

Tokamak 中的 Kelvin-Helmholtz 不稳定性

徐 复 徐 萃 薇

(中国科学院力学研究所,北京) (北京大学数学系)

Tokamak 中的一个重要问题是加热。中性束注入加热是加热的一个有效手段,它使美国 PLT 上的离子温度达到 7.1 KeV。但 PLT 上的中性束注入的不对称性引起等离子体的快速环向旋转,转速可达 1×10^7 厘米/秒^[1]。1979 年 5 月 Suckewer 等在 PLT 上测量了速度分布^[2]。

在具有速度剪切进行旋转的等离子体中,会不会形成新的磁流体力学不稳定性? 1980 年 5 月, Lau-Liu^[3] 对这个问题作了分析。结论是,当 Alfvén 速度的两倍大于等离子体中心的最大转速时,只是速度剪切本身,并不能产生磁流体力学不稳定性。

PLT 上的实验采用了金属的限制器。高温等离子体被测速度的最大径向位置(离中心为 40 厘米),与导体壁之间有一段距离(10 厘米)。在这个区域里等离子体密度很低,通常理论上当作真空来处理。考虑到这个区域的存在,我们重新讨论了有等离子体速度剪切的磁流体力学不稳定性。我们预料,这时应出现新的宏观不稳定性,如 Rayleigh-Taylor 不稳定性,以及 Kelvin-Helmholtz 不稳定性等等。本文只讨论后者,即有速度剪切的旋转高温等离子体与真空交界时的不稳定性。本征值计算给出了不稳定性增长率。结果表明, Lau-Liu 的结论要修正。

我们和 Lau-Liu^[3] 一样,采用平板片模型,如图 1 所示,并假定:

1. 等离子体速度为 $W_0(y)$, 有实验数据^[2]。
2. 等离子体是理想的,固壁是理想导体。
3. 等离子体是不可压缩的, $\rho_0 = \text{const}$ 。
4. 在流动方向有均匀磁场 B_0 , 在真空区域有均匀磁场 B_1 。二者方向相同。

在以上的假定下,理想等离子体的全部方程都满足,只要求在高温等离子体中

$$P + \frac{1}{8\pi} B_0^2 = \text{const}, \quad (1)$$

而在分界面上满足

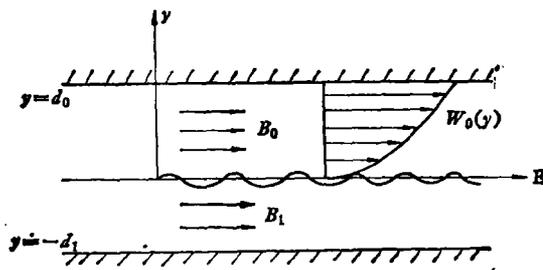


图 1

本文 1982 年 3 月 4 日收到。

$$P + \frac{1}{8\pi} B_0^2 = \frac{1}{8\pi} B_1^2, \text{ 在 } y = 0 \text{ 上.} \quad (2)$$

假定在等离子体中发生了小扰动,形如

$$\zeta = \zeta(y) e^{i(\omega t + k_x x + k_z z)}, \quad (3)$$

这时等离子体中的扰动磁场 \tilde{B}_{0y} 满足^[3]

$$\frac{d}{dy} \left\{ [(\omega + k_x W_0(y))^2 - (k_z v_{0A})^2] \frac{d\tilde{B}_{0y}}{dy} \right\} - k^2 [(\omega + k_x W_0(y))^2 - (k_z v_{0A})^2] \tilde{B}_{0y} = 0, \quad (4)$$

式中

$$k^2 = k_x^2 + k_z^2, \quad v_{0A}^2 = B_0^2/4\pi\rho_0.$$

在真空区 $B_1 = B_1 e_x + B_z e_z$ 为 z 向单位矢量. 从边界条件

$$\tilde{B}_{1y} = 0, \text{ 在 } y = -d_1 \text{ 上,} \quad (5)$$

可求出

$$B_1 = -\text{Re} \cdot \nabla \left\{ \frac{\varphi_0}{k} e^{i(\omega t + k_x x + k_z z)} \cdot \cosh k(y + d_1) \right\}. \quad (6)$$

等离子体应满足的一个边界条件是

$$\tilde{B}_{0y} = 0, \text{ 在 } y = d_0 \text{ 上,} \quad (7)$$

在交界面上应满足的条件是,磁通守恒

$$B_1 \cdot \tilde{B}_{0y} = B_0 \cdot \tilde{B}_{1y}, \text{ 在 } y = 0 \text{ 上,} \quad (8)$$

和动力学边界条件

$$\frac{d\tilde{B}_{0y}}{dy} = -\tilde{B}_{0y} \frac{k_x^2 v_{1A}^2 \cdot k \coth k d_1}{[\omega + k_x W_0(0)]^2 - k_x^2 v_{0A}^2}, \text{ 在 } y = 0 \text{ 上,} \quad (9)$$

式中

$$v_{1A}^2 = B_1^2/4\pi\rho_0.$$

我们只讨论特殊情况 $k_x = 0$ 时的本征值 ω 的计算. 首先进行无量纲化,令

$$\begin{aligned} k_0 &= k_z d_0, & \bar{y} &= y/d_0, & \bar{B} &= \tilde{B}_{0y}/B_0, \\ W &= W_0/v_{0A}, & \Omega_0 &= \omega/k_x v_{0A}, & \bar{B}_1 &= B_1/B_0, & a &= d_1/d_0 \end{aligned} \quad (10)$$

则可写出无量纲形式的方程和边界条件.

我们只讨论一种特殊情况

$$W(\bar{y}) = r + s \cdot \bar{y},$$

式中 r, s 为常数. 令 $\Omega_1 = \Omega_0 + r$, 采用级数解法,即令

$$\bar{B}(\bar{y}) = \bar{B}(b_0, b_1; \bar{y}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \bar{y}^n,$$

算到 b_3 , 从两个边界条件消去 b_0, b_1 后,得色散关系

$$\Omega_1^4 - (2 + F)\Omega_1^2 + sF \cdot \Omega_1 + (1 + F) = 0, \quad (11)$$

式中

$$F = \bar{B}_1^2 k_0 \coth a k_0 / \left(1 + \frac{1}{2} k_0^2 \right).$$

我们讨论几种极限情况.

一种是 $k_0 \rightarrow \infty$, 我们有 $F \rightarrow 0$, 所有的根都是实的, 即当扰动波长远小于 d_0 , 一定是稳定的. 从物理上看, 这当然是由于磁场对短波扰动有抑制作用的缘故.

另一种情况是 $s = 0$. 于是 $W(\bar{y}) = r = W(0)$, 这时等离子体速度无剪切, 只有均匀速度 r . 均匀速度对稳定性的影响出现在 Ω_1 中, 即为 Ω_1 实部的一部分, 因此它永远是稳定的

因素。实际上在运动等离子体坐标系中，等离子体不动，对非相对论情况磁场不变，所以不应出现 Kelvin-Helmholtz 不稳定性。之所以下面计算得出不稳定，完全是由于与真空交界的是具有速度剪切的等离子体。即使与真空交界处的速度为零，有速度剪切也可出现不稳定。Lau-Liu 一文相当于没有真空区的情形，因此在物理上的结论与本文不同。

图 2 是 $a = 0.25$, $\bar{B}_1 = 1.08$, $s = 1.8, 1.0, 0.3$ 时的色散关系。各曲线给出 $\Omega = I_m(\Omega_1)$ 与波数 k_0 的关系。由图看出，Lau-Liu^[3] 所指出的稳定性充分条件

$$s \sim v_{0m}/v_{0A} < 2,$$

满足后，由于真空区的存在，在 $k_0 = 0$ 右方的一段波数范围内仍出现不稳定。但不稳定增长率 Ω 随着 k_0 的增大，衰减很快。

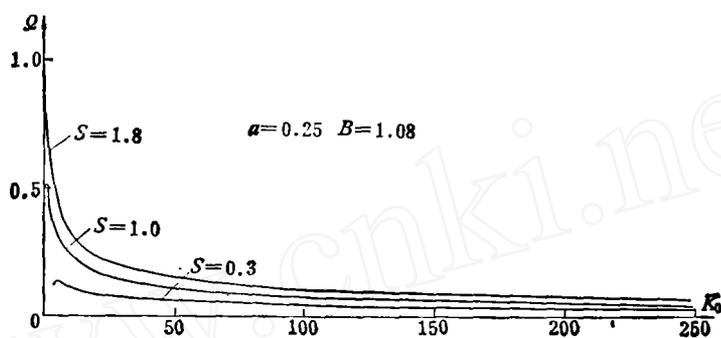


图 2

表 1 给出 $a = 0.25$, $\bar{B}_1 = 1.08$, 而 $s = 0.1, 0.01, 0.0025$ 时的 $\Omega(k_0)$ 。可以看出，随着 s 的减小，当 $s = 0.01$ 时(这和 PLT 的运行参数相近)，不稳定的波数范围已不是从 $k_0 = 0$ 开始，而移到了 $k_0 \sim 100$ 附近。同时不稳定性最大值下降到 0.48×10^{-2} 附近。这说明随着 s 的减

表 1

Ω / k_0 / s	0	1	2	5	10	20	100	200	250
0.1	0	0	0	0	4.9×10^{-2}	4.6×10^{-2}	2.4×10^{-2}	1.7×10^{-2}	1.5×10^{-2}
0.01	0	0	0	0	0	0	4.8×10^{-3}	4.6×10^{-3}	4.3×10^{-3}
0.0025	0	0	0	0	0	0	0	0	0

小，整个趋势是朝向稳定的。而当 $s = 0.0025$ 时， k_0 从 0 直到 250 都有 $\Omega = 0$ ，就是宏观稳定的了。PLT 的实际运行情况是在中性束注入期间，具有速度剪切的旋转等离子体是稳定的。因此理论与实验大体相符。

致谢：感谢陈乐山同志的热情帮助。

参 考 文 献

- [1] Eubank, H. et al., *Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research*, IAEA, 1(1979), 167.
 [2] Suckewer, S. et al., *PPPL-1542*, Ue-20d, 1979.
 [3] Lau, Y. Y. & Liu, C. S., *Phys. Fluids*, 23(1980), 939.