以前研究模型的比较参看表 1．

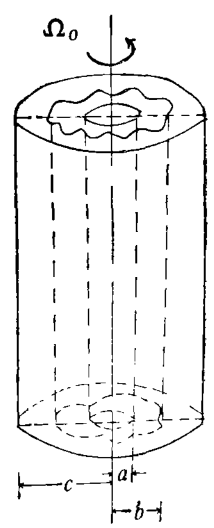

图 1　“柱芯-液体-液体-柱壳”模型

（$0 < r < a$ 固体芯，$a < r < b$ 区域 I，$b < r < c$ 区域 II，$r = c$ 固体壳）

本文于 1981 年 4 月 10 日收到．

表1 本文“柱芯-液体-液体-柱壳”模型和以前研究模型的比较

		无粘性情形			粘性情形		
		轴对称扰动 $m=0$	平面扰动 $k=0$	一般情形 $k, m\neq 0$	轴对称扰动 $m=0$	平面扰动 $k=0$	一般情形 $k, m\neq 0$
不旋转情形	液体柱 $a=0$ $\rho_2=0$	Pleteau (1873)[3]		Rayleigh (1878)[3]	Rayleigh (1892)[3]		
	空气-液体柱 $\rho_1=0$ $c\to\infty$	Rayleigh (1892)[3]					
	柱芯-液体层 $\rho_2=0$				Goren (1962)[5] Dumbaton 等 (1970)[6]		
	液体柱-液体层 $a=0$				Tamatika (1935)[9]		
整体旋转情形	液体柱 $a=0$ $\rho_2=0$		Hocking & Michel (1959)[7]	Postein (1959)[8]	Gillis (1961)[10] Hocking (1960)[9]	Gillis & Kaufman (1962)[11]	
	空气-液体柱 $\rho_1=0$ $c\to\infty$			Rosenberg (1962)[13] Pedey[14] (1967)			
	柱芯-液体层 $\rho_2=0$				Yih C—S (1960)[15]		Gillis & Shu (1962)[12] 徐硕昌 (1975)[1]
	液体柱-空气-柱壳 $a=0$		Ross (1970) (1974)[16]				
	液体-柱壳 $\rho_1=0$						Ruschak & Scriven (1976)[17]

对于“柱芯-液体-液体-柱壳”系统，我们得到其整体旋转运动稳定充要条件为：

$$T > \frac{(\rho_{01} - \rho_{02})\Omega_0^2 b^3}{[b^2k^2 + m^2 - 1]}, \tag{1}$$

其中 T 为表面张力，k，m 为轴向和周向扰动波数．这个结果总括了表 1 列举的结果．

二、基本方程和本征值问题

我们相对以 $\boldsymbol{\Omega}_0$ 整体旋转的参考系来处理图 1 所示系统的表面张力不稳定问题．

1. 在旋转坐标系下，不可压、粘滞流体运动基本方程为(文献[3]第 X 章)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0, \tag{2}$$

$$\rho \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} + 2\rho\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{v} = \rho\nabla\left[\frac{1}{2}|\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{r}|^2\right] + \nabla(-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}), \tag{3}$$

其中 ρ，p，$\boldsymbol{v}$ 分别为液体的密度，压力和速度，$\boldsymbol{r}$ 为矢径，$\mathbf{I}$ 为单位张量，$\boldsymbol{\tau}$ 为粘滞应力张量．

在两种流体交界面上边界条件为：

$$\boldsymbol{v}^{\mathrm{I}} \cdot \boldsymbol{n} = \boldsymbol{v}^{\mathrm{II}} \cdot \boldsymbol{n}. \tag{4}$$

$$\left\{p_1 - p_2 + T\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)\right\} = \boldsymbol{n} \cdot \{(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{II}}) \cdot \boldsymbol{n}\}. \tag{5}$$

$$\{(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{II}}) \cdot \boldsymbol{n}\} \times \boldsymbol{n} = 0, \tag{6}$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为分界面外法向单位矢量．

在固壁上边界条件为

$$\boldsymbol{v} = 0. \tag{7}$$

2. 图 1 所示系统平衡条件是：

在区域 I ($a < r < b$)：

$$p_1(r) = p_{01} - \int_r^b \rho_1(r)\Omega_0^2 r\,dr. \tag{8}$$

在区域 II ($b < r < c$)，

$$p_2(r) = p_{02} - \int_b^r \rho_2(r)\Omega_0^2 r\,dr, \tag{9}$$

当 $r = b$ 时，

$$p_{01} - p_{02} = \frac{T}{b}. \tag{10}$$

3. 假设系统发生小扰动后，区域 I 和区域 II 中液体的扰动位移分别为：

$$\left.\begin{aligned} \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r})e^{\sigma t + i(m\theta + kz)} \\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{r}, t) &= \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{r})e^{\sigma t + i(m\theta + kz)} \end{aligned}\right\}. \tag{11}$$

以下所有物理量按欧拉变量描述．将上述方程组线性化，并将扰动速度、密度，压力均用 $\boldsymbol{\xi}$ 表示，得到本征值问题(记为 A)如下：

$$\left\{\begin{array}{ll} \sigma^2\rho_{01}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}} + \sigma\{2\rho_{01}\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}} - \nabla[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})]\} = -\nabla p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}) - r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{I}}\frac{d\rho_{01}}{dr}\boldsymbol{e}_r. & (12) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}} = 0, & (13) \\ \sigma^2\rho_{02}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}} + \sigma\{2\rho_{02}\boldsymbol{\Omega}_6 \times \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}} - \nabla[\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})]\} = -\nabla p_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}) - r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{II}}\frac{d\rho_{02}}{dr}\boldsymbol{e}_r, & (14) \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}} = 0, & (15) \\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}(a) = 0, & (16) \end{array}\right.$$

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}(c)=0, & (17)\\
\xi_r^{\mathrm{I}}(b)=\xi_r^{\mathrm{II}}(b)=\xi_r(b), & (18)\\
\left\{p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})-p_2(\boldsymbol{\xi})^{\mathrm{II}}+\xi_r\left[(\rho_{01}-\rho_{02})\Omega_0^2 b-T\left(k^2+\dfrac{m^2-1}{b^2}\right)\right]\right\}=\sigma\boldsymbol{e}_r & \\
\quad\cdot[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})-\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})]\cdot\boldsymbol{e}_r, & (19)\\
\{[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})-\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})]\cdot\boldsymbol{e}_r\}\times\boldsymbol{e}_r=0. & (20)
\end{array}\right.
$$

$$
\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^i)=\begin{pmatrix}
2\dfrac{\partial\xi_r^i}{\partial r} & r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\xi_\theta^i}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\xi_r^i}{\partial\theta} & \dfrac{\partial\xi_r^i}{\partial z}+\dfrac{\partial\xi_z^i}{\partial r}\\
r\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\xi_\theta^i}{r}\right)+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\xi_r^i}{\partial\theta} & 2\left(\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\xi_\theta^i}{\partial\theta}+\dfrac{\xi_r^i}{r}\right) & \dfrac{\partial\xi_\theta^i}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\xi_z^i}{\partial\theta}\\
\dfrac{\partial\xi_r^i}{\partial z}+\dfrac{\partial\xi_z^i}{\partial r} & \dfrac{\partial\xi_\theta^i}{\partial z}+\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial\xi_\theta^i}{\partial\theta} & 2\dfrac{\partial\xi_z^i}{\partial z}
\end{pmatrix}, \quad (21)
$$

其中 $i=\mathrm{I},\mathrm{II}$, $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{I}}=\sigma\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})$ 和 $\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{II}}=\sigma\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})$ 分别为区域 I 和区域 II 的粘性应力张量,$p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})$, $p_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})$ 为扰动压力复振幅.

问题 A 是一类非自伴随本征值问题. 如果 σ, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}(\boldsymbol{r})$, $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}(\boldsymbol{r})$, $p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})$, $p_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})$ 是 A 的解,则 $\sigma^*(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})^*$, $(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})^*$ 亦是解.

三、变分原理的一般形式

下面将按照文献[1]中发展的一次近似变分直接方法来处理本征值问题 A.

1. 伴随本征值问题 A^+

$$
\left\{\begin{array}{ll}
\omega^2\rho_{01}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}-\omega\{2\rho_{01}\boldsymbol{\Omega}\times\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}+\nabla[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})]\}=-\nabla p_1(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})-r\Omega_0^2\eta_r^{\mathrm{I}}\dfrac{d\rho_{01}}{dr}\boldsymbol{e}_r, & (22)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}=0, & (23)\\
\omega^2\rho_{02}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}-\omega\{2\rho_{02}\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}+\nabla[\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]\}=-\nabla p_2(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})-r\Omega_0^2\eta_r^{\mathrm{II}}\dfrac{d\rho_{02}}{dr}\boldsymbol{e}_r, & (24)\\
\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}=0, & (25)\\
\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}(a)=0, & (26)\\
\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}(c)=0, & (27)\\
\eta_r^{\mathrm{I}}(b)=\eta_r^{\mathrm{II}}(b)=\eta_r(b), & (28)\\
p_1(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})-p_2(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})+\eta_r\left[(\rho_{01}-\rho_{02})\Omega_0^2 b-T\left(k^2+\dfrac{m^2-1}{b^2}\right)\right]=\omega\boldsymbol{e}_r & \\
\quad\cdot[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})-\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]\cdot\boldsymbol{e}_r, & (29)\\
\{[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})-\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]\cdot\boldsymbol{e}_r\}\times\boldsymbol{e}_r=0, & (30)
\end{array}\right.
$$

其中 $\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^i)$ $(i=\mathrm{I},\mathrm{II})$ 由表达式(21)将 $\boldsymbol{\xi}$ 置换为 $\boldsymbol{\eta}$ 所给出. 问题 A 和 A^+ 具有明确物理意义: 如果 A 对应右旋系统, 则 A^+ 对应左旋系统,两个本征值问题性质相类似,按照和文献[1]相同方式,可以证明两个本征值问题具有相同的本征值系列, 即 $\sigma_i=\omega_i$.

2. 变分方程

设 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}$, $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}$ (对应本征值 σ) 为问题 A^+ 的解. 以 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}$ 标乘(12)式, 然后对 τ_1 积分, 利用

(23),(26)式可以得到:

$$\sigma^2\iiint_{\tau_1}\rho_{01}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}d\tau+\sigma\left\{2\iiint_{\tau_1}\rho_{01}(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}d\tau-\iiint_{\tau_1}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}\cdot\nabla[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})]d\tau\right\}$$
$$+\iiint_{\tau_1}r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{I}}\cdot\eta_r^{\mathrm{I}}\frac{d\rho_{01}}{dr}d\tau=-\iint_{s_b}p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})\eta_r^{\mathrm{I}}ds. \tag{31}$$

其次,以 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}$ 标乘(14)式,然后对 τ_2 积分,利用(25),(27)式可以得到:

$$\sigma^2\iiint_{\tau_2}\rho_{02}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}d\tau+\sigma\left\{2\iiint_{\tau_2}\rho_{02}(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}d\tau-\iiint_{\tau_2}\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}\cdot\nabla[\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})]d\tau\right\}$$
$$+\iiint_{\tau_2}r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{II}}\cdot\eta_r^{\mathrm{II}}\frac{d\rho_{02}}{dr}d\tau=\iint_{s_b}p_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})\eta_r^{\mathrm{II}}ds, \tag{32}$$

其中 s_b 为 $r=b$ 的圆柱面.

将(31)和(32)两式相加,应用高斯定理,并利用(19)和(20)式导得变分方程如下:

$$\sigma(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})=\frac{1}{I_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+I_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})}\left\{-\left[\Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+\Psi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})\right.\right.$$
$$\left.\left.+\frac{\Phi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+\Phi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})}{2}\right]\right\}$$
$$\pm\left\{\left[\Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+\Psi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})+\frac{\Phi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+\Phi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})}{2}\right]^2\right.$$
$$\left.-[I_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+I_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]\cdot[\delta W_1(\xi_r^{\mathrm{I}},\eta_r^{\mathrm{I}})+\delta W_2(\xi_r^{\mathrm{II}},\eta_r^{\mathrm{II}})+\delta W_s(\xi_r,\eta_r)]\right\}^{\frac{1}{2}}, \tag{33}$$

其中

$$I_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})=\iiint_{\tau_1}\rho_{01}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}d\tau, \tag{34}$$

$$I_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})=\iiint_{\tau_2}\rho_{02}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}d\tau, \tag{35}$$

$$\Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})=\iiint_{\tau_1}\rho_{01}(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}d\tau, \tag{36}$$

$$\Psi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})=\iiint_{\tau_2}\rho_{02}(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}d\tau \tag{37}$$

$$\Phi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})=\frac{1}{2}\iiint_{\tau_1}\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})\cdot\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})d\tau, \tag{38}$$

$$\Phi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})=\frac{1}{2}\iiint_{\tau_2}\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})\cdot\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})d\tau, \tag{39}$$

$$\delta W_1(\xi_r^{\mathrm{I}},\eta_r^{\mathrm{I}})=\iiint_{\tau_1}r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{I}}\cdot\eta_r^{\mathrm{I}}\frac{d\rho_{01}}{dr}d\tau, \tag{40}$$

$$\delta W_2(\xi_r^{\mathrm{II}},\eta_r^{\mathrm{II}})=\iiint_{\tau_2}r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{II}}\cdot\eta_r^{\mathrm{II}}\frac{d\rho_{02}}{dr}d\tau, \tag{41}$$

$$\delta W_s(\xi_r,\eta_r)=\iiint_{s_b}\xi_r\cdot\eta_r\left\{(\rho_{01}-\rho_{02})\Omega_0^2b-T\left(k^2+\frac{m^2-1}{b^2}\right)\right\}ds. \tag{42}$$

设空间Φ由满足下述条件的 $\mathscr{U}=\{\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}\}$ 构成: $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}$ 为在τ_1上有定义,且满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}=0,\nabla\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}=0$ 和 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}(a)=0,\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}(a)=0$ 的二次连续可微矢函数; $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}$ 为在τ_2上有定义且满足 $\nabla\cdot\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}=0.\ \nabla\cdot\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}=0$ 和 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}(c)=0,\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}(c)=0$ 的二次连续可微矢函数,这样我们就将本征值问题A和A$^+$变为定义在函数空间Φ上的泛函$\sigma(\mathscr{U})$的变分问题,下面将予以证明.

3. 变分原理的证明

设 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}$ 的变分为 $\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}},\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}$ 满足 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}+\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}\in\Phi,\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}+\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}\in\Phi,\ \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}+\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}\in\Phi,\ \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}+\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}\in\Phi$. 由泛函 $\sigma(\mathscr{U})$ 取极值导得:

$$
\begin{aligned}
&-\{2\sigma[I_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+I_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]+2[\Psi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+\Psi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]\\
&+\Phi_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})+\Phi_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}},\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})\}\delta\sigma\\
=&\iiint_{\tau_1}\Big\{\rho_{01}\sigma^2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}+\sigma[2\rho_{01}\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}-\nabla(\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}))]+\nabla p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})\\
&+r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{I}}\frac{d\rho_{01}}{dr}\boldsymbol{e}_r\Big\}\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}d\tau\\
&+\iiint_{\tau_2}\Big\{\rho_{02}\sigma^2\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}+\sigma[2\rho_{02}\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}-\nabla(\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}))]+\nabla p_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})\\
&+r\Omega_0^2\xi_r^{\mathrm{II}}\frac{d\rho_{02}}{dr}\boldsymbol{e}_r\Big\}\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}d\tau\\
&+\iint_{s_b}\Big[\!\!\Big[\Big\{p_1(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})-p_2(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})+\xi_r\Big[(\rho_{01}-\rho_{02})\Omega_0^2b-T\Big(k^2+\frac{m^2-1}{b_2}\Big)\Big]\Big\}\boldsymbol{e}_r\\
&-\sigma[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})-\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})]\cdot\boldsymbol{e}_r\Big]\!\!\Big]\delta\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}ds\\
&+\iiint_{\tau_1}\Big\{\rho_{01}\sigma\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}-\sigma[2\rho_{01}\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}+\nabla(\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}))]+\nabla p_1(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})\\
&+r\Omega_0^2\eta_r^{\mathrm{I}}\frac{d\rho_{01}}{dr}\boldsymbol{e}_r\Big\}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}d\tau\\
&+\iiint_{\tau_2}\Big\{\rho_{02}\sigma^2\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}-\sigma[2\rho_{02}\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}+\nabla(\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}))]+\nabla p_2(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})\\
&+r\Omega_0^2\eta_r^{\mathrm{II}}\frac{d\rho_{02}}{dr}\boldsymbol{e}_r\Big\}\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}d\tau\\
&+\iint_{sb}\Big[\!\!\Big[p_1(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})-p_2(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})+\eta_r\Big[(\rho_{01}-\rho_{02})\Omega_0^2b-T\Big(k^2+\frac{m^2-1}{b^2}\Big)\Big]\Big\}\boldsymbol{e}_r\\
&-\sigma[\mu_1\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}})-\mu_2\mathbf{E}(\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}})]\cdot\boldsymbol{e}_r\Big]\!\!\Big]\delta\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}ds=0.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

利用变分法基本引理(文献[19]卷 I 第四章 § 3) 由(43)式得出结论: 由泛函 $\sigma(\mathscr{U})$ 取极值能导出本征值问题A和A$^+$的解;反之,问题A和问题A$^+$的解使泛函$\sigma(\mathscr{U})$取极值. 这是一个非线性泛函的固定边界和自然边界的混合变分问题. 变分方程(33)提供了近似计算本证值和本征函数的变分基础,同时也是分析本征值实部符号的出发点.

4. 本征值积分关系式

在变分方程(33)中以 $(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})^*, (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})^*$ 代替 $\boldsymbol{\eta}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\eta}^{\mathrm{II}}$ 得到本征值积分关系如下：

$$\sigma = \frac{1}{I_1 + I_2}\left\{ -\left(\Psi_1 + \Psi_2 + \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right) \pm \sqrt{\left(\Psi_1 + \Psi_2 + \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{2}\right)^2 - (I_1 + I_2)(\delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3)}\right\} \tag{44}$$

其中

$$I_1 = \iiint\limits_{\tau_1} \rho_{01}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}} \cdot (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})^* d\tau, \tag{45}$$

$$I_2 = \iiint\limits_{\tau_2} \rho_{02}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}} \cdot (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})^* d\tau, \tag{46}$$

$$\Psi_1 = \iiint\limits_{\tau_1} \rho_{01}(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}) \cdot (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}})^* d\tau, \tag{47}$$

$$\Psi_2 = \iiint\limits_{\tau_2} \rho_{02}(\boldsymbol{\Omega}_0 \times \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}) \cdot (\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}})^* d\tau, \tag{48}$$

$$\Phi_1 = \iiint\limits_{\tau_1} \frac{1}{2}\mu_1 \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}) \cdot \mathbf{E}^*(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}) d\tau, \tag{49}$$

$$\Phi_2 = \iiint\limits_{\tau_2} \frac{1}{2}\mu_2 \mathbf{E}(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}) \cdot \mathbf{E}^*(\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}) d\tau, \tag{50}$$

$$\delta W_1 = \iiint\limits_{\tau_1} r\Omega_0^2 \xi_r^{\mathrm{I}} \cdot (\xi_r^{\mathrm{I}})^* \frac{d\rho_{01}}{dr} d\tau, \tag{51}$$

$$\delta W_2 = \iiint\limits_{\tau_2} r\Omega_0^2 \xi_r^{\mathrm{II}} \cdot (\xi_r^{\mathrm{II}})^* \frac{d\rho_{02}}{dr} d\tau, \tag{52}$$

$$\delta W_s = \iint\limits_{s_b} \xi_r \cdot \xi_r^* \left\{(\rho_{01} - \rho_{02})\Omega_0^2 b - T\left(k^2 + \frac{m^2 - 1}{b^2}\right)\right\} ds. \tag{53}$$

类似文献[1]，可以证明由变分方程(33)和(44)确定的本征值具有一一对应的关系.

方程(44)实质上相应于能量积分，其各项具有明确的物理意义：I_1, I_2 表示扰动动能；$2\Psi_1$　$2\Psi_2$ 形式上对应 Coriolis 力的功 $(\Psi_1, \Psi_2 \leqslant 0)$；$\Phi_1 > 0, \Phi_2 > 0$ 是粘滞耗散功率；$\delta W_1, \delta W_2$ 是势能变化率；δW_s 是表面张力做功的功率.

5. 系统旋转运动的稳定判据

引理 1. 设 $z = e + if\ (e > 0)$ 和任意实数 a，则

(1)
$$\mathrm{Re}\left\{-z \pm \sqrt{z^2 - a^2}\right\} < 0 \tag{54}$$

(2)
$$0 < \max\left\{\mathrm{Re}\left[-z \pm \sqrt{z^2 + a^2}\right]\right\} < a. \tag{55}$$

利用引理 1，由(44)式可以得到如下稳定判据.

定理 1. 如果所有本征函数 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}$ 满足：

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_s = \iiint\limits_{\tau_1} r\Omega_0^2 \frac{d\rho_{01}}{dr} \xi_r^{\mathrm{I}} \cdot (\xi_r^{\mathrm{I}})^* d\tau + \iiint\limits_{\tau_2} r\Omega_0^2 \frac{d\rho_{02}}{dr} \xi_r^{\mathrm{II}} \cdot (\xi_r^{\mathrm{II}})^* d\tau + \iint\limits_{s_b} \xi_r \cdot \xi_r^* \left\{(\rho_{01} - \rho_{02})\Omega_0^2 b - T\left(k^2 + \frac{m^2 - 1}{b^2}\right)\right\} ds > 0, \tag{56}$$

则系统运动是稳定的.

证. 如果系统运动是稳定的,则所有本征值实 p 均小于零. 用反证法. 设存在某本征函数 $\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{II}}$, 使 $\delta W_k = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 < 0$. 在引理 1 中,令

$$e = \frac{\Phi_1(\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{I}}) + \Phi_2(\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{II}})}{2} > 0, \quad if = \Psi_1(\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{I}}) + \Psi_2(\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{II}}),$$

$$a^2 = -[I(\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{I}}) + I_2(\boldsymbol{\xi}_k^{\mathrm{II}})] \cdot \delta W_k > 0.$$

根据(55)式可知相应的本征值 σ_k. 满足 $\mathrm{Re}\,\sigma_k > 0$, 这和稳定假设相矛盾.

定理 2. 如果至少存在一对本征函数 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{I}}, \boldsymbol{\xi}^{\mathrm{II}}$, 使

$$\delta W = \delta W_1 + \delta W_2 + \delta W_3 < 0, \tag{57}$$

则系统运动是不稳定的.

证明类似定理 1.

定理 3. 如果"柱芯-液体-液体-柱壳"系统中二种流体密度均匀

$$\left(\frac{d\rho_{01}}{dr} = \frac{d\rho_{02}}{dr} = 0\right),$$

则其整体旋转运动稳定充要条件是:

$$T > \frac{(\rho_{01} - \rho_{02})\Omega_0^2 b^3}{k^2 b^2 + m^2 - 1}. \tag{58}$$

在(58)式中柱芯半径和柱壳半径均不出现,而且稳定条件不依赖粘性系数. 所有在表 1 中列举的结果都可作为(58)式特例.

四、旋转液体表面张力不稳定的物理机理

1. 惯性离心力引起的 Rayleigh-Taylor 不稳定

定理 3 给出的系统整体旋转运动稳定充要条件(58)式表明,旋转引起的惯性离心力的不稳定作用可类比 Rayleigh-Taylor 不稳定. 将(58)式和文献[3] §92 中(51)式相比较,取重力加速度 $g \sim$ 离心加速度 $\Omega_0^2 b$, 这两个稳定临界条件正相当. 密度沿加速度方向增加 $(\rho_2 < \rho_1)$ 起稳定作用;否则 $\rho_1 < \rho_2$ 起不稳定作用. 定理 1 中的稳定条件 $\frac{d\rho_{01}}{dr} > 0$, $\frac{d\rho_{02}}{dr} > 0$ 也可按这一不稳定机理解释.

2. Coriolis 力的稳定作用相应于"涡丝的稳定作用"

从本征值积分关系式(44)可以看出: Ψ_1, Ψ_2 对应 Coriolis 力的贡献,当考虑液体粘性时 $(\mu_1, \mu_2 \neq 0)$, Coriolis 力不影响稳定临界条件;当忽略粘性时 $(\mu_1 = \mu_2 = 0)$, 由于 $\Psi_1^2 < 0$, $\Psi_2^2 < 0$, 此时稳定条件是 $(\Psi_1 + \Psi_2)^2 - (I_1 + I_2) \cdot \delta W < 0$, 故 Coriolis 力有稳定作用. 对于 Coriolis 力和粘性的这种相互作用特性,我们已用"涡丝稳定概念"解释了[1].

粘性对旋转液体具有双重作用: 一方面具有通常耗散扰动动能对扰动起衰减作用; 另一方面使 Coriolis 力稳定作用消失间接起不稳定作用. 据此可以澄清以前工作中出现的一些争议.

(1) Gillis 提出[10,12]: 为什么 $(T_c)_{\nu\neq0} > (T_c)_{\nu=0}$? ($T_c$ 为表面张力临界稳定值, ν 为运动粘性系数)他解释是表面张力和粘性的相互作用是错误的[10]. 因为 Coriolis 力在 $\nu = 0$ 时有稳定作用;在 $\nu \neq 0$ 时无稳定作用,故 $(T_c)_{\nu\neq0} > (T_c)_{\nu=0}$. 这种情形在不考虑表面张力的问题中也存在,例如 Maclaurin 椭球无粘性时 $e<0.9125$ 是稳定的,而有粘性时反要求 $e<0.8127$

才能稳定．粘性反减小了稳定区域，起了不稳定作用．

（2）为什么对于轴对称扰动，$(T_c)_{\nu\neq 0}=(T_c)_{\nu=0}$？这是因为对于轴对称扰动，无论有无粘性，Coriolis 力均不起稳定作用．事实上，对于轴对称扰动，

$$\boldsymbol{\xi}(r,z)=(\xi_r(r,z),\, i\xi_r(r,z),\, \xi_z(r,z)),$$

易证此时

$$\Psi=\iiint_\tau \rho_0(\boldsymbol{\Omega}_0\times\boldsymbol{\xi})\cdot\boldsymbol{\xi}^* d\tau=0,$$

即 Coriolis 力不起稳定作用．

（3）Ross 考虑外部介质发现表面张力临界值精确地二倍于被 Hocking 忽略外部介质时所得的值[16]．Ross 对平面扰动情形（$k=0$）得到．

$$(L)_{\frac{\rho_2}{\rho_1}\neq 0,\nu=0}\geqslant\frac{1}{3}{}^{[16]},$$

而 Hocking[9] 得到 $(L)_{\frac{\rho_2}{\rho_1}=0,\nu=0}\geqslant\frac{1}{6}$，Ross 认为这是由于外部介质所致，并不是问题实质所在．事实上 Hocking[9] 也得到 $(L)_{\frac{\rho_2}{\rho_1}=0,\nu\neq 0}\geqslant\frac{1}{3}$，当没有外部介质也是 $\frac{1}{3}$．而且本文（58）式也得到 $(L)_{\frac{\rho_2}{\rho_1}\neq 0,\nu\neq 0}=\left(\frac{T}{(\rho_1-\rho_2)\Omega_0^2b^3}\right)\geqslant\frac{1}{3}$．问题实质是 $L_c\geqslant\frac{1}{6}$ 时，Coriolis 力有稳定贡献，而其他三种情形，Coriolis 力没有稳定贡献，这一事实 Ross 解释为外部介质作用似乎不妥，实质应是 Coriolis 力有无稳定贡献．

3．表面张力的不稳定作用

由稳定条件(58)式令 $\rho_{02}=0$，就得到旋转液体柱的表面张力不稳定的条件．对于所有非轴对称扰动（$m\geqslant 1$）情形，旋转柱是稳定的；只对轴对称扰动，当波长大于截面圆周长时是不稳定的．对于无柱芯情形（$a=0$），Plateau 最早发现这一结论[3]．

根据定理 1，当两种液体密度均匀分布时，稳定充要条件是

$$\delta W_s=\iint_{s_b}\xi_r\cdot\xi_r^*\left\{(\rho_{01}-\rho_{02})\Omega_0^2b-T\left(k^2+\frac{m^2-1}{b^2}\right)\right\}ds>0. \tag{59}$$

(59)式第一项对应离心力势变化，第二项是表面张力的贡献．而由表面张力引起系统势能变化正比总表面面积的变化．对于波长大于截面圆周长的轴对称扰动使表面面积减小，故不稳定；反之其他方式扰动使表面增加，故是稳定的．由附录（A-6）式可看清楚这一点．

五、结　　论

1．本文处理的“柱芯-液体-液体-柱壳”系统的表面张力不稳定问题概括了这类问题的多种情形，具有较大普遍性，所得稳定条件(58)可以导出表 1 内所列举的结果．

2．对于旋转液体的表面张力不稳定，粘性具有两重作用：一方面具有通常耗散扰动能量对扰动起衰减作用；另一方面使 Coriolis 力稳定作用消失间接起不稳定作用．阐明粘性不稳定作用物理实质就使以往的一些争论得以澄清．这种情形类似平面平行流稳定问题中粘性不稳定作用那场争论．

3．本文导出的稳定充要条件对于文献[4]列举的各种实际工程问题具有指导意义．对于

一些实际问题还需考虑重力的影响[15],另外非线性效应尚待进一步考虑.

这项工作是作者 1962—1965 年在力学研究所 6 室工作期间徐复同志建议的一项课题[1].在此期间,作者得到徐复同志的具体指导以及郭永怀教授的关怀和指导. 1980 年,作者重新考虑这个问题得到谈镐生教授的指导.在此,对郭永怀教授表示深切的悼念. 对于谈镐生教授和副研究员徐复同志表示衷心的感谢.

附录 边界条件的推导

假设两种液体交界面 ($r=b$) 在扰动过程中的曲面方程具有形式:

$$\boldsymbol{r}=[b+\zeta(\theta,z,t)]\boldsymbol{e}_r+z\boldsymbol{e}_z, \tag{A-1}$$

由此计算得

$$\boldsymbol{n}=\frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}}{\left|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial\theta}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z}\right|}=\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{b}\frac{\partial\zeta}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta-\frac{\partial\zeta}{\partial z}\boldsymbol{e}_z. \tag{A-2}$$

分界面法向速度连续条件为:

$$\frac{\partial\xi_r^{\rm I}(b,t)}{\partial t}=\frac{\partial\xi_r^{\rm II}(b,t)}{\partial t}. \tag{A-3}$$

根据分界面运动学条件

$$\frac{d\boldsymbol{n}}{dt}=\boldsymbol{n}\times[(\boldsymbol{n}\times\nabla\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}] \tag{A-4}$$

以及 (A-2),(A-3) 式可以证明

$$\zeta(\theta,z,t)=-\xi_r^{\rm I}(b,\theta,z,t)=-\xi_r^{\rm II}(b,\theta,z,t), \tag{A-5}$$

故分界面方程具有形式

$$\boldsymbol{r}=[b-\xi_r(b,\theta,z,t)]\boldsymbol{e}_r+z\boldsymbol{e}_z. \tag{A-6}$$

分界面动力学条件由(5),(6)线性化而得到.扰动后分界面面积

$$\begin{aligned}S&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}|\boldsymbol{r}_\theta\times\boldsymbol{r}_z|\,d\theta dz\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\sqrt{(b-\xi_r)^2+\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial\theta}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial z}\right)^2}\,d\theta dz\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}(b-\xi_r)\left\{1+\frac{1}{2(b-\xi_r)^2}\left[\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial\theta}\right)^2+b^2\left(\frac{\partial\xi_r}{\partial z}\right)^2\right]\right\}d\theta dz.\end{aligned} \tag{A-7}$$

分界面面积的全部改变为:

$$\delta S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\left\{-\frac{1}{b}-\frac{\xi_r}{b^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\xi_r}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\xi_r}{\partial z^2}\right\}(b-\xi_r)\delta\xi_r\,d\theta dz. \tag{A-8}$$

另一方面[文献[18](60.2)式],

$$\delta S=\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{2\pi}\delta\xi_r\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)(b-\xi_r)\,d\theta dz, \tag{A-9}$$

故

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{1}{b}-\frac{\xi_r}{b^2}-\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\xi_r}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\xi_r}{\partial z^2}. \tag{A-10}$$

以平衡条件 (7)—(9),(A-2),(A-10) 式代入方程(5)和(6),得动力学边界条件

$$\begin{aligned}&p_1-p_2+[\rho_2(b)-\rho_1(b)]\Omega_0^2 b\xi_r-T\left[\frac{\xi_r}{b^2}+\frac{1}{b^2}\frac{\partial^2\xi_r}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2\xi_r}{\partial z^2}\right]\\&=\boldsymbol{e}_r\cdot[\boldsymbol{\tau}^{\rm I}-\boldsymbol{\tau}^{\rm II}]\cdot\boldsymbol{e}_r,\end{aligned} \tag{A-11}$$

$$[(\boldsymbol{\tau}^{\mathrm{I}} - \boldsymbol{\tau}^{\mathrm{II}}) \cdot \boldsymbol{e}_r] \times \boldsymbol{e}_r = 0. \tag{A-12}$$

以(11)式给出的扰动形式代入上二式，即得正文中的(19)和(20)式。

参 考 文 献

[1] 徐硕昌，科学通报，**20**(1975) 372—378.

[2] Xu Shuo-chang, *Scientia Sinica*, **22** (1980), 1372—1383; **23** (1981), 61—73.

[3] Chandrasekhar, S., *Hydrodynamics Stability and Hydromagnetic Stability*, Oxford Univ. Press, 1961.

[4] Moffatt, H. K., *Journal de Mécanique*, **16** (1977), 651—673.

[5] Gorem, S., *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 309.

[6] Dumbleton, L. M., et. al., *Ind. Eng. Chem. Fundam*, **9** (1970), 466.

[7] Hocking, L. M. & Michael, D. H., *Mathematika*, **6** (1959), 25—32.

[8] Postein. J., *Appl. Sci. Res.*, **A8** (1958), 425.

[9] Hocking, L. M., *Mathematika*, **7** (1960), 1—9.

[10] Gillis, J., *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **57** (1960), 152.

[11] Gillis, J. & Kaufman. F., *Q. Appl. Math.*, **19** (1962), 301.

[12] Gillis, J. & Suh, K. S., *Phys. Fluid*, **5** (1962), 1149—1155.

[13] Rosenthal, D. K., *J. Fluid Mech.*, **12** (1962), 358.

[14] Pedley, T. J., *ibid.*, **30** (1967), 127—147.

[15] Yih, C-S., *Proc. Roy. Soc.*, **A258** (1960), 63—89.

[16] Ross. D. K., *Z. Angew. Math. Phys.*, **21** (1970), 137; *Phys. Fluid*, **17** (1974), 1119.

[17] Ruschak, K. J. & Scriven, L. E., *J. Fluid Mech.*, **76** (1976), 113—125.

[18] 朗道，Л. Д.，粟弗席兹，E. M.，连续介质力学，第一册，人民教育出版社，1952.

[19] Courant, R. & Hilbert, D., *Methods of Mathematic Physic.*, Vol. 1, Interscience Publishes, 1953.