

线弹性破断时复合型裂纹顶端 塑性区的研究

高 桦 张 晓 堤

(中国科学院力学研究所)

摘 要

本文基于超高强度钢复合型脆断的实验结果,利用线弹性近似分析和弹塑性有限元分析,对不同的 K_{II}/K_I 值脆断的试样,在临界状态时裂纹顶端的塑性区进行了研究,得到了裂纹起始扩展时塑性区的形状和尺寸、裂纹顶端周围应力、应变以及应变能密度的分布情况。根据这些结果,对复合型裂纹扩展阻力的影响因素提出了看法,对现有的复合型断裂准则做了讨论。

一、引 言

金属材料在复合型条件下脆断的实验结果^[1-3]与现有复合型断裂准则的预言不一,在 K_{II} 分量增大时误差竟高达 100% 以上。其根本原因在于:无论是最大正应力准则、应变能密度准则抑或能量释放率准则都只是从不同角度计算了裂纹扩展力,他们在计算开裂时的临界 K_I 和 K_{II} 时^[4,5],均采用了如下假设:

$$f(K_I, K_{II}, \theta_0) = f(K_{IC}, 0, 0) \quad (1)$$

从而得到如图 1 所示之曲线。并且根据最大正应力准则、应变能密度准则和能量释放率准则分别给出了 $K_{IIC} = 0.87K_{IC}$, $K_{IIC} = 0.96K_{IC}$ 和 $K_{IIC} = 0.724K_{IC}$ ($\nu = 0.3$) 的结果。可见,三种准则均未考虑复合型裂纹扩展阻力与变形条件 (K_{II}/K_I 比值不同) 的关系,也没有考虑各种材料不同的变形特征,只是简单地给出了 (1) 式的假定,即复合型裂纹扩展阻力等于纯 I 型裂纹扩展阻力。这种假设对于金属材料,即使是超高强度钢,也不合适。本文基于超高强度钢复合型脆断的实验结果,利用线弹性近似分析和弹塑性有限元分析,研究纯 I、纯 II 和 K_I 、 K_{II} 复合型裂纹顶端的塑性区。虽然,在线弹性条件下,裂纹顶端塑性区尺寸相对于试件特征长度及裂纹尺寸很小,但是,裂纹推进所需支付的

本文1979年7月11日收到。

塑性功却远远超过形成新裂纹面时表面能的增加。文献[6]指出,如果仅仅是表面能与断裂有关,那么断裂韧度 K_c 约等于 $10^{-5} E \text{ psi} \cdot \text{in}^{1/2}$,其中 E 为杨氏模量。然而,即使是非常脆的材料 K_c 也有 $10^{-3} - 10^{-2} E \text{ psi} \cdot \text{in}^{1/2}$ 。可见裂纹扩展单位面积所需支付的塑性功约比表面能大几个数量级。文献[2]研究

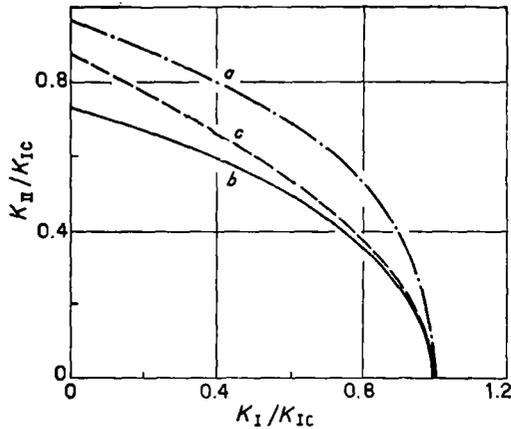


图1 复合型脆断时临界 K_I 和 K_{II} 的理论曲线
Fig. 1 Theoretical curves of K_I and K_{II} predicted by existing criteria
a—Strain energy density criterion;
b—Energy release rate criterion;
c—Maximum normal stress criterion

I型穿透裂纹的扩展指出:在裂纹稳态扩展阶段,裂纹扩展阻力曲线不断上升的原因同样也与裂纹推进时裂纹顶端塑性区的逐渐增大有关。材料断裂韧度高低的本质与微观断裂机制有关,它取决于断裂过程区中微观断裂过程是否易于发生。在断裂过程发生的临界条件达到之前,随着载荷增大,裂纹顶端塑性区尺寸和试件吸收的塑性功不断增大。所以,开裂吸收塑性功的多少以及塑性区中应力、应变、应变能密度的大小,可以反映在不同变形条件下(K_{II}/K_I 比值不同),断裂过程区中发生微观断裂过程的难易程度,这对于了解复合型裂纹扩展阻力的变化是十分有用的。

本文通过对纯I、纯II、 $K_I K_{II}$ 复合型脆断试件开裂时裂纹顶端塑性区形状、尺寸及其周围应力、应变、应变能密度分布的分析,对下列问题进行了研究并提出看法:
1,复合型脆断时,随着 K_{II} 分量增大,开裂时最大正应力和应变能密度有什么变化?
2,从纯I型到纯II型,裂纹扩展阻力明显增大的原因是什么? K_{II} 分量对于复合型裂纹扩展的作用是什么?
3,在裂纹顶端塑性区中,平面应力和平面应变状态的主要区别以及它们对裂纹扩展阻力的影响。这些问题的研究,对于揭示裂纹扩展规律,防止脆断发生以及建立新的断裂准则都是十分重要的。

二、材料与试样

采用GC-4为试验材料,900°C油淬后180°C回火2h,其化学成分(%)及力学性能如下:

C	Cr	Mo	V	Si	Mn	P	S
0.40	1.30	0.48	0.10	1.33	0.95	0.01	0.004
$\sigma_{0.2}$, kgf/mm ²	σ_b , kgf/mm ²		δ , %	ψ , %	K_{Ic} , kgf·mm ^{-3/2}		
137	188		10.9	39.8	151		

K_{Ic} 试验按ASTM-E399-74标准进行。 $K_I K_{II}$ 试验采用不对称三点弯曲和四点弯曲试样⁽¹⁾。线弹性条件下脆断时的 $K_I K_{II}$ 值如图2所示。取图中1—4号四种情况分析

试样断裂时裂纹顶端塑性区的形状、尺寸和塑性区内的应力、应变、应变能密度分布。其中 4 号为根据试验曲线外推得到的纯 II 型情况，其余几个试样的详细情况列于表 1。

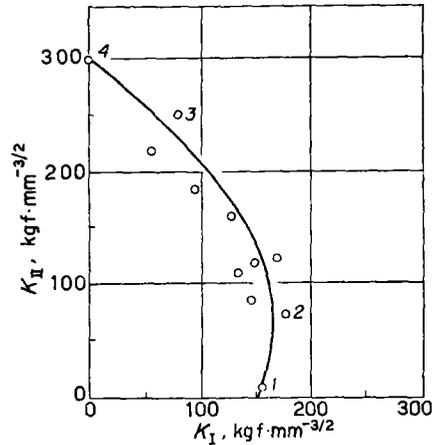
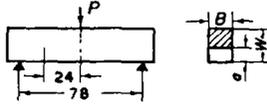
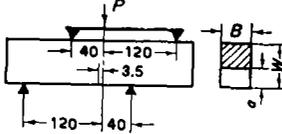


图 2 GC-4 的脆断曲线

Fig. 2 Brittle behaviour of GC-4 steel

表 1 试样规格及其试验结果

Table 1 Specification of specimen and result

№	Specimen size, mm			Parameter at initial growth point			Fracture angle deg.	Remark
	B	W	a	P	K _I	K _{II}		
1	21	27	14.7	1.26	151	0	0	after ASTM-E399-74
2	21	27	14	7.6	158	69	54.5	
3	18	63.1	33.56	30	84	251	63.5	
4	18	63.1	33.56	35.6	0	300	70.5	by extrapolation

Note: P is the total load in t; K_I and K_{II} are the critical stress intensity factors at initial growth point in kgf/mm^{3/2}.

三、裂纹顶端塑性区尺寸的弹性近似计算

在线弹性情况下，裂纹顶端塑性区尺寸相对于零件和裂纹来说非常小，所以，可以近似地用弹性应力场达到 Mises 屈服准则点的轨迹来描述塑性区的形状和尺寸。

Von-Mises 屈服准则为：

$$(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 = 2\sigma_s^2 \quad (2)$$

σ_s 为单轴拉伸屈服应力。

在纯 I 型情况下, 裂纹顶端附近的弹性应力场可近似地表示为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \\ \tau_{xy} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

在纯 II 型情况下裂纹顶端附近的弹性应力场可近似地表示为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left[2 + \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2} \right] \\ \sigma_y &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left[1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2} \right] \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

线弹性条件下 K_I , K_{II} 复合, 弹性应力场叠加, 由(2)、(3)、(4)式可得应力达到 Mises 屈服准则点的轨迹。

平面应力情况下, 塑性区尺寸为:

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \left\{ K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left(1 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right) \right. \\ &\quad + K_I K_{II} \sin \theta (3\cos \theta - 1) + K_{II}^2 \left[3 \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left(1 - 9\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (5) \end{aligned}$$

平面应变情况下, 塑性区尺寸为:

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{1}{2\pi\sigma_s^2} \left\{ K_I^2 \cos^2 \frac{\theta}{2} \left[(1-2\nu)^2 + 3\sin^2 \frac{\theta}{2} \right] \right. \\ &\quad + K_I K_{II} \sin \theta [3\cos \theta - (1-2\nu)] + K_{II}^2 \left[3 \right. \\ &\quad \left. \left. + \sin^2 \frac{\theta}{2} \left((1-2\nu)^2 - 9\cos^2 \frac{\theta}{2} \right) \right] \right\} \quad (6) \end{aligned}$$

对于理想塑性的材料, 塑性区尺寸应为按(5)、(6)式计算值的 2 倍, 而对于真实的加工硬化材料, 塑性区尺寸应界于二者之间。

由(5)、(6)式算得 1—4 号试件脆断时裂纹顶端塑性区尺寸, 结果示于图 3, 并将在本文第五部分进行讨论。

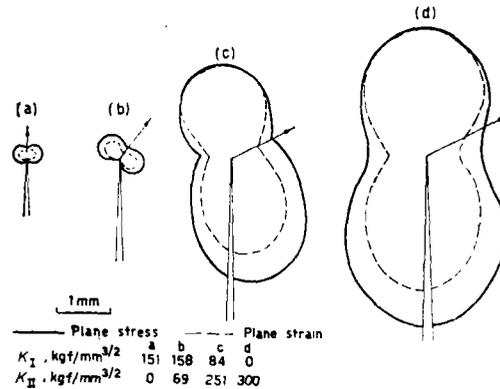


图 3 脆断时裂纹顶端塑性区随变形条件的变化

Fig. 3 Crack tip plastic zone shapes under different conditions
Arrow showing cracking direction

四、裂纹试样的弹塑性有限元分析

虽然本文所研究的试样尺寸均满足线弹性平面应变脆断条件，但这仅表明，直到开裂为止，裂纹顶端塑性区尺寸远小于试样其它特征尺寸，也即塑性区对包围它的广大弹性区中的应力场的影响是很小的。但如前所述，断裂发生在断裂过程区，而后者又存在于裂纹顶端塑性区内。因此，从宏观角度研究金属材料裂纹扩展阻力时，尽管是小范围屈服，裂纹顶端附近的弹塑性行为仍是非常主要的。

迄今为止可以用解析方法处理的弹塑性断裂问题是极少的。HRR 理论给出的裂纹顶端的弹塑性应力应变场奇异项表达式也只限于 I 型加载的情况。因此，本文采用文献 [8] 提供的增量初应力法有限元程序，在国产 TQ-16 机上对前述试样进行了弹塑性数值分析。由于复合型试样是非对称的，所以在网格粗细相同的条件下，复合型试样所需结点数为 I 型试样的 2 倍。由于所用计算机容量的限制不得不采用了较粗的网格。四种试样裂纹顶端网格的划分均如图 4 所示。最小单元线尺寸为 1mm，总结点数约为 210，总单元数约为 350 不等。按照 GC-4 钢的材料力学参数，计算中采用了如下线性硬化的材料曲线：

$$\bar{\sigma} = \sigma_s + \frac{E}{k} \cdot \bar{\varepsilon}_p$$

其中 $\bar{\sigma}$ 和 $\bar{\varepsilon}_p$ 分别为等效应力和等效塑性应变， E 为杨氏模量， σ_s 为屈服应力，取 136 kgf/mm^2 ， k 为材料常数，其值为 27.6。

有关的主要计算结果列于表 2。由于没有精确解和相应的实验数据可资比较，有限元法计算得到的裂纹顶端附近的应力、应变以及应变能密度值的绝对误差尚难判定，但是四种试样计算结果所显示的变化规律却是有意义的，这些将在第五部分讨论。图 5 为 3 号试样平面应力和平面应变情况下的塑性区。由于所用等应力三角形单元尺寸较大，

表 2 有限元计算结果
Table 2 Calculated finite element results

Specimen №	1	2	3	4
Critical value				
K_I , $\text{kgf}/\text{mm}^{3/2}$	151	158	84	0
K_{II} , $\text{kgf}/\text{mm}^{3/2}$	0	69	251	300
Hydrostatic tensile stress, σ_m , kgf/mm^2				
Element 1	26.73/35.24	53.53/72.49	89.99/201.81	92.49/215.33
2	37.41/51.15	53.94/72.76	85.51/144.29	77.56/132.74
3	35.78/47.32	48.20/63.24	54.20/74.76	37.24/59.91
4		48.39/64.52	46.88/109.77	38.23/99.55
5		46.21/63.81	25.96/79.88	14.01/63.83
6		23.65/29.56	-31.27/-63.18	-52.31/-114.13
Equivalent stress, $\bar{\sigma}$, kgf/mm^2				
Element 1	69.72/55.0	128.48/100	162.82/143.3	170.1/145.5
2	81.37/60.5	102.31/67.78	151.63/137.55	155.94/138.6
3	60.98/34.0	83.55/	137.01/104.45	142.42/136.4
4		99.51/70.62	136/136.94	141.3/138.8
5		101.18/75.53	137.06/138.79	142.13/139.9
6		60.90/46.81	137.35/138.38	145.49/140.9
Ratio $\sigma_m/\bar{\sigma}$				
Element 1	0.383/0.641	0.417/0.724	0.553/1.41	0.544/1.480
2	0.460/0.845	0.527/1.073	0.564/1.05	0.514/0.958
3	0.587/1.392	0.577/	0.396/0.716	0.26/0.366
4		0.486/0.918	0.345/0.802	0.271/0.717
5		0.457/0.845	0.189/0.576	0.099/0.456
6		0.388/0.631	-0.228/-0.457	-0.36/-0.811
Strain energy density, S , $\text{kgf}\cdot\text{mm}\cdot\text{mm}^{-3}$				
Element 1	0.12/0.098	0.76/0.36	28.92/9.86	41.50/16.70
2	0.18/0.15	0.58/0.25	19.27/4.78	24.96/7.35
3	0.11/0.077	0.32/0.14	3.99/1.54	7.08/3.34
4		0.47/0.22	1.87/4.12	5.24/7.16
5		0.48/0.23	2.65/4.35	6.29/7.16
6		0.16/0.07	3.61/4.04	10.43/9.47
Volume-strain energy density, E_v , $\text{kgf}\cdot\text{mm}\cdot\text{mm}^{-3}$				
Element 1	0.0068/0.012	0.0243/0.05	0.302/0.388	0.340/0.442
2	0.013/0.025	0.0296/0.051	0.185/0.198	0.172/0.168
3	0.012/0.021	0.023/0.038	0.032/0.053	0.017/0.024
4		0.023/0.04	0.021/0.115	0.016/0.094
5		0.021/0.039	0.007/0.061	0.0024/0.039
6		0.0055/0.008	0.011/0.038	0.042/0.124

Table 2 (continued)

Specimen No	1	2	3	4
Critical value				
K_I , kgf/mm ^{3/2}	151	158	84	0
K_{II} , kgf/mm ^{3/2}	0	69	251	300
Distortion-strain energy density, E_d , kgf·mm·mm ⁻³				
Element 1	0.11/0.086	0.70/0.31	28.61/9.47	41.16/16.26
2	0.16/0.13	0.55/0.19	19.09/4.58	24.78/7.18
3	0.10/0.056	0.29/0.038	3.96/1.49	7.07/3.31
4		0.44/0.18	1.85/4.01	5.22/7.06
5		0.45/0.20	2.64/4.29	6.29/6.77
6		0.16/0.062	3.60/4.01	10.39/9.34
Ratio E_v/E_d				
Element 1	0.06/0.14	0.035/0.16	0.011/0.041	0.024/0.027
2	0.08/0.20	0.054/0.26	0.0097/0.0433	0.007/0.023
3	0.12/0.38	0.076/0.388	0.0081/0.036	0.0024/0.0072
4		0.051/0.219	0.011/0.029	0.0031/0.013
5		0.045/0.199	0.0028/0.014	0.0004/0.0057
6		0.035/0.134	0.003/0.0095	0.004/0.013

Note: Numerator-plane stress; denominator-plane strain. All data listed are taken at initial growth point.

$$\sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \varepsilon_m = \frac{1}{3}(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

$$\bar{\sigma} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2]}$$

$$S = \int (\sigma_x d\varepsilon_x + \sigma_y d\varepsilon_y + \sigma_z d\varepsilon_z + \tau_{xy} d\gamma_{xy})$$

$$E_v = \int \sigma_m d\varepsilon_m$$

$$E_d = S - E_v$$

实际上那些 $\bar{\sigma}$ 小于 σ_s 的单元已部分进入了塑性, 所以真实的塑性区尺寸应较图 5 所示为大。

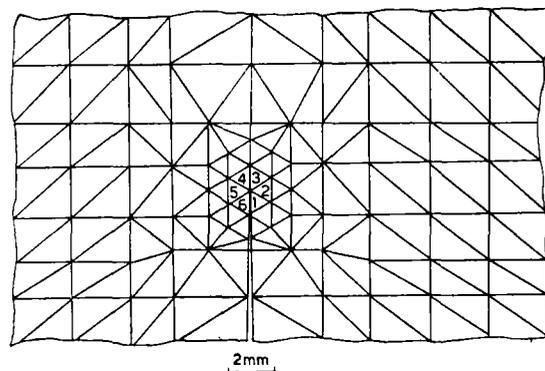


图 4 裂纹顶端附近有限单元的划分

Fig. 4 Detail of meshes in the vicinity of crack-tip

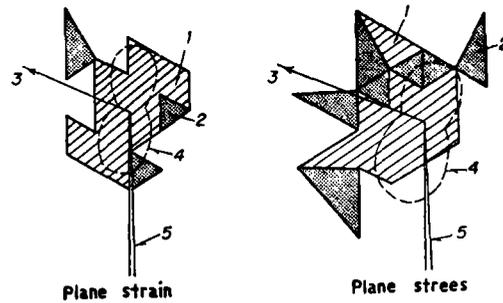


图 5 3号试样开裂时的塑性区

Fig. 5 Plastic zone of specimen No. 3 at initial growth point

1—Elastic elements, $\bar{\sigma}/\sigma_s \geq 1$; 2—Finite element, $1 > \bar{\sigma}/\sigma_s \geq 0.9$; 3—Cracking direction;
4—Estimated by linear elastic condition; 5—Crack

五、分析与结论

(1) 现有的三种复合型断裂准则在计算开裂条件时均采用了复合型裂纹扩展阻力等于 I 型裂纹扩展阻力的假设, 而未考虑裂纹扩展阻力与加载型式和应力状态的关系。根据实验及计算结果表明: 开裂时裂纹顶端的最大正应力 $(\sigma_\theta)_{cr}$ 和开裂单元的 $\bar{\sigma}$ 以及应变能密度 S_{cr} 的数值均随 K_{II}/K_I 值的增加而增加。 $(\sigma_\theta)_{cr}$ 和 S_{cr} 并不是材料常数。例如, 1 号试样的 $(\sigma_\theta)_{cr}$ 为 56.32 kgf/mm^2 , 而 2、3、4 号试样则分别为 80.56 kgf/mm^2 、 192.3 kgf/mm^2 和 219.4 kgf/mm^2 , 1 与 3 号的 $(\sigma_\theta)_{cr}$ 相差三倍以上。4 号试样的 S_{cr} 比 1 号试样则约大两个数量级。因此, 为了建立一个可供工程应用的复合型断裂准则, 必须进一步考虑复合型裂纹扩展阻力随应力状态的变化规律。如以开裂时的最大正应力或应变能密度为复合型裂纹扩展阻力的量度, 则它们应不仅与材料的力学性能常数有关, 而且还应表示为应力状态参数的函数。

此外, 从表 2 还可看出, K_{II}/K_I 值增大时, 开裂单元的 $\sigma_m/\bar{\sigma}$ 值减小。这表明 K_{II} 的作用是使开裂方向的应力状态变软。

(2) 诚然, 断裂韧度高低的本质取决于断裂的微观过程。但是在断裂过程区达到临界状态以前, 随着载荷的增加裂纹顶端塑性区尺寸以及所吸收的总塑性功将不断增加。因此, 对于满足线弹性平面应变条件的试样, 开裂时塑性区尺寸和总塑性功随着 K_{II}/K_I 值的变化间接地反映了裂纹扩展阻力的变化。计算表明, 在线弹性平面应变条件下破断的 GC-4 超高强度钢试样, 随着 K_{II}/K_I 值的增大, 开裂时塑性区尺寸逐渐增大。在开裂方向上纯 II 型塑性区线尺寸约比纯 I 型大一个数量级, 塑性区的面积前者则比后者大两个数量级。同时随着 K_{II} 分量增大, 试样开裂前吸收的总塑性功相应增加, 例如, 平面应变情况下, 4 号试样的总塑性功约为 3 号试样的 1.4 倍。

(3) 同一试样, 表面平面应力和中心平面应变部分的裂纹顶端塑性区, 无论形

状、尺寸均有差别(见图 3)。在 I 型情况下两者差别较大,前者面积为后者的三倍,开裂方向上的线尺寸约相差 5 倍。随着 K_{II}/K_I 比值增大,两者的差别减小,在纯 II 型情况下,无论塑性区面积还是开裂方向上塑性区的线尺寸,二者的差别均在 0.5 倍以下。

分析加载过程中裂纹顶端周围三轴张力的变化发现:在平面应力条件下,单元一旦进入塑性,三轴张力随载荷的递增速率即有明显下降,说明塑性变形使该区域的三轴张力明显松弛;但是,在平面应变条件下,单元进入塑性前后三轴张力的递增速率改变甚微(如图 6 示)。裂纹顶端周围平面应力状态下的三轴张力恒小于平面应变者,进入塑性以后差别更加悬殊。

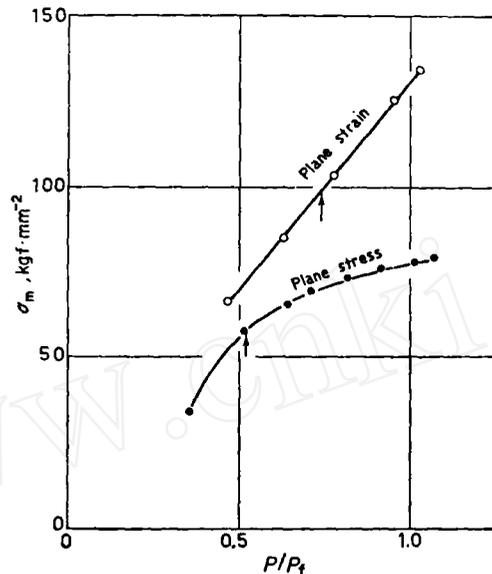


图 6 4 号试样裂纹顶端 2 单元的三轴张力随载荷的变化

Fig. 6 Hydrostatic tensile stress of №2 element in specimen

№ 4 vs load applied

Arrow showing yielding point of element

相对于平面应变状态而言,平面应力状态开裂单元的特点是:应力状态较软[例如 3 号试样 $(\sigma_m/\bar{\sigma})_{\text{平面应力开裂元}} = 0.564$, $(\sigma_m/\bar{\sigma})_{\text{平面应变开裂元}} = 1.05$]、体积应变能密度较低、进入塑性的载荷较低、歪形能密度和总应变能密度较高。所以,平面应力状态下裂纹扩展阻力较大。

参 考 文 献

- [1] 高桦、王自强、杨成寿、周爱华、金属学报, 15 (1979), 380.
- [2] Ueda, Y. and Ikeda, K., Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials, Vol. 2A, ed. by D. M. R. Taplin, 4th Int. Conf. Fracture, 1977 Univ. of Waterloo, New York, Pergamon, 1978, p. 173.
- [3] Wilson, W. K., Clark, W. G. and Wessel, E. T., AD 682754, 1968.

- [4] Sih, G. C., *Mechanics of Fracture*, Vol. 1, ed. by G. C. Sih, Noordhoff Inter. Publ., Leyden, 1973, p. XLI.
- [5] Wang, T. C. (王自强), [Advances in Research on the Strength and Fracture of Materials, Vol. 4, ed. by D. M. R. Taplin, 4th Inter. Conf. Fracture, 1977 Univ. of Waterloo, New York, Pergamon, 1978, p. 135.
- [6] Weiss, V. and Yukawa, S., *Amer. Soc. Test. Mater., Spec. Tech. Publ.*, № 381, 1964, p. 1.
- [7] Judy, R. W. Jr., and Goode, R. J., *Amer. Soc. Test. Mater., Spec. Tech. Publ.*, № 527, 1973, p. 48.
- [8] 张晓堤, 二维裂纹体的弹塑性有限元介, 待发表工作.

A STUDY ON THE PLASTIC ZONE AHEAD OF MIXED-MODE CRACK TIP FRACTURED UNDER LINEAR ELASTIC CONDITION

by Gao Hua and Zhang Xiaodi (Institute of Mechanics, Academia Sinica)
(Manuscript received 11 July, 1979)

ABSTRACT

The crack-tip plastic zone in mixed-mode brittle fractured specimens of different K_{II}/K_I ratio of a high strength steel has been investigated under critical conditions. Both elastic approximate analysis and elastic-plastic finite element method were used to analyze the distribution of stress, strain and strain energy density in the vicinity of the crack-tip. It is shown that:

(1) at the initial moment of crack growth, the $(\sigma_{\theta})_{cr}$ and S_{cr} are not material parameters, but increase with K_{II}/K_I ;

(2) for all specimens fractured under linear elastic condition, the crack tip plastic zone area of mode II is larger than that of mode I by two order of magnitude and the total plastic work absorbed before brittle fracture markedly increases with K_{II}/K_I ;

(3) the higher the K_{II}/K_I ratio is, the lower the $\sigma_m/\bar{\sigma}$ in the vicinity of crack tip and initial growth directions;

(4) under mode I condition, the area of the plane stress plastic zone at specimen surface is larger than that of the plane strain plastic zone at the centre of the same specimen by a factor of 3. However, with the increase of K_{II} component, their difference decreases. Therefore, the influence of thickness on mixed-mode brittle fracture toughness might be smaller than on mode I.

Besides, the increase of hydrostatic tension stress under plane stress condition is quite different from that under plane strain condition. Once the crack tip zone falls into plastic state, the increase rate of the hydrostatic tension stress in the plane stress crack tip zone will become gentle instantaneously, but scarcely any such change would be observed under plane strain condition. It seems that at the initial growth moment the hydrostatic tension stress in the plane stress plastic zone is much smaller than in the plane strain plastic zone.