

圆柱壳体的轴压蠕变屈曲

李国琛

(中国科学院力学研究所)

提要 在蠕变分析中,本文提出了比应力-应变方法. 利用相似性,一族等时应力-应变曲线可归结为一条无量纲的比应力-应变曲线和相应的等时模量与时间关系图. 解出比应力值后,可以或是给定载荷确定临界时间或是给定时间导出可承受的载荷. 分析了圆柱壳体的轴压蠕变屈曲. 理论结果与已有的实验相符良好.

引言

对于蠕变屈曲中临界时间的确定,现有两种意见. 例如, Shanley^[1] 等是从经典意义的屈曲准则出发给出结果,而 Hoff^[2] 则从有初挠度或预变形起始计算变形达到极限的时刻. 实验表明^[3-5],以上的分歧可以统一地解释为:前者代表结构按经典意义产生屈曲的时间,而后者常是变形达到极限时的破坏寿命.

利用等时应力-应变曲线^[4]的几何相似性,文中提出了用无量纲的比应力-应变曲线做蠕变分析的一个方法. 在符合曲线相似性的范围内,可以或是给定载荷应力导出临界时间或者给定时间推算所能承受的应力. 蠕变屈曲的判据,仍沿用经典的准则.

本文分析了轴压下圆柱壳体的蠕变屈曲. 计算了屈曲前是无矩受力和有预变形的两种情况,与有关的实验^[4,5]相符良好. 尤其是在考虑了预变形时,可以预测到随半径-厚度比的增大所将出现非轴对称型的分叉屈曲;解的趋向与实验一致. 此外,还分析了初始挠度对壳体蠕变屈曲的影响.

一 蠕变的本构关系和屈曲准则

Работнов^[6]曾提出,将相似的蠕变曲线转换到应力-应变关系图上可以得到相似的等时应力-应变曲线族. 所以应力 σ 、应变 ϵ 及时间 t 的关系式可表示为

$$\sigma = \varphi(\epsilon)\tau(t) \quad (1.1)$$

事实上,(1.1)中的 ϵ 不仅是第一、二阶段的蠕变而且可以包括瞬时的弹塑性应变. 如图1所示,在相同的应变下,任意两条曲线的相似条件是

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{\tau(t_1)}{\tau(t_2)} = \text{常数} \quad (1.2)$$

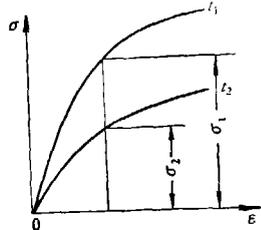


图 1

在直角坐标系中,塑性形变理论的本构方程为:

本文于 1978 年 6 月 19 日收到.

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \Psi S_{ij}; \quad (1.3)$$

其中

$$\sigma_{kk} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}, \quad S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}.$$

(1.3) 式的增量型式是

$$\delta\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E} [(1 + \nu)\delta\sigma_{ij} - \nu\delta\sigma_{kk}\delta_{ij}] + \delta\Psi S_{ij} + \Psi\delta S_{ij} \quad (1.4)$$

其中

$$\Psi = \frac{3}{2E} \left(\frac{E}{E_s} - 1 \right), \quad \delta\Psi = \frac{3}{2E} \frac{\delta\sigma_e}{\sigma_e} \left(\frac{E}{E_t} - \frac{E}{E_s} \right) \quad (1.5)$$

应力强度

$$\sigma_e = \sqrt{(3/2)S_{ij}S_{ij}}, \quad \delta\sigma_e = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}\delta S_{ij}}{\sigma_e} = \frac{3}{2} \frac{S_{ij}\delta\sigma_{ij}}{\sigma_e},$$

并由此可导出应变强度

$$\varepsilon_e = \frac{2}{3} \left(\frac{1 + \nu}{E} + \Psi \right) \sigma_e \quad (1.6)$$

E_s 、 E_t 分别为割线模量与切线模量。

由上可见, 在一族等时应力-应变曲线是几何相似的条件下, 若将各应力-应变曲线的纵坐标除以自身的等时模量 (如等时的弹性模量 E), 可导出一条无量纲的应力-应变曲线, 以下称之为比应力-应变曲线。计算时, 采用比应力 σ_{ij}/E 和比模量 E_s/E 、 E_t/E , 就可以推演出在整个曲线族上的结果。

由于各等时应力-应变曲线上的等时模量值是时间的已知函数, 求出比应力后, 就可以根据确定的时间定出相应的等时模量, 从而得到实际的应力值。反之, 有了实际应力也可以根据比应力值, 利用图 2, 导出对应的时间。

以下分析蠕变屈曲时, 将经典意义的屈曲准则引伸到载荷-变形-时间这一函数空间内, 寻求产生与原有解不相关的另外型态的解的原点, 即屈曲点; 也就是从等时载荷-变形关系中求解极值点或分叉点。采用了比应力-应变方法后, 就将一族载荷-变形关系压缩到统一的无量纲的曲线上。

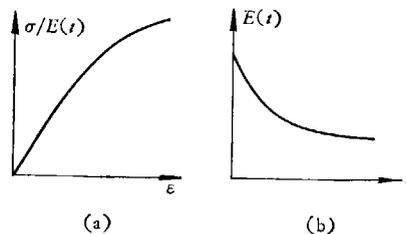


图 2

二 圆柱壳体的屈曲方程

在正交坐标系下, 圆柱扁壳的基本方程可分别列出如下。

平衡方程

(1) 屈曲前, 在没有横向载荷时, 是:

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta, \beta} &= 0 \\ M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + b_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} (\omega + \omega^{(t)})_{, \alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

(2) 屈曲时,

$$\left. \begin{aligned} \delta N_{\alpha\beta, \beta} &= 0 \\ \delta M_{\alpha\beta, \alpha\beta} + b_{\alpha\beta} \delta N_{\alpha\beta} + N_{\alpha\beta} \delta W_{, \alpha\beta} + \delta N_{\alpha\beta} (\omega + \omega^{(i)})_{, \alpha\beta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

$\alpha, \beta = 1, 2$; 下标重复表示连加; $b_{\alpha\beta}$ 是曲率张量, 在圆柱壳中 $b_{11} = b_{12} = b_{21} = 0$; 下标前的(,)号表示在该下标上的偏微分, $\omega^{(i)}$ 是初挠度.

比应力-应变关系

在平面应力条件下:

(1) 由 (1.3) 式可以得到, 在屈曲前

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = H_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\sigma_{\gamma\delta}}{E} \right) + \varphi \left(\frac{S_{\alpha\beta}}{E} \right) \quad (2.3)$$

其中

$$\begin{aligned} H_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (1 + \nu) \left[\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) - \frac{\nu}{1 + \nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] \\ \varphi &= \frac{3}{2} \left(\frac{1}{e_s} - 1 \right), \quad e_s = \frac{E_s}{E} \end{aligned}$$

(2.3) 式的倒置形式为

$$\left(\frac{\sigma_{\alpha\beta}}{E} \right) = E_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta} - \frac{3}{2} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{S_{\gamma\delta}}{E} \right) \quad (2.4)$$

其中

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (1 + \nu)^{-1} \left[\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] \\ \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} &= (1 + \nu)^{-1} \left(\frac{1}{e_s} - 1 \right) \left[\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} + \delta_{\alpha\delta} \delta_{\beta\gamma}) + \frac{\nu}{1 - \nu} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} \right] \end{aligned}$$

(2) 由 (1.4) 式可以得到, 在屈曲时

$$\delta \varepsilon_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\delta \sigma_{\gamma\delta}}{E} \right) \quad (2.5)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{\alpha\beta\gamma\delta} &= \frac{1}{e_s} \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2} \left(\frac{3}{e_s} - 1 + 2\nu \right) \left(\frac{e_{\alpha\beta} e_{\gamma\delta}}{2} - e_{\alpha\gamma} e_{\beta\delta} \right) \\ &\quad + \frac{9}{4} \left(\frac{1}{e_t} - \frac{1}{e_s} \right) \zeta_{\alpha\beta} \zeta_{\gamma\delta} \\ e_t &= \frac{E_t}{E}, \quad \zeta_{\alpha\beta} = \frac{S_{\alpha\beta}}{\sigma_e}, \quad e_{11} = e_{22} = 0, \quad e_{12} = -e_{21} = 1 \\ \sigma_e &= \sqrt{\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 - \sigma_{11} \sigma_{22} + 3\sigma_{12}^2} \end{aligned}$$

应变-位移关系

设

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta} &= \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + K_{\alpha\beta} x_3 \\ \delta \varepsilon_{\alpha\beta} &= \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} + \delta K_{\alpha\beta} x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

其中,中面应变

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2} [(u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) - 2b_{\alpha\beta}\omega + (\omega + w^{(i)})_{,\alpha}(\omega + w^{(i)})_{,\beta} - w_{,\alpha}^{(i)}w_{,\beta}^{(i)}] \quad (2.7)$$

弯曲率

$$K_{\alpha\beta} = -w_{,\alpha\beta} \quad (2.8)$$

中面应变增量

$$\delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} = \frac{1}{2} [(\delta u_{\alpha,\beta} + \delta u_{\beta,\alpha}) - 2b_{\alpha\beta}\delta W + (\omega + w^{(i)})_{,\alpha}\delta W_{,\beta} + (\omega + w^{(i)})_{,\beta}\delta w_{,\alpha}] \quad (2.9)$$

弯曲率增量

$$\delta K_{\alpha\beta} = -\delta W_{,\alpha\beta} \quad (2.10)$$

导出方程

利用在第三个坐标方向(壳壁厚度方向)上的级数展开,我们可以得到一系列实际求解中的导出方程. 设

$$\begin{aligned} & [\varepsilon_{\alpha\beta}, \sigma_{\alpha\beta}, \delta\varepsilon_{\alpha\beta}, \delta\sigma_{\alpha\beta}, \varphi, \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}, a_{\alpha\beta\gamma\delta}] \\ & = \left\{ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}, \frac{N_{\alpha\beta}}{h}, \frac{N_{\alpha\beta}^{(s)}}{h}, \delta\varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)}, \frac{\delta N_{\alpha\beta}}{h}, \varphi^{(0)}, \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)}, a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \right\} \\ & + \left[K_{\alpha\beta}, \frac{12M_{\alpha\beta}}{h^3}, \frac{12M_{\alpha\beta}^{(s)}}{h^3}, \delta K_{\alpha\beta}, \frac{12\delta M_{\alpha\beta}}{h^3}, \frac{2\varphi^{(1)}}{h}, \frac{2\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}}{h}, \frac{2a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}}{h} \right] x_3 \quad (2.11) \end{aligned}$$

其中 h 为壁厚. 在 (2.11) 中只取到沿 x_3 展开的一次项.

由 (1.6)、(2.11), 可以计算壳壁横截面上各点的应变强度, 如

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_e|_{x_3=0} &= \left[\frac{2}{3(1-\nu)} + \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{e_s|_0} - 1 \right) \right] \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{1}{B^2} (N_{11}^2 - N_{11}N_{22} + N_{22}^2 + 3N_{12}^2)} \\ \varepsilon_e|_{x_3=\pm\frac{h}{2}} &= \left[\frac{2}{3(1-\nu)} + \frac{1}{1-\nu^2} \left(\frac{1}{e_s|_{\pm\frac{h}{2}}} - 1 \right) \right] \\ &\quad \cdot \sqrt{\frac{1}{B^2} \left[\left(N_{11} \pm \frac{6M_{11}}{h} \right)^2 - \left(N_{11} \pm \frac{6M_{11}}{h} \right) \left(N_{22} \pm \frac{6M_{22}}{h} \right) \right.} \\ &\quad \left. + \left(N_{22} \pm \frac{6M_{22}}{h} \right)^2 + 3 \left(N_{12} \pm \frac{6M_{12}}{h} \right)^2 \right]} \quad (2.12) \end{aligned} \right\}$$

其中 $B = Eh/(1-\nu^2)$. 从而, 利用材料的比应力-应变曲线, 通过迭代计算, 可以分别导出在 $x_3 = 0, \pm\frac{h}{2}$ 处的 e_s, e_t 值及相应的 φ 和 $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 值. 取

$$\left. \begin{aligned} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} &= \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{x_3=0} \\ \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} &= \frac{1}{2} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{h/2} - \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}|_{-h/2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

对于 φ 也可套用 (2.13) 式的形式.

在屈曲的瞬间,由于载荷是不变的,屈曲的起点正是屈曲前的末点.为此,在已知当时的应力状态 $\zeta_{\alpha\beta}$ 及相应的 ε_s 、 ε_t 值后,可按(2.5)式计算 $a_{\alpha\beta\gamma\delta}$,并取

$$\left. \begin{aligned} a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} &= a_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{x_3=0} \\ a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} &= \frac{1}{2} (a_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{h/2} - a_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{-h/2}) \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

由于 $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 不能是负值,又 $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \geq 0$; 如将(2.13)的结果代回(2.11)并有

$$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \pm \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} < 0,$$

则应取

$$\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} = 0, \quad a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} = 0^{1)}$$

将(2.11)代入(2.3)、(2.4),取得:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} &= H_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{N_{\gamma\delta}}{Eh} \right) + \varphi^{(0)} \left(\frac{N_{\alpha\beta}^{(s)}}{Eh} \right) \\ K_{\alpha\beta} h &= H_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{M_{\gamma\delta}}{Eh^2/12} \right) + \varphi^{(0)} \left(\frac{M_{\alpha\beta}^{(s)}}{Eh^2/12} \right) + 2\varphi^{(1)} \left(\frac{N_{\alpha\beta}^{(s)}}{Eh} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

又

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{N_{\alpha\beta}}{Eh} \right) &= E_{\alpha\beta\gamma\delta} \varepsilon_{\gamma\delta}^{(0)} - \frac{3}{2} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \left(\frac{N_{\gamma\delta}^{(s)}}{Eh} \right) \\ \left(\frac{M_{\alpha\beta}}{Eh^2/12} \right) &= E_{\alpha\beta\gamma\delta} K_{\gamma\delta} h - \frac{3}{2} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \left(\frac{M_{\gamma\delta}^{(s)}}{Eh^2/12} \right) - 3\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \left(\frac{N_{\gamma\delta}^{(s)}}{Eh} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

类似地,由(2.5)可以导出:

$$\left. \begin{aligned} \delta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(0)} &= a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \left(\frac{\delta N_{\gamma\delta}}{Eh} \right) \\ \delta K_{\alpha\beta} h &= a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \left(\frac{\delta M_{\gamma\delta}}{Eh^2/12} \right) + 2a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \left(\frac{\delta N_{\gamma\delta}}{Eh} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

所需要的倒置形式

$$\left(\frac{\delta M_{\alpha\beta}}{Eh^2/12} \right) = A_{\alpha\beta\gamma\delta} h \delta K_{\gamma\delta} - 2B_{\alpha\beta\gamma\delta} \left(\frac{\delta N_{\gamma\delta}}{Eh} \right) \quad (2.18)$$

由于对称性质,以上 $a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)}$ 、 $a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)}$ 、 $A_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 各自只有6个独立参数, $B_{\alpha\beta\gamma\delta}$ 有9个.

取应力函数为 F , 令

$$\left. \begin{aligned} N_{\alpha\beta} &= F_{,\tau\delta} e_{\alpha\tau} e_{\beta\delta} \\ \delta N_{\alpha\beta} &= \delta F_{,\tau\delta} e_{\alpha\tau} e_{\beta\delta} \end{aligned} \right\} \quad (2.19)$$

由前面的结果不难导出屈曲前与屈曲时所应满足的平衡方程和协调方程.

$$\begin{aligned} E_{\alpha\beta\gamma\delta} w_{,\alpha\beta\gamma\delta} - \frac{12}{Eh^3} [b_{\alpha\beta} F_{,\tau\delta} e_{\alpha\tau} e_{\beta\delta} + (w + w^{(i)})_{,\alpha\beta} F_{,\tau\delta} e_{\alpha\tau} e_{\beta\delta}] \\ = -\frac{3}{h} \left[\frac{1}{2} \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} \left(\frac{M_{\gamma\delta}^{(s)}}{Eh^2/12} \right) + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(1)} \left(\frac{N_{\gamma\delta}^{(s)}}{Eh} \right) \right]_{,\alpha\beta} \end{aligned} \quad (2.20)$$

1) 如取 $\phi_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)} = \frac{1}{2} (\phi_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{h/2} + \phi_{\alpha\beta\gamma\delta} \Big|_{-h/2})$ 则可以消除这一麻烦.但在主要是承受平面力并采用离散化的数值解法时,可以认为采用(2.13)式中的表示式较好,以保证中面上的计算精度.

$$\left(\frac{F}{Eh}\right)_{,\alpha\beta\gamma\delta} \delta_{\alpha\beta}\delta_{\gamma\delta} + \frac{1}{2}[(w + w^{(i)})_{,\alpha\beta}(w + w^{(i)})_{,\gamma\delta} + 2b_{\alpha\beta}w_{,\gamma\delta} - w_{,\alpha\beta}w_{,\gamma\delta}]e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta} = -\left[\varphi^{(0)}\left(\frac{N_{\alpha\beta}^{(S)}}{Eh}\right)\right]_{,\gamma\delta}e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta} \quad (2.21)$$

及

$$\frac{Eh^3}{12}\left[A_{\alpha\beta\gamma\delta}(\delta W)_{,\gamma\delta} + \frac{2}{Eh^2}B_{\alpha\beta\gamma\delta}(\delta F)_{,\varepsilon\zeta}e_{\gamma\varepsilon}e_{\delta\zeta}\right]_{,\alpha\beta} - [b_{\alpha\beta}(\delta F)_{,\gamma\delta} + (\delta W)_{,\alpha\beta}F_{,\gamma\delta} + (w + w^{(i)})_{,\alpha\beta}(\delta F)_{,\gamma\delta}]e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta} = 0 \quad (2.22)$$

$$\frac{1}{Eh}\left[a_{\alpha\beta\gamma\delta}^{(0)}(\delta F)_{,\varepsilon\zeta}e_{\gamma\varepsilon}e_{\delta\zeta}\right]_{,\eta\theta}e_{\alpha\eta}e_{\beta\theta} + [(w + w^{(i)})_{,\alpha\beta}(\delta W)_{,\gamma\delta} + b_{\alpha\beta}(\delta W)_{,\gamma\delta}]e_{\alpha\gamma}e_{\beta\delta} = 0 \quad (2.23)$$

至此,在给定的边界条件下,联立求解(2.20)、(2.21)可以给出屈曲前的应力、变形分布。将结果代入(2.22)、(2.23)中的 F 、 w 后,可进而分析在相应的载荷下是否存在另外的平衡状态。

三 板壳的轴压蠕变屈曲解

1. 屈曲前是无矩受力状态

如图 3 所示,设屈曲前中面力

$$N_x = -N, \quad N_y = N_{xy} = 0.$$

对于周边简支的曲板,设屈曲函数

$$\left. \begin{aligned} \delta W &= W_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2L} \sin \frac{n\pi y}{b} \\ \delta F &= F_{mn} \sin \frac{m\pi x}{2L} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中 $(m, n = 1, 2, 3 \dots)$ 。当 $b \rightarrow 2\pi R$ 时则得圆柱壳的结果,若略去方程中的曲率项可导出平板的公式。取比载荷 $\bar{N} = N/Eh$,其临界值为 \bar{N}_{σ} 。

圆柱曲板

$$\begin{aligned} \bar{N}_{\sigma} &= \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{h}{b}\right)^2 [(A_{1111}A_{2222})^{1/2} + A_{1122} + 2A_{3333}]n^2 \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{b}{R}\right)^2 \{[(a_{1111}^{(0)}a_{2222}^{(0)})^{1/2} + a_{1122}^{(0)} \\ &+ 2a_{3333}^{(0)}]n^2\}^{-1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

平板

$$\bar{N}_{\sigma} = \frac{\pi^2}{6} \left(\frac{h}{b}\right)^2 [(A_{1111}A_{2222})^{1/2} + A_{1122} + 2A_{3333}] \quad (3.3)$$

圆柱壳的轴对称型屈曲

$$\bar{N}_{\sigma} = \frac{h}{R\sqrt{3}} (a_{1111}^{(0)}a_{2222}^{(0)} - a_{1122}^{(0)})^{-1/2} \quad (3.4)$$

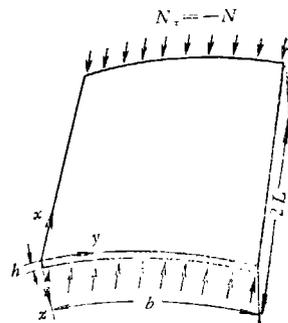


图 3

圆柱壳的非轴对称型屈曲

$$\bar{N}_{\sigma} = \frac{h}{R\sqrt{3}} (a_{1111}^{(0)} a_{2222}^{(0)} - a_{1122}^{(0)})^{-1/2} \eta \quad (3.5)$$

其中

$$\eta = \left\{ 1 + \frac{3 \left(1 - \frac{e_t}{e_s} \right)}{\left[\left(\frac{3e_t}{e_s} + 1 \right)^{1/2} + \left(\frac{3e_t}{e_s} - 1 \right) \right] \left[1 - \frac{e_s}{3} (1 - 2\nu) \right]} \right\}^{1/2} \geq 1$$

以上结果与文献[7]中的类同。比较(3.4)(3.5)可见,要使非轴对称的结果小于轴对称的除非是(3.5)中的分母值要大于(3.4)中的相应项

$$a_{1111}^{(0)} a_{2222}^{(0)} - a_{1122}^{(0)2} = \frac{3}{4e_s e_t} + \frac{1-2\nu}{2e_t} - \left(\frac{1-2\nu}{2} \right)^2$$

但这是不可能的,因为 e_s 、 e_t 值是与应力水平成反比的。下面的计算分析将证明,只有考虑了预变形才能导出低于轴对称型式的非轴对称分叉屈曲解。

2. 考虑屈曲前变形的轴压筒支圆柱壳

屈曲前

由于受力状态是轴对称的,因此

$$N_{xy} = M_{xy} = K_y = K_{xy} = \nu = \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

可以把(2.20)、(2.21)化简为轴对称的方程。两端的简支边界条件是:

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{3}{2D} \left[\phi^{(0)} (M_{xx}^{(s)} + \nu M_{yy}^{(s)}) + \phi^{(1)} \frac{h}{6} (N_{xx}^{(s)} + \nu N_{yy}^{(s)}) \right] \quad (3.6)$$

可用五点中心差分求解。计算时采用修改的 Newton-Raphson 法逐级迭代。

屈曲时

由上求得每级比载荷下的预变形及应力,代入(2.22)、(2.23)并设

$$\begin{bmatrix} \delta W \\ \delta F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \delta \\ f \end{bmatrix} \cos \frac{n y}{R}, \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (3.7)$$

连同边界条件:

$$\left. \begin{aligned} \delta W = 0, \quad \frac{\partial^2 (\delta W)}{\partial x^2} = 0 \\ \delta F = 0, \quad \frac{\partial^2 (\delta F)}{\partial x^2} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

计算每个 n 值下的行列式值的符号。若在两级加载间出现符号相反则说明对应该波型 n 下有分叉点。当屈曲前的解已趋于发散而仍无分叉点则说明达到极值屈曲点。

结果

对应文献[4,5]中所给出的两种铝合金圆筒的实验数据和条件,按照上面提出的蠕变关系、屈曲准则和计算方法,计算了圆柱壳体的轴压蠕变屈曲结果列在表1。为了了解屈曲型态随 R/h 值的变化,对于文献[5]中的圆筒材料,除了对应已有的实验参数外,又扩充了 R/h 值加大的三个算例。在文献[4]中的实验表明,当 $R/h \sim 60$ 时,屈曲波型由

表 1 $P = 12(1 - \nu^2) \left(\frac{N}{Eh} \right) \left(\frac{L^2}{h^2} \right)$, $\nu = 0.3$

R/h	L/R	分叉屈曲 P	极值屈曲	无矩解	备注
47.2	1.04		39.3	47.9	2024-0 500°F [5]
90.2	1.11		157	175	
89.3	1.66	355($n = 2, 3, 4$)	363	391	
113	1.66	535($n = 5$)	543	611	2024-0 500°F
149	1.66	903($n = 0, 3, 4$)	948	1030	
186	1.66	1340($n = 0, 1, 2, 3, 6$)	1410	1500	
32.1	1.03		30.3	35.4	51 S-T 225°C [4]
33.1	1.63		79.0	93.6	
58.4	1.61		240	272	
59.7	1.16		130	146	
77.4	1.61	403($n = 0$)	411	459	
83.1	1.15		239	260	
110	1.61	765($n = 0, 1, 2, 3, 5$)	777	828	
115	1.15	411($n = 0$)	429	453	
113	1.23	663($n = 5, 7, 8, 9$)	675	709	

表 2 有轴对称初挠度时的 P

R/h	L/R	分叉屈曲 P	极值屈曲	无矩解	备注
47.2	1.04	38.5($n = 5, 6, 7, 8$)	39.3	47.9	2024-0 500°F
90.2	1.11		149	175	
89.3	1.66		353	391	

轴对称的转为非轴对称的。文献[5]中的则是,在 $R/h \sim 50$ 时没有非轴对称型屈曲而对于 $R/h \sim 90$ 时两种型式的均有。表 1 中所列计算屈曲波形与此是趋向一致的。对应表 1 中前三个参数,表 2 中给出了具有轴对称初挠度(如图 4 中所示分布)的算例。结果表明初挠度对蠕变屈曲也有不利影响。

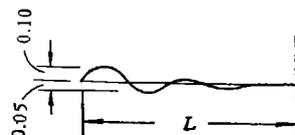


图 4 初挠度 $w^{(i)}/h$ 分布图

如果忽略 L/R 的影响,把表 1 中 R/h 接近的计算结果转换到实际的应力-时间关系图上(有分叉屈曲时取分叉点应力否则取极值屈曲应力),将得到图 5、图 6 中用虚线表示的情况。其中实线是按无矩理论(3.4)式计算的。比较计算与实验的结果可见,随着 R/h 的增大计算值将趋于不安全;从表 2 中的结果可以判断,这主要是受初挠度的影响。

总结以上,我们可以得出结论:

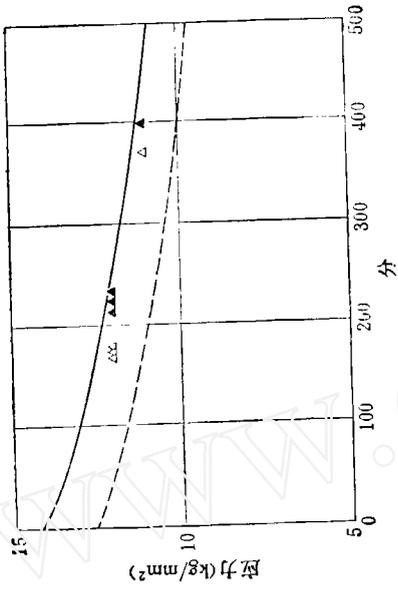


图 5b
51S-T $\frac{R}{h} \sim 59$ 225°C ▲ 屈服 ▲ 破坏

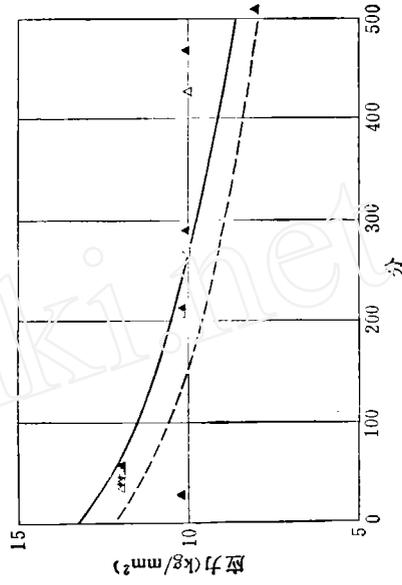


图 5d
51S-T $\frac{R}{h} \sim 115$ 225°C ▲ 屈服 ▲ 破坏

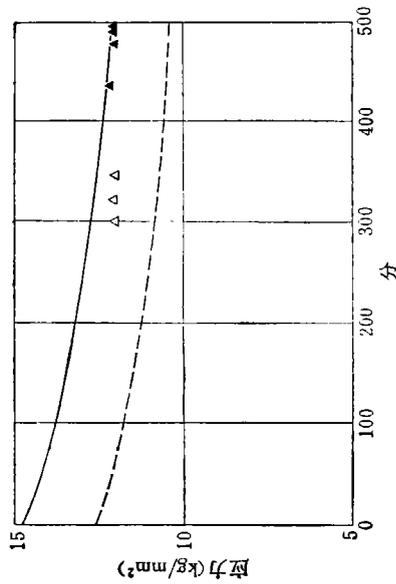


图 5a
51S-T $\frac{R}{h} \sim 32$ 225°C ▲ 屈服 ▲ 破坏

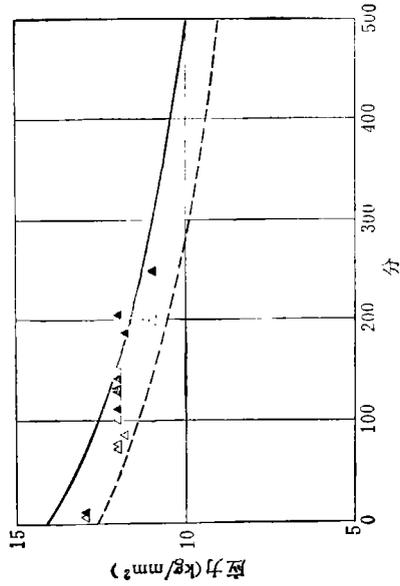


图 5c
51S-T $\frac{R}{h} \sim 80$ 225°C ▲ 屈服 ▲ 破坏

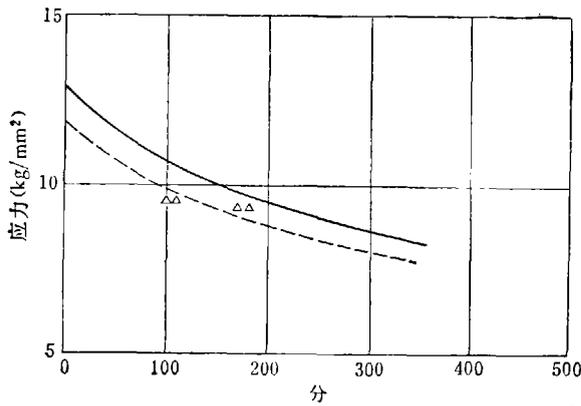


图 5:

51S-T $\frac{R}{h} \sim 143$ 225°C \triangle 屈曲 \blacktriangle 破坏

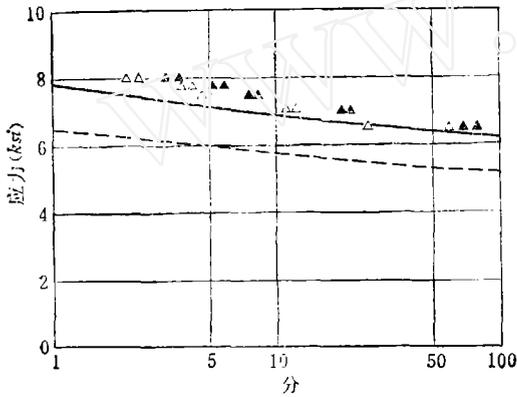


图 6a

\triangle 屈曲 \blacktriangle 破坏 2024-T3 500°F $\frac{R}{h} \sim 50$

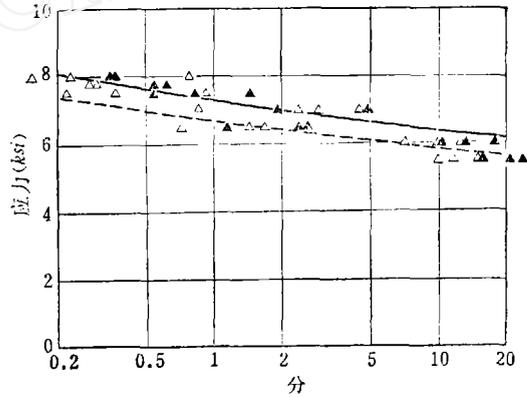


图 6b

\triangle 屈曲 \blacktriangle 破坏 2024-T3 500°F $\frac{R}{h} \sim 90$

(1) 比应力-应变方法作为蠕变本构关系的一种描述方法处理蠕变屈曲是可行的, 结果与实验符合良好.

(2) 比应力-应变方法中包括了瞬时应变和第一、二阶段蠕变的诸因素而又可把蠕变计算化为一般塑性问题. 通过一次计算, 可以同时给定载荷推测时间或预定时间确定所能承受的载荷.

(3) 经典的屈曲准则同样适用于壳体的蠕变屈曲.

(4) 只有计及预变形作用才能说明, 简支轴压圆柱壳中随 R/h 的增大实验中所出现的非轴对称屈曲现象.

参 考 文 献

[1] Shanley, F. R., Principles of Creep Buckling. Weight Strength Analysis of Aircraft Structures, Ch. 19(1952).

- [2] Hoff, N. J., Creep Buckling of Plates and Shells, AD746475, 1972.
- [3] Papirno, R., Gerard, R., Correlation of Plate Creep Buckling Theory with Experiments on Long Plates of Aluminum Alloy 2024-0 at 500°F, AD291795 (1962).
- [4] Samuelson, A., An Experimental Investigation of Creep Buckling of Circular Cylindrical Shells Subjected to Axial Compression, FFA., Rep. No. 98(1964).
- [5] Papirno, R., Goldman, R., Experimental Creep Buckling of Aluminum Cylinders in Axial Compression, Exp. Mech., 9, 8(1969), 356—365.
- [6] Работнов, Ю. Н., Расчёт Деталей Машин на Ползучесть, Изв. АН. СССР. ОН. 6, (1948), 789—800.
- [7] Gerard, G., Plastic Stability Theory of Geometrically Orthotropic Plates and Cylindrical Shells, J.A.S., 29, 8(1962), 956—962.

CREEP BUCKLING OF CIRCULAR SHELLS UNDER AXIAL COMPRESSION

Li Guo-chen

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In creep buckling analysis, a ratio stress-strain method is proposed.

Making use of a similarity relation among isochronous curves at given temperature, we can condense these curves to a non-dimensional stress-strain curve (i.e. a ratio stress-strain curve) together with a corresponding isochronous modulus-time relation. For the analysis of creep buckling, a ratio stress-strain method is proposed and the critical ratio stress is solved accordingly. Then, one can determine either the critical time under a given load or the buckling load within a predetermined time. Creep buckling of cylindrical shells under axial compression is analysed. Theoretical results fit well with known tests.