

电流分布对直圆柱等离子体 不稳定性发展率的影响

徐复 陈乐山

(中国科学院力学研究所)

摘要 本文的结果是:在直圆柱等离子体的情形,提高 β_p 并未使扭曲模不稳定性变得更坏,对 $m=1$ 的扰动,趋中心的轴向电流分布比起较平坦的分布来说不稳定性发展率要大,即稳定性反而变坏.当 $m=2$ 时,情况正相反,这和文献[1,8]的结果一致.计算结果表明,角向电流的不同分布对不稳定性发展率的影响不大.

引言

对于托卡马克来说,如何在给定的场强下,既维持住约束,又把等离子体压强尽可能提高,这是个大问题,它决定了从经济角度看,托卡马克是否能被接受.过去的研究工作很多是讨论 $\beta_p \leq 1$ 的情况.近几年来,在一些装置上,由于在温度、密度及约束时间诸方面都取得了一些令人鼓舞的实验进展(如:在PLT上, $T_i = 6.5$ 千电子伏;在Alcator上, $n\tau = 3 \times 10^{13}$ 秒·厘米⁻³),遂使零功率反应堆似有建堆在望之势,促使不少人^[4-7]相继对托卡马克上进一步提高 β 所可能遇到的限制作深入的探讨.人们^[4-7]现在倾向于认为,从平衡的角度看,只要能对等离子体快速加热,则借助于磁通守恒托卡马克的概念, β_p 可以超过 R/a 这个过去认为不能逾越的值;眼下令人担心的倒是稳定性是否能过关.在理想MHD的各种不稳定模式中,不少人^[1-3,5,6]讨论了气球模不稳定对提高 β_p 的影响;也有人^[6]同时讨论了 $n=1$ 的外部扭曲模对提高 β_p 的影响,并认为它还是很重要的.上述讨论都是从环形位形出发,用数值计算的办法进行的,其结果既含有扭曲模的影响,又含有气球模的影响.为了弄清单纯的外部扭曲模对提高 β_p 可能产生的影响,最好能把它从气球模的影响下分离出来.下面我们考虑直圆柱等离子体的位形(见图1),这样将不出现气球模.

在直圆柱等离子体位形中,轴向电流沿径向的分布方式对稳定性的影响已有人^[1,8]讨论过,他们的看法是趋中心的电流分布其稳定性较好.我们将检验这一说法是否具有普遍性,另外我们还将讨论角向电流分布对稳定性的影响.

下面,我们首先讨论平衡态,这里等离子体中的轴向电流分布和角向电流分布可以任意给定.为了得到具体的数值结果,取轴向电流

$$\tilde{j}_{0z}(\tilde{r}) = \frac{2(s+2)}{s}(1-\tilde{r}^s), \quad s \geq 0$$

本文于1979年11月收到.

用以调节分布型式,上式保证了当 s 变化时,轴向总电流不变;角向电流取为

$$\tilde{j}_{0\theta}(\tilde{r}) = \tilde{j}_2 \cdot \tilde{r}^P \cdot (\tilde{r} - 1), \quad P \geq 0$$

用以调节分布型式, \tilde{j}_2 调节 β_p (见图 2, 3). 然后在长波近似的假定下,我们先求出真空区域中满足边界条件的扰动磁场的解;而支配等离子体扰动运动的方程则可化为关于径向位移 ξ_r 的一个二阶线性常微分方程^[9]. 在一些近似假定下,可以得到 ξ_r 的相应边界条件的简单表达式. 我们用伽辽金法求解这一本征值问题,其中,对试验函数只用了一个待定常数.

我们得到的结果是:在直圆柱等离子体的情形,提高 β_p 并未使扭曲模不稳定性变得更坏. 对 $m=1$ 的扰动,趋中心的轴向电流分布比起较平坦的分布来说不稳定性发展率要大,即稳定性反而变坏. 当 $m=2$ 时,情况正相反,这和文献 [1, 8] 的结果一致. 计算结果表明,角向电流的不同分布对不稳定性发展率的影响不大.

最后,应当指出,研究电流分布对外部扭曲模不稳定性发展率的影响,不仅有助于弄清扭曲模对提高 β 的限制,而且由于近年来中性束注入等新加热技术的发展,使得有可能通过控制加热功率在等离子体截面上的分布,来达到对平衡电流位形的控制,这样就使这一研究有着一定的实际应用的意义.

平 衡 态

一旦 $\tilde{j}_{0z}(\tilde{r})$ 及 $\tilde{j}_{0\theta}(\tilde{r})$ 给出后,平衡时的磁场分布及压强分布均可分别由安培定律 $\text{curl } \tilde{\mathbf{B}}_0 = \tilde{\mathbf{j}}_0$ 及动量方程 $\tilde{\mathbf{j}}_0 \times \tilde{\mathbf{B}}_0 = \text{grad } \tilde{p}_0$ 结合下文的边界条件定出.

式中波纹号“~”代表无量纲化以后的物理量. 在无量纲化中,选等离子体柱的半径 a 为特征长度,平衡时角向磁场在 a 处的值 $B_{0\theta}(a)$ (简记为 B_a) 为磁场的特征尺度,于是压强的特征尺度是 $\frac{B_a^2}{\mu}$, 电流密度的特征尺度是 $\frac{B_a}{a\mu}$, μ 是真空导磁率 ($4\pi \times 10^{-7}$ 亨/米), 单位制是 MKSA 制,下标“0”标记未扰态的量.

在 $B_r = 0$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{\partial}{\partial z} = 0$ 的假定下,动量方程化简为:

$$d\tilde{p}_0 + d \left(\frac{\tilde{B}_{0z}^2 + \tilde{B}_{0\theta}^2}{2} \right) + \frac{\tilde{B}_{0z}^2 d\tilde{r}}{\tilde{r}} = 0$$

密度 $\rho_0 = \text{const}$ 及导电率为无限大的等离子体占据了从 $\tilde{r} = 0$ 到 $\tilde{r} = 1$ 的柱形区域;从 $\tilde{r} = 1$ 到 $\tilde{r} = \frac{b}{a}$ 的环形区域则是真空区;在 $\tilde{r} = \frac{b}{a}$ 处置有理想导体壁(见图 1). 所以在 $\tilde{r} = 1$ 处有:

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 = 0, \quad \tilde{B}_{0\theta} = 1, \quad \tilde{B}_{0z} = \frac{B_{0z}(a)}{B_a},$$

($B_{0z}(a)$ 由纵场线圈中的电流值定出). 真空区压强为零,

$$\hat{B}_{0z}(r) = B_{0z}(a), \quad \hat{B}_{0\theta}(r) = \frac{a \cdot B_a}{r}, \quad \hat{B}_{0r}(r) = 0.$$

角向比压 β_p 定义为:

$$\beta_P = p_{0\text{等离子}} / \frac{B_a^2}{2\mu}$$

$$p_{0\text{等离子}} = \frac{1}{a^2} \int_0^a p_0(r) \cdot 2r dr$$

因而

$$\beta_P = 1 + 2 \left\{ \frac{\tilde{j}_2 \cdot \tilde{B}_{0z}(1)}{(P+3)(P+4)} - \frac{\tilde{j}_2^2}{(P+2)(P+3)(P+4)(2P+5)} \right\}$$

其中

$$\tilde{B}_{0z}(1) = \frac{B_{0z}(a)}{B_{0z}(a)}$$

当 $P, \beta_P, \tilde{B}_{0z}(1)$ 给出后, \tilde{j}_2 可由上述方程定出. 在由此定出的两个 \tilde{j}_2 值中, 选有实际意义的(绝对值较小者) \tilde{j}_2 值所对应的平衡状态作为讨论稳定性的出发点.

对平衡态的线性稳定性

受扰后, 物理量相对于平衡时所取值的差额称为扰动量, 以右上方的“'”来标记. 对等离子体区, 扰动量计有 $p', \rho', \mathbf{B}', \xi$ 四个; 真空区的扰动量为 $\hat{\mathbf{B}}'$. 其中 ξ 是等离子体对于平衡位置的位移向量; 所有上述扰动量都是 t, r, θ, z 的未知函数.

$\hat{\mathbf{B}}'$ 应满足的方程是:

$$\text{curl } \hat{\mathbf{B}}' = 0$$

$$\text{div } \hat{\mathbf{B}}' = 0$$

至于等离子体区, 在线性近似下, 理想 MHD 方程归结为:

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \text{grad}(\gamma p_0 \text{div } \xi + \xi \cdot \text{grad } p_0) - \frac{1}{\mu} [\mathbf{B}' \times \text{curl } \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \times \text{curl } \mathbf{B}']$$

其中 γ 为定压比热与定容比热之比, $\mathbf{B}' = \text{curl}(\xi \times \mathbf{B}_0)$. 其它扰动量 p', ρ' 亦均可表为 ξ 的已知函数.

边界条件是:

$r = 0$ 处, ξ 取有限值.

$r = a$ 处, 磁场的法向分量应连续, 即 $B'_r = \hat{B}'_r$; 同时总压应连续, 即

$$B_{0\theta} \cdot B'_\theta + B_{0z} \cdot B'_z = \hat{B}_{0\theta} \cdot \hat{B}'_\theta + \hat{B}_{0z} \cdot \hat{B}'_z.$$

$r = b$ 处, 磁场的法向分量应为零, 即 $\hat{B}'_r = 0$.

设

$$\xi(t, r, \theta, z) = \text{Re}[\xi(r) \cdot e^{i(\omega t + m\theta + kz)}]$$

$$\hat{\mathbf{B}}'(t, r, \theta, z) = \text{grad } \varphi$$

$$\varphi(t, r, \theta, z) = \text{Re}[f(r) \cdot e^{i(\omega t + m\theta + kz)}]$$

于是真空区的扰动方程可写为

$$\frac{d^2 f}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{df}{dr} - \left(\frac{m^2}{r^2} + K^2 \right) f = 0$$

等离子体区的扰动方程经过投影, 消去 ξ_θ, ξ_z 之后, 可写为^[9,10]

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(r \cdot \xi_r)}{dr} \cdot \frac{\omega^2 \rho_0 - \frac{F^2}{\mu}}{N} \cdot \left[\rho_0 \omega^2 \left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{\mu} \right) - \gamma p_0 \frac{F^2}{\mu} \right] \right\} \\
& + \left\{ \rho_0 \omega^2 - \frac{F^2}{\mu} - \frac{2B_{0\theta}}{\mu} \cdot \frac{d}{dr} \left(\frac{B_{0z}}{r} \right) - \frac{4K^2 B_{0\theta}^2}{\mu r^2} \cdot \left(\frac{\rho_0 \omega^2 B_0^2 / \mu - \gamma p_0 F^2 / \mu}{N} \right) \right\} \\
& + r \cdot \frac{d}{dr} \left[\frac{2KB_{0\theta} \left(\frac{m}{r} B_{0z} - KB_{0\theta} \right)}{\mu r^2} \cdot \frac{\rho_0 \omega^2 \left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{\mu} \right) - \gamma p_0 \frac{F^2}{\mu}}{N} \right] \\
& \cdot \frac{(r \xi_r)}{r} = 0 \tag{1}
\end{aligned}$$

其中

$$F = \frac{mB_{0\theta}}{r} + KB_{0z} = \frac{P_0}{r} [m + n \cdot q(r)]$$

$$N = \rho_0^2 \omega^4 - \left(\frac{m^2}{r^2} + K^2 \right) \cdot \rho_0 \omega^2 \cdot \left(\gamma p_0 + \frac{B_0^2}{\mu} \right) + \gamma p_0 \left(\frac{m^2}{r^2} + K^2 \right) \frac{F^2}{\mu}$$

令

$$\tilde{\eta} = \frac{r \xi_r}{a^2},$$

并对(1)式无量纲化,下文中将把无量纲化以后的(1)式简记为 $L(\tilde{\eta}) = 0$ 。

边界条件是:

$$\tilde{r} = 0 \text{ 处,}$$

$$\tilde{r} \cdot \tilde{\xi}_r = 0 \tag{2}$$

$$\tilde{r} = 1 \text{ 处,}$$

$$\tilde{B}'_r = \hat{B}'_r \tag{3}$$

$$\left. \frac{\frac{d}{d\tilde{r}} (\tilde{r} \cdot \tilde{\xi}_r)}{\tilde{\xi}_r} \right|_{\tilde{r}=1} = -\frac{m\alpha}{\alpha} (\chi u - 2) \tag{4}$$

$$\tilde{r} = \frac{b}{a} \text{ 处,}$$

$$\hat{B}'_r = 0 \tag{5}$$

(4)式中的

$$u = m + nq|_{\tilde{r}=1} = m + nq_a, \quad \alpha = u^2 - \Omega^2,$$

$$\Omega^2 = \omega^2 / \frac{B_a^2}{\mu \rho_0 a^2}, \quad \chi = \frac{1 + (a/b)^{2m}}{1 - (a/b)^{2m}}$$

在推导总压连续条件(4)时,作了下列假定:

$$m^2 \gg K^2 a^2 = \tilde{K}^2, \quad B_0^2(a) \gg B_a^2,$$

略去 N 中的 $\rho_0^2 \omega^4$ 项。

本征值问题

对真空区的扰动磁场方程,在长波近似 $\frac{m^2}{a^2} \gg K^2$ 下(本文只限于讨论 $m \geq 1$ 的模式),

f 可写出 f 的通解为:

$$f = C_1 r^m + C_2 r^{-m}.$$

用了边界条件 (3), (5) 后, 可除去 C_1, C_2 , 得:

$$f = \frac{i \cdot B_a \cdot \xi_r(a)}{m} \cdot \frac{m + nq_a}{\left(\frac{b}{a}\right)^m - \left(\frac{a}{b}\right)^m} \cdot \left[\left(\frac{r}{b}\right)^m + \left(\frac{b}{r}\right)^m\right]$$

对等离子体区的扰动方程 $L(\tilde{\eta}) = 0$, 我们满足于用伽辽金法来近似求解, 伽辽金法要求^[1]:

$$\int_0^1 L(\tilde{\eta}) \cdot \tilde{\eta} \cdot d\tilde{r} = 0 \quad (6)$$

选

$$\tilde{\eta} = D \cdot \tilde{r}^m \cdot (1 + c\tilde{r}) \quad (7)$$

为试验函数. 式 (7) 自动满足边界条件 (2); 为使式 (7) 也能满足边界条件 (4), 式 (7) 中的 c 应取为

$$c = \frac{-\alpha m + (2mu - mu^2\chi)}{\alpha(m+1) - (2mu - mu^2\chi)} \quad (8)$$

另一方面, 式 (7) 亦应满足 (6). 将 (7) 代入 (6) 式, 再次采用以前已用过的假定, 并考虑到 $\beta \ll 1$, 经过繁而不难的运算, 最后可得:

$$\begin{aligned} & c^2 \cdot \left\{ \frac{2m+1}{2m+2} \cdot \alpha + \left[\frac{2m(1-2m^2)}{(m+1)(2m+2+s)} + \tilde{K}^2 \cdot \frac{2(2m+6+s)}{m(m+2)(2m+4+s)} \right] \cdot u \right. \\ & + \left[\frac{2m^2 \cdot (1-2m^2)}{(m+1)(m+1+s)(2m+2+s)} + 4\tilde{K}^2 \cdot \left(\frac{1 + \frac{6}{s} + \frac{8}{s^2}}{2m+4} \right. \right. \\ & \left. \left. - \frac{\frac{6}{s} + \frac{16}{s^2}}{2m+4+s} + \frac{\frac{4}{s^2}}{m+s+2} \right) \right] + c^{(2)} \left\} + c \cdot \left\{ \alpha + \left[\frac{8m(1-m)}{2m+1+s} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{8\tilde{K}^2(2m+5+s)}{m(2m+3)(2m+3+s)} \right] \cdot u + \left[\frac{16m^2(1-m)}{(2m+1+s)(2m+1+2s)} \right. \right. \\ & \left. \left. + 8\tilde{K}^2 \cdot \left(\frac{1 + \frac{6}{s} + \frac{8}{s^2}}{2m+3} - \frac{\frac{6}{s} + \frac{16}{s^2}}{2m+3+s} + \frac{\frac{8}{s^2}}{2m+3+2s} \right) \right] + c^{(1)} \right\} \\ & + 1 \cdot \left\{ 0 + \left[\frac{4m(1-m)}{2m+s} + \frac{2\tilde{K}^2(2m+4+s)}{m(m+1)(2m+2+s)} \right] \cdot u \right. \\ & \left. + \left[\frac{4m^2(1-m)}{(m+s)(2m+s)} + 4\tilde{K}^2 \cdot \left(\frac{1 + \frac{6}{s} + \frac{8}{s^2}}{2m+2} - \frac{\frac{6}{s} + \frac{16}{s^2}}{2m+2+s} \right. \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\frac{8}{s^2}}{2m+2+2s} \right) \right] + c^{(0)} \right\} = 0 \quad (9) \end{aligned}$$

比较式(9)与[12]中的相应式子,不难发现因角向电流非零($\beta_P \neq 1$)而引起的修正项分别体现在 $c^{(2)}$, $c^{(1)}$, $c^{(0)}$ 中,它们的通用形式是:

$$c^{(i)} = \tilde{K} \cdot \tilde{j}_2 \cdot [u \cdot c_u^{(i)}(m, P) + c_1^{(i)}(m, P, s) + \tilde{K} \cdot \tilde{j}_2 \cdot c_2^{(i)}(m, P) + \tilde{K}^2 \cdot c_3^{(i)}(m, P, s)] \quad (i = 0, 1, 2) \quad (10)$$

式(10)中含有 12 个系数,它们的具体形式分别是:

$$\begin{aligned} c_u^{(0)}(m, P) &= \frac{2m}{(2m+1+P)(2m+2+P)} \\ c_1^{(0)}(m, P, s) &= 4m \cdot (m-1) \left[\frac{1}{(P+1)(P+2)(2m+s)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(P+1)(2m+1+P+s)} + \frac{1}{(P+2)(2m+2+P+s)} \right] \\ &\quad + \frac{4m^2}{s} \left[\frac{1}{(2m+1+P)(2m+2+P)} - \frac{1}{(2m+P+s+1)(2m+P+s+2)} \right] \\ &\quad + 2m \cdot \left[\frac{2m+4+P+s}{(2m+2+P)(2m+2+P+s)} - \frac{2m+3+P+s}{(2m+1+P)(2m+1+P+s)} \right] \\ c_2^{(0)}(m, P) &= 2m \cdot \left[\frac{1}{(P+1)(2m+2+2P)} + \frac{1}{(P+2)(2m+4+2P)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{(P+1)(P+2)(2m+1+P)(2m+2+P)} \right. \\ &\quad \left. - \frac{2P+3}{(P+1)(P+2)(2m+3+2P)} \right] \\ c_3^{(0)}(m, P, s) &= \frac{4}{m} \cdot \left[\frac{2m+5+P+s}{(P+1)(2m+3+P)(2m+3+P+s)} \right. \\ &\quad - \frac{2m+4+s}{(P+1)(P+2)(2m+2)(2m+2+s)} \\ &\quad \left. - \frac{2m+6+P+s}{(P+2)(2m+4+P)(2m+4+P+s)} \right] \\ c_u^{(1)}(m, P) &= (4m+2) \cdot \left[\frac{1}{(P+1)(2m+P+2)} \right. \\ &\quad - \frac{1}{(P+1)(P+2)(2m+1)} - \frac{1}{(P+2)(2m+3+P)} \\ &\quad \left. + \frac{1}{(2m+2+P)(2m+3+P)} \right] \\ c_1^{(1)}(m, P, s) &= 4m \cdot \left[\frac{-(2m+1)(2m+1+P)}{(P+1)(2m+2+P)(2m+2+P+s)} \right. \\ &\quad + \frac{(2m+1)(2m+2+P)}{(P+2)(2m+3+P)(2m+3+P+s)} \\ &\quad + \frac{2(2m^2-m-1)}{(P+1)(P+2)(2m+1)(2m+1+s)} \\ &\quad \left. + \frac{(2m-1)(4m+5+2P+s)}{(2m+P+2)(2m+P+3)(2m+P+s+2)(2m+P+s+3)} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2(2m + 2P + s + 4)}{(P + 1)(P + 2)(2m + P + s + 2)(2m + P + s + 3)} \\
& - \frac{1}{(2m + P + 2)(2m + P + 3)} \Big] \\
c_2^{(1)}(m, P) &= \frac{(2m + 1)}{(P + 1)^2(P + 2)^2} \cdot \left[\frac{1}{2m + 1} - \frac{(2P^2 + 10P + 4m + 12)}{(2m + P + 2)(2m + P + 3)} \right. \\
& \left. + \frac{(P + 2)^2(2P + 3)}{2m + 2P + 3} - \frac{4(P + 2)^2(P + 1)}{2m + 2P + 4} + \frac{(P + 1)^2(2P + 5)}{(2m + 2P + 5)} \right] \\
c_3^{(1)}(m, P, s) &= \frac{8}{m} \cdot \left[\frac{(2m + 6 + P + s)}{(P + 1)(2m + 4 + P)(2m + 4 + P + s)} \right. \\
& - \frac{(2m + 7 + P + s)}{(P + 2)(2m + 5 + P)(2m + 5 + P + s)} \\
& \left. - \frac{(2m + 5 + s)}{(P + 1)(P + 2)(2m + 3)(2m + 3 + s)} \right] \\
c_u^{(1)}(m, P) &= (4m + 2) \cdot \left[\frac{1}{(P + 1)(2m + 3 + P)} - \frac{1}{(P + 1)(P + 2)(2m + 2)} \right. \\
& \left. - \frac{1}{(P + 2)(2m + 4 + P)} \right] + \frac{2(m + 1)}{(2m + 3 + P)(2m + 4 + P)} \\
c_1^{(2)}(m, P, s) &= \frac{(8m^2 + 4m)(2m + P + 3)}{(P + 2)(2m + P + 4)(2m + P + 4 + s)} \\
& - \frac{(8m^2 + 4m)(2m + P + 2)}{(P + 1)(2m + P + 3)(2m + P + 3 + s)} \\
& - \frac{2m}{(2m + P + 3)(2m + P + 4)} + \frac{4m(2m^2 - 1)}{(P + 1)(P + 2)(2m + 2)(2m + 2 + s)} \\
& + \frac{4m(m + 1)(2m + 2P + s + 5)}{(P + 1)(P + 2)(2m + P + s + 3)(2m + P + s + 4)} \\
& + \frac{4m^2(4m + 2P + s + 7)}{(2m + P + 3)(2m + P + 3 + s)(2m + P + 4)(2m + P + 4 + s)} \\
c_2^{(2)}(m, P) &= \frac{(2m + 1)}{(P + 1)^2(P + 2)^2} \cdot \left[\frac{1}{2m + 2} - \frac{2(2m + 2P + 5)}{(2m + 3 + P)(2m + 4 + P)} \right. \\
& \left. + \frac{(P + 2)^3}{(2m + 2P + 4)} - \frac{(P + 1)(P + 2)(2P + 5)}{(2m + 2P + 5)} + \frac{(P + 1)^2(P + 3)}{(2m + 2P + 6)} \right] \\
& - \frac{2(m + 1)}{(P + 1)(P + 2)(2m + P + 3)(2m + P + 4)} \\
& + \frac{(2m + 4P + 8)}{(P + 1)(P + 2)(2m + 2P + 4)(2m + 2P + 5)(2m + 2P + 6)} \\
c_3^{(2)}(m, P, s) &= \frac{4}{m} \cdot \left[\frac{(2m + 7 + P + s)}{(P + 1)(2m + 5 + P)(2m + 5 + P + s)} \right. \\
& \left. - \frac{(2m + 8 + P + s)}{(P + 2)(2m + 6 + P)(2m + 6 + P + s)} \right]
\end{aligned}$$

$$\left. - \frac{(2m+6+s)}{(P+1)(P+2)(2m+4)(2m+4+s)} \right\}$$

将(8)式代入(9)式,即可得到以解析形式给出的色散方程,它是个代数方程:

$$\Omega^2 = \psi \left(nq_a, m, \tilde{K}, \frac{a}{b}, s, P, \beta_P \right) \text{ 由它可以找到不稳定的最大发展率 } \Omega_{\text{峰值}}^2:$$

$$\Omega_{\text{峰值}}^2 = \psi_1 \left(m, \tilde{K}, \frac{a}{b}, s, P, \beta_P \right)$$

结 果

[12]给出了 $\beta_P = 1$ 时的结果. 它表明用伽辽金法计算这类本征值问题,即使试验函数只取一项,就已与用有限元方法得出的数值结果符合很好. 本文将这一方法推广到 $\beta_P \neq 1$ 的情形.

图4和图5给出 $\tilde{K} = 0.15, \frac{a}{b} = \frac{1}{1.2}, s = 20, P = 1, m = 1, 2, \beta_P = 3.0, 1.0, 0.3$ 时的计算结果,它表明, β_P 变化时对不稳定性发展率的影响并不大.

对于不稳定性来说,我们感兴趣的不仅是稳定的参数范围,而且还有最大的不稳定性发展率 $\Omega_{\text{峰值}}^2$. 下面,我们将着重讨论一下关于 $\Omega_{\text{峰值}}^2$ 的计算结果.

首先讨论角向比压 β_P 变化的情况. 取 $\tilde{K} = 0.15, \frac{a}{b} = \frac{1}{2}, P = 1, s = 20$,对 $m = 1, 2, 3, \beta_P = 0.3, 1.0, 3.0$ 时,我们算出的 $\Omega_{\text{峰值}}^2$ (计算中 nq_a 每次的增量是0.1),结果见表1:

表 1

$\Omega_{\text{峰值}}^2$ β_P	m	1	2	3
	0.3		-0.43	-0.39
1.0		-0.41	-0.38	-0.29
3.0		-0.36	-0.38	-0.29

这说明,对 $m = 1, 2, 3$ 三种模式, β_P 的提高并未使不稳定性发展率恶化,有时还稍好些.

表 2

$m = 1, \tilde{K} = 0.15, \beta_P = 1$				
$\Omega_{\text{峰值}}^2$ s	$\frac{a}{b}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{1.2}$
	0.2		-0.59	-0.46
2.0		-0.57	-0.44	-0.20
20		-0.54	-0.41	-0.17

表 3

$m = 1, \quad \bar{\kappa} = 0.15, \quad \beta_p = 3, \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{2}$			
Ω^2 峰值 s	P	1	5
0.2		-0.409	-0.411
2.0		-0.386	-0.388
20		-0.360	-0.362
			20
			-0.413
			-0.389
			-0.362

其次,我们讨论轴向电流分布参数 s 变化的情况. [1] 和 [8] 的结果表明, 轴向电流分布趋于向中心集中时, 稳定性较好. 对 $m = 2$, 我们的结果与此相同. 但是当 $m = 1$ 时, 我们得到了不同的结果.

由表 2, 表 3 可以看出, 当 $m = 1$ 时, 不论角向电流是否为零, 趋于向中心集中的电流分布 (表 2, 表 3 中的 $s = 0.2$) 其不稳定性发展率要大, 即稳定性不好.

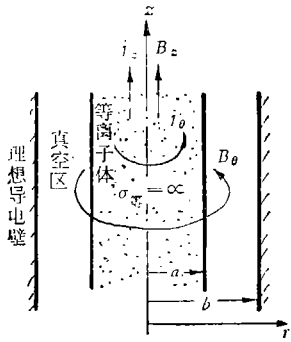


图 1

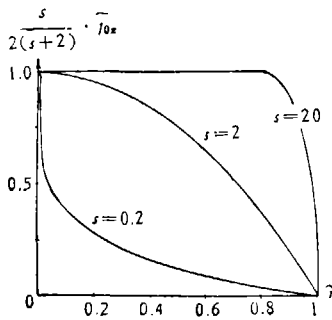


图 2

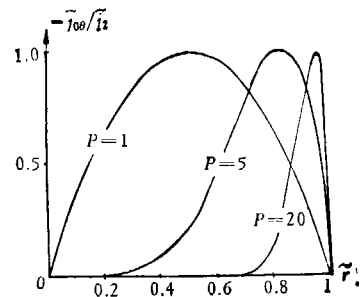


图 3

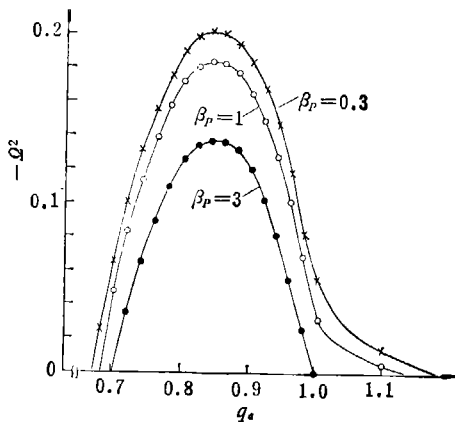


图 4

$n = -1 \quad m = 1 \quad \bar{\kappa} = 0.15 \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{1.2}$
 $P = 1 \quad s = 20$

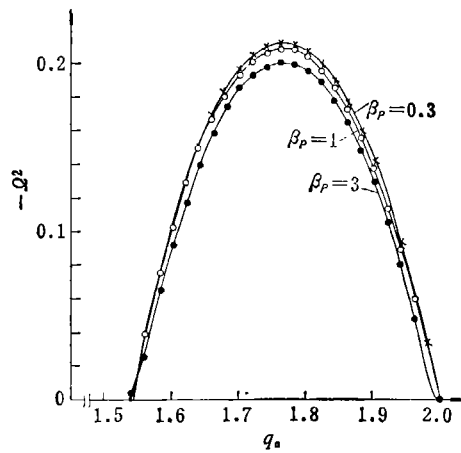


图 5

$n = -1 \quad m = 2 \quad \bar{\kappa} = 0.15 \quad \frac{a}{b} = \frac{1}{1.2}$
 $P = 1 \quad s = 20$

最后,我们讨论角向电流分布参数 P 变化时的影响. 由表 3 可以看出, P 的变化对不

稳定性发展率的影响很小。

参 考 文 献

- [1] Wesson, J. A., *Nucl. Fusion*, **18**, 1(1978), 87.
 [2] Pfirsh, D., Tokamak reactors for breakeven, A critical study of the near-term fusion reactor program, Erice-Trapani, (Sicily) Sept. 21-Oct. 1, 1976, Pergamon Press (1978), 125.
 [3] Freidberg, J. P. and Goedbloed, J. P., Pulsed high- β plasmas (Proc. 3rd Toroidal Conf., Culham, 1975), 117.
 [4] Becker, G., Gruber, O., Krause, H., Mast, F. Wilhelm, R., *Nucl. Fusion*, **18**, 12(1978), 1653.
 [5] Coppi, B., Ferreira, A., Mark, J. W-K., Ramos, J. J., *Nucl. Fusion*, **19**, 6(1979), 715.
 [6] Todd, A. M. M., Manickam, J., Okabayashi, M., Chance, M. S., Grimm, R. C., Greene, J. M., Johnson, J. L., *Nucl. Fusion*, **19**, 6(1979), 743.
 [7] Hogan, J. T., *Nucl. Fusion*, **18**, 6(1978), 753.
 [8] Takeda, T., Shimomura, Y., Ohta, M., Yoshikawa, M., *Phys. Fluids*, **15**, 12, (1972), 2193.
 [9] Hain, K. and Müst, R., *Z. Naturforsch*, **13a**, (1958), 936.
 [10] Goedbloed, J. P. and Hagebeuk, H. J. L., *Phys. Fluids*, **15**, 6(1972), 1090.
 [11] 钱伟长, 变分法及有限元讲义, 清华大学出版发行 (1977).
 [12] 徐复、陈乐山, 用伽辽金法计算圆柱等离子体的不稳定性发展率, 力学学报特刊 (1981).

THE EFFECTS OF CURRENT DISTRIBUTIONS ON THE MHD INSTABILITY GROWTH RATES OF A CYLINDRICAL PLASMA

Xu Fu Chen Le-shan

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper the ideal MHD instability growth rate ω of a cylindrical plasma for the surface kink mode is calculated by Galerkin's method under the assumption that $\tilde{j}_{0z}(\tilde{r}) = \frac{2(s+2)}{s}(1-\tilde{r}^s)$ and $\tilde{j}_{\theta\theta}(\tilde{r}) = \tilde{j}_2 \cdot \tilde{r}^p(\tilde{r}-1)$, and an analytical relation between ω^2 and the parameters $(nq_a, m, K, a/b, s, P, \beta_p)$ is found, where n, m, K are wave numbers, q_a is the safety factor, a/b the ratio of the plasma radius to the conducting wall radius, β_p the poloidal beta.

The conclusions are:

1. The effect of s : The result for $m=2$ is in agreement with the conclusion of other authors, that is the peak instability growth rate ω_{peak} with an axial current distribution concentrated near the axis is smaller than the one with a flatter current distribution; on the contrary for $m=1$, either $\beta_p=1$ or $\beta_p=3$, the former is greater than the latter.
2. The effect of P : When $\beta_p=3$, the ω_{peak} for $P=5$ is slightly greater than the one for $P=1$.
3. The effect of β_p : When β_p increases from 1 to 3, the ω_{peak} nearly remains constant, therefore it is permissible to have higher β_p .