

# 超音速、小高超音速三元薄翼非定常二次理论的准确度及其适用范围

中国科学院力学研究所 钱福星 顾为凯 何龙德

## 摘 要

本文处理了超音速三元薄翼非定常问题,通过 PLK 法使二次解均匀有效。首先考虑零攻角或初始攻角时,已知基本定常绕流叠加高一量级的非定常小扰动流,把它线性化。本方法从健全的基本方程出发,使用高马赫数近似,将非定常二次方程化简,其形式与定常二次方程类似,因而有可能利用定常二次理论的方法求解。特解是求解的关键。鉴于精确特解的复杂性,本报告采用了一种近似特解。

本方法适于一般超音速和完全高超音速之间的马赫数区域(约 3~8),折合频率可达至 1 左右。可较精确地估计厚度,初始攻角对非定常气动力,力矩的影响。

目前据我们所知,还没有有关实验数据,只能和一些理论结果进行比较。为此对低频有初始攻角的超音速前缘平板三角翼进行了计算,在马赫数 3~8,与 D. D. Liu<sup>[6]</sup>比较吻合。计算结果表明,三元薄翼二次理论可用到高超音速相似参数  $M\delta=1.0$ 。

## 符 号 表

$b$	支点和顶点之间的距离
$c_0$	机翼最大弦长
$C_m$	俯仰力矩系数
$C_{m_0}$	俯仰力矩静导数 $\frac{\partial C_m}{\partial \theta}$
$C_{m_0}$	俯仰力矩动导数 $\frac{U \partial C_m}{c_0 \partial \dot{\theta}}$
$C_p$	压力系数
$C_p^{(0)}, C_{p_0}^{(0)}, C_{p_1}^{(0)}$	压力系数的定常部分以及它的一阶量和二阶量, $C_p^{(0)} = C_{p_0}^{(0)} + C_{p_1}^{(0)}$
$C_p^{(1)}, C_{p_0}^{(1)}, C_{p_1}^{(1)}$	压力系数的非定常部分以及它的一阶量和二阶量, $C_p^{(1)} = C_{p_0}^{(1)} + C_{p_1}^{(1)}$
$f$	$\Phi/gc_0$ , $\Phi$ 为扰动速度势(方程(1))
$g(x, y)$	机翼振幅函数

1980年5月收到。

$g$	小扰动尺度
$H(x, y, t)$	物面方程
$h(x, y)$	攻角为零度时翼型表面函数
$\bar{K}$	$\omega/U$
$k$	折合频率, $\omega c_0/U = \bar{K}c_0$
$M$	来流马赫数
$\bar{N}$	$\frac{\gamma + 1}{2}$
$n$	$\text{tg } \chi_s/M$
$t$	时间变量
$x, y, z$	空间坐标
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	以 $c_0$ 为参考长度的无量纲坐标
$x_1^{(1)}(u, v, z)$	$\phi_1$ 的扰动量
$x_1^{(2)}, {}_R x_1^{(2)}, {}_I x_1^{(2)}$	$\psi_1$ 的扰动量, 其实部和虚部 $x_1^{(2)} = {}_R x_1^{(2)} + i {}_I x_1^{(2)}$
$U$	来流速度
$u$	扰动坐标
$\alpha_0$	平均攻角
$\beta$	$\sqrt{M^2 - 1}$
$\gamma$	气体的绝热指数
$\theta$	振荡角 $\theta_0 e^{i\omega t}$
$\theta_0$	简谐俯仰振荡的角幅值
$\dot{\theta}$	$\frac{\partial \theta}{\partial t}$
$\chi_s$	后掠角
$\delta$	厚度比
$M\delta$	高超音速相似参数
$\omega$	振荡角速度
$S$	机翼面积

## 一、引言

由于超音速飞行器的性能逐步提高, 动导数及动稳定性的问题越来越为人们所重视。近年来对小展弦比薄翼的非定常问题引起了很大的兴趣。很多文章曾应用线性理论来解这个问题。对于马赫数不太接近于 1 的低超音速情况, 线性理论可以给出比较精确的气力结果, 但在比较高的马赫数下, 非线性效应变得重要。线性理论可看作为全部解对机翼的相对厚度或攻角展开的一次问题。在某些文献中曾计算了二次解, 并指出在高马赫数时二次解大大地改善了一次解。

二次理论是计算非线性效应的一种方法, 自从 Buseman<sup>[2]</sup>的二元薄翼二次理论发表以来, 二元流动的定常和非定常理论有了很大的进展。其中有的工作如 Landahl<sup>[4]</sup>的方法,

可以在二元的结果中以参数的形式表达三元的效应。当然,这只是很弱的三元效应,并不能解决三角翼顶点马赫锥内的三元问题。

与此同时三元定常流二次理论有了一系列的工作,证明二次解对线性区域和高马赫数区域之间的飞行马赫数特别合适。

钱福星等人<sup>[5]</sup>,使用高马赫数近似,把定常的一系列三元处理方法推广到非定常流动,具体地解决了高马赫数超音速前缘小展弦比机翼的非定常问题。

本文用这个方法计算了有攻角的平板三角翼的动导数,并和有关理论结果作了比较,初步给出了本方法的准确程度以及适用范围。

## 二、基本方程

考虑某一以均匀超音速速度在静止空气中飞行并作小简谐振荡的尖前沿小展弦比三元薄翼。将坐标原点选在三角翼顶点的平均位置,  $x$  轴顺流向,  $x, y, z$  构成右手笛卡尔坐标系。  $t$  表示时间。

由于经冲波,熵的改变量是厚度比和俯仰角的三次小量,因此考虑到二次,则流动是等熵的,因而是无旋的,有位  $\Omega(x, y, z, t)$ 。现在引入扰动势  $\Phi$  除以自由流速度  $U$ ,使之标准化得到总速度势为

$$\Omega(x, y, z, t) = U[\alpha + \Phi(x, y, z, t)] \quad (1)$$

对扰动势  $\Phi$  所满足的二次方程可导出如下<sup>[6]</sup>,

$$\begin{aligned} \Phi_{yy} + \Phi_{zz} - \beta^2 \Phi_{xx} - 2 \frac{M^2}{U} \Phi_{xt} - \frac{M^2}{U^2} \Phi_{tt} = M^2 \left[ (\gamma - 1) \left( \Phi_x + \frac{1}{U} \Phi_t \right) \right. \\ \left. \times (\Phi_{xx} + \Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + 2(\Phi_x \Phi_{xx} + \Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_z \Phi_{xz}) + \frac{2}{U} (\Phi_x \Phi_{xt} \right. \\ \left. + \Phi_y \Phi_{yt} + \Phi_z \Phi_{zt}) \right] \end{aligned} \quad (2)$$

物面方程可写成

$$z = H(x, y, t) \quad (3)$$

物面相切条件为

$$\Phi_x = \frac{1}{U} H_t + (1 + \Phi_x) H_x + \Phi_y H_y \quad (4)$$

压力系数可写为

$$C_p = -2\Phi_x - 2\Phi_t/U + \beta^2 \Phi_x^2 - \Phi_y^2 - \Phi_z^2 + 2M^2 \Phi_x \Phi_t/U + M^2 (\Phi_t/U)^2 \quad (5)$$

现在考虑在高马赫数的条件下,引入下列参数:

$$\left. \begin{aligned} \xi = x/c_0, \quad \eta = y/\sigma c_0, \quad \zeta = z/\mu c_0, \quad \tau = kUt/c_0 \\ k = \omega c_0/U, \quad \bar{h} = H/\delta c_0, \quad f(\xi, \eta, \zeta, \tau) = \Phi/gc_0 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

这里  $c_0$  是机翼最大弦长,  $\sigma$  是展向扰动存在区域的尺度,  $\omega$  是振荡角速度,  $k$  是折合频率,  $g$  是小扰动的尺度。将方程 (6) 代入方程 (2), (4) 可得

$$\begin{aligned} k^2 f_{\tau\tau} + 2(1 + g f_\xi) k f_{\xi\tau} + 2g\sigma^{-2} k f_\eta f_{\eta\tau} + 2g\mu^{-2} k f_\zeta f_{\zeta\tau} \\ + (1 + 2g f_\xi) f_{\xi\xi} + 2g\sigma^{-2} f_\eta f_{\eta\xi} + 2g\mu^{-2} f_\zeta f_{\zeta\xi} \\ = \{1/M^2 - (\gamma - 1)g(kf_\tau + f_\xi)\} (f_{\xi\xi} + \sigma^{-2} f_{\eta\eta} + \mu^{-2} f_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (7)$$

及边界条件

$$f_{\zeta} \Big|_{\zeta = \frac{\delta}{\mu} \bar{h}} = \frac{\mu \delta}{g} [k \bar{h}_{\tau} + (1 + g f_{\xi}) \bar{h}_{\xi} + (g/\sigma^2) f_{\eta} \bar{h}_{\eta}] \quad (8)$$

在式(8)中, 根据小扰动可设  $g \ll 1, g \ll \sigma$ 。若我们设  $k \leq 1$ , 则有  $\mu \delta/g \sim 1$ 。当M数较高时, 对尖薄物体, 可认为

$$\begin{aligned} \mu &\sim \delta & \text{或} & & \mu &\sim 1/M \\ \text{因而} & & & & & \\ g &\sim \delta^2 & \text{或} & & g &\sim \delta/M \end{aligned} \quad (9)$$

将式(9)代入式(7), (8), 并去掉  $\mu^2$  (即  $M^{-2}$ ) 量级的项得

$$\begin{aligned} &k^2 f_{\tau\tau} + 2k f_{\xi\tau} + 2g\sigma^{-2} k f_{\eta} f_{\eta\tau} + 2g\mu^{-2} k f_{\zeta} f_{\zeta\tau} + f_{\xi\xi} + 2g\sigma^{-2} f_{\eta} f_{\eta\xi} + 2g\mu^{-2} f_{\zeta} f_{\zeta\xi} \\ &= \{1/M^2 - (\gamma - 1)g(kf_{\tau} + f_{\xi})\} (\sigma^{-2} f_{\eta\eta} + \mu^{-2} f_{\zeta\zeta}) \end{aligned} \quad (10)$$

$$f_{\zeta} \Big|_{\zeta = (\delta/\mu) \bar{h}} = (\mu \delta/g) (k \bar{h}_{\tau} + \bar{h}_{\xi} + (g/\sigma^2) f_{\eta} \bar{h}_{\eta}) \quad (11)$$

把方程(10), (11)通过(6)式反变到原来的坐标时就成为

$$\begin{aligned} &\Phi_{yy} + \Phi_{zz} - M^2 \Phi_{xx} - 2(M^2/U) \Phi_{xt} - (M^2/U^2) \Phi_{tt} \\ &= M^2 \{ (\gamma - 1) (\Phi_x + \Phi_t/U) (\Phi_{yy} + \Phi_{zz}) + 2 (\Phi_y \Phi_{xy} + \Phi_z \Phi_{xz}) \\ &\quad + (2/U) (\Phi_y \Phi_{yt} + \Phi_z \Phi_{zt}) \} \end{aligned} \quad (12)$$

$$\Phi_x \Big|_{z=H} = (H_t/U + H_x + \Phi_y H_y)_{z=H} \quad (13a)$$

$$\text{或} \quad \Phi_x \Big|_{z=0} = (H_t/U + H_x + \Phi_y H_y - H \Phi_{zz})_{z=0} \quad (13b)$$

把方程(12)和(2)比较就可以看出, 在高M数和一般折合频率的情况下, 适当地去掉  $x$  方向的扰动速度及其  $x$  的导数的项是合理的。

将二次理论的扰动速度势  $\Phi$  分为定常和非定常二个部分, 当机翼在平均攻角  $\alpha_0$  附近做微小幅度的简谐振荡时, 其非定常部分又可写成相应的简谐振荡形式:

$$\Phi = \phi(x, y, z) + \theta_0 e^{i(\omega t - \bar{k}x)} \psi(x, y, z) \quad (14)$$

再将  $\phi$  和  $\psi$  按厚度比展开

$$\phi = \phi_0(\delta) + \phi_1(\delta^2) + o(\delta^3) \quad (15)$$

$$\psi = \psi_0(1) + \psi_1(\delta) + o(\delta^2) \quad (16)$$

这里  $\bar{k} = \omega M^2/U\beta^2$ , 而在高M时  $\bar{k} = \omega/U$ , 且  $\phi_0, \phi_1, \psi_0, \psi_1$  满足以下方程:

$$\square \phi_0 = 0 \quad (17)$$

$$\square \phi_1 = M^2 \{ M^2 (\bar{N} - 1) \phi_{0x}^2 + \phi_{0y}^2 + \phi_0^2 \}_x \quad (18)$$

$$\square \psi_0 = 0 \quad (19)$$

$$\square \psi_1 = 2M^2 \{ M^2 (\bar{N} - 1) \phi_{0x} \psi_{0x} + \phi_{0y} \psi_{0y} + \phi_{0z} \psi_{0z} \}_x \quad (20)$$

其中  $\square = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - M^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ 。边界条件为:

$$\phi_{0x} \Big|_{z=0} = h_x + \alpha_0 \quad (21)$$

$$\phi_{1x} \Big|_{z=0} = h_y \phi_{0y} - (h + \alpha_0 x) \phi_{0zz} \Big|_{z=0} \quad (22)$$

$$\psi_{0x} \Big|_{z=0} = -e^{i\bar{k}x} (g_x + i\bar{k}g) \Big|_{z=0} \quad (23)$$

$$\psi_{1x} \Big|_{z=0} = e^{i\bar{k}x} (g \phi_{0zz} - g_y \phi_{0y}) + h_y \psi_{0y} - \psi_{0zz} (h + \alpha_0 x) \Big|_{z=0} \quad (24)$$

其中  $h(x, y)$  和  $g(x, y)$  表示物体的形状和振幅, 因此物体的边界方程为:

$$H(x, y, t) = h(x, y) + \alpha_0 x - \theta_0 e^{i\omega t} g(x, y) \quad (25)$$

相应的压力系数为:

$$C_p = C_p^{(0)} + C_p^{(1)} \quad (26)$$

$$C_p^{(0)} = C_{p_0}^{(0)} + C_{p_1}^{(0)}$$

$$C_p^{(1)} = C_{p_0}^{(1)} + C_{p_1}^{(1)}$$

$$C_{p_0}^{(0)} = -2\phi_{0x}|_{z=0} \quad (27)$$

$$C_{p_1}^{(0)} = -2\phi_{1x} + M^2\phi_{0x}^2 - \phi_{0v}^2 - \phi_{0z}^2 - 2\phi_{0xy}(h + \alpha_0x)|_{z=0} \quad (28)$$

$$C_{p_0}^{(1)} = -2\theta_0 e^{i(\omega t - \bar{K}x)} \psi_{0x}|_{z=0} \quad (29)$$

$$C_{p_1}^{(1)} = 2\theta_0 e^{i(\omega t - \bar{K}x)} [-\psi_{1x} + M^2\phi_{0x}\psi_{0x} - \phi_{0y}\psi_{0y} - \phi_{0z}\psi_{0z} + g\phi_{0xz}e^{i\bar{K}x} - \psi_{0xz}(h + \alpha_0x)]|_{z=0} \quad (30)$$

### 三、PLK方法

一次方程的解  $\phi_0$  和  $\psi_0$  在顶点马赫线附近表现出奇性，使方程 (18) 和 (20) 的右端发散，致使二次解  $\phi_1$  和  $\psi_1$  表现出更为严重的奇性。为了得到适用的结果，必须按 PLK 方法，对自变量做扰动，求得一致有效的解。

坐标扰动的一般表达式为：

$$x = u + x_1(u, v, z) + o(\delta^2) \quad (31)$$

其中扰动量为  $x_1$ ，其量级为  $\delta$ 。设  $x_1^{(1)}$  为方程 (18) 的扰动量， $x_1^{(2)} = \kappa x_1^{(2)} + i_I x_1^{(2)}$  为方程 (20) 的扰动量。于是方程 (17)~(20) 成为：

$$\square \phi_0 = 0 \quad (32)$$

$$\square \phi_1 = M^2 \{ M^2(\bar{N} - 1) \phi_{0u}^2 + \phi_{0y}^2 + \phi_{0z}^2 \}_u + \phi_{0u} \square x_1^{(1)} + 2(\phi_{0uy} x_{1y}^{(1)} + \phi_{0uz} x_{1z}^{(1)} - M^2 \phi_{0uu} x_{1u}^{(1)}) \quad (33)$$

$$\square \psi_0 = 0 \quad (34)$$

$$\square \psi_1 = 2M^2 \{ M^2(\bar{N} - 1) \phi_{0u} \psi_{0u} + \phi_{0y} \psi_{0y} + \phi_{0z} \psi_{0z} \}_u + \psi_{0u} \square x_1^{(2)} + 2(\psi_{0uy} x_{1y}^{(2)} + \psi_{0uz} x_{1z}^{(2)} - M^2 \psi_{0uu} x_{1u}^{(2)}) \quad (35)$$

其中  $\square = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - M^2 \frac{\partial^2}{\partial u^2}$ 。边界条件为：

$$\phi_{0z}|_{z=0} = h_u + \alpha_0 \quad (36)$$

$$\phi_{1z}|_{z=0} = \phi_{0u} x_{1z} - h_u x_{1z}^{(1)} - \alpha_0 x_{1z}^{(1)} + \phi_{0y} h_y - (h + \alpha_0 u) \phi_{0xz}|_{z=0} \quad (37)$$

$$\kappa \psi_{0z}|_{z=0} = -(g_u \cos \bar{K}u - \bar{K} g \sin \bar{K}u) \quad (38)$$

$$i_I \psi_{0z}|_{z=0} = -(g_u \sin \bar{K}u + \bar{K} g \cos \bar{K}u) \quad (39)$$

$$\kappa \psi_{1z}|_{z=0} = \kappa \psi_{0u} \kappa x_{1z}^{(2)} - i_I \psi_{0u} i_I x_{1z}^{(2)} - (\phi_{0y} g_y - g \phi_{0zz} - g_u \kappa x_{1u}^{(2)}) \cos \bar{K}u - g_u i_I x_{1u}^{(2)} \sin \bar{K}u + h_y \kappa \psi_{0y} - (h + \alpha_0 u) \kappa \psi_{0zz} \quad (40)$$

$$i_I \psi_{1z}|_{z=0} = \kappa \psi_{0u} i_I x_{1z}^{(2)} - i_I \psi_{0u} \kappa x_{1z}^{(2)} - (\phi_{0y} g_y - g \phi_{0zz} - g_u \kappa x_{1u}^{(2)}) \sin \bar{K}u + g_u i_I x_{1u}^{(2)} \cos \bar{K}u + h_y i_I \psi_{0y} - (h + \alpha_0 u) i_I \psi_{0zz} \quad (41)$$

$x_1^{(1)}$  和  $x_1^{(2)}$  所满足的偏微分方程为：

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial u} = M^2(\bar{N} - 1) \frac{\partial \phi_0}{\partial u} \\ \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial y} = -M^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial y} \\ \frac{\partial x_1^{(1)}}{\partial z} = -M^2 \frac{\partial \phi_0}{\partial z} \end{cases} \quad (42)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial x_1^{(2)}}{\partial u} = M^2(\bar{N}-1) \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial u} + \frac{\partial \psi_0}{\partial u} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial u^2} / \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial u^2} \right) \\ \frac{\partial x_1^{(2)}}{\partial y} = -M^2 \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{\partial \psi_0}{\partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial u \partial y} / \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial u \partial y} \right) \\ \frac{\partial x_1^{(2)}}{\partial z} = -M^2 \left( \frac{\partial \phi_0}{\partial z} + \frac{\partial \psi_0}{\partial z} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial u \partial z} / \frac{\partial^2 \psi_0}{\partial u \partial z} \right) \end{cases} \quad (43)$$

它们可以根据  $\phi_0$  和  $\psi_0$  在顶点马赫锥附近的性质求解。

根据 Van Dyke<sup>[3]</sup> 和钱福星等人<sup>[5]</sup> 的工作, 有

$$\phi_1 = M^2(\phi_0 \phi_{0u}) - M^2 \bar{N} u \phi_{0u}^2 + \phi_{0u} x_1^{(1)} + \phi_1^{(0)} \quad (44)$$

$$\psi_1 = M^2(\phi_0 \psi_0)_u - M^2 \bar{N} u \phi_{0u} \psi_{0u} + \psi_{0u} x_1^{(2)} + \psi_1^{(0)} \quad (45)$$

而辅助解  $\phi_1^{(0)}$  和  $\psi_1^{(0)}$  满足的方程为齐次波动方程

$$\square \phi_1^{(0)} = 0 \quad (46)$$

$$\square \psi_1^{(0)} = 0 \quad (47)$$

只要求出  $\phi_0$ ,  $\psi_0$ ,  $\phi_1^{(0)}$  和  $\psi_1^{(0)}$ , 代入式 (27)~(30) 即可求得压力系数。再将其积分, 可以得到升力系数和力矩系数。

#### 四、在平均攻角附近振荡的三维平板机翼

为验证本理论的可靠性及适用范围, 需要做一些定量计算, 以便和有关的理论和实验结果作比较。由于至今没有见到平均攻角不为零的三维机翼在超音速飞行时的动导数实验结果, 所以无法和实验作比较。唯一可以作比较的是 D. D. Liu 和 W. H. Hwi 的低折合频率振荡三角平板机翼压缩面一侧的结果<sup>[6]</sup>。所以, 我们也计算了这样一个实例。

我们考虑超音速前沿的三角平板机翼在某个攻角  $\alpha_0$  附近绕定点 ( $x = b$ ) 作小振幅低频简谐振荡的情况, 那么式 (25) 中的  $h(x, y) = 0$ ,  $g(x, y) = x - b$ , 即

$$H(x, y, t) = \alpha_0 x - \theta_0 e^{i\omega t} (x - b)$$

在低频振荡的情况下,  $k \ll 1$ , 方程 (17)~(20) 的边界条件成为:

$$\phi_{0z}|_{z=0} = \alpha_0$$

$$\psi_{0z}|_{z=0} = -[1 + i\bar{K}(2x - b)]$$

$$\psi_{1z}|_{z=0} = (1 + i\bar{K}x)(x - b)\phi_{0zz} - \psi_{0zz}\alpha_0 x|_{z=0}$$

在此情况下可求出  $\phi_0$  和  $\psi_0$  的解析表达式代入方程 (42) 和 (43), 解出

$$x_1^{(1)} = -\frac{\alpha_0 M}{(1 - n^2)^{1/2}} [(\bar{N} - 1)u + Mny] \quad (48)$$

$$x_1^{(2)} = -\frac{2\alpha_0 M}{(1 - n^2)^{1/2}} [(\bar{N} - 1)u + Mny] \quad (49)$$

$$x_1^{(2)} = \frac{\alpha_0 \bar{K} M (x - Mny) [(1 - 2n^2)x + Mny]}{(1 - n^2)^{3/2}} \quad (50)$$

由式 (44) 和 (45) 求得

$$\begin{aligned} \kappa \psi_{1z}^{(0)}|_{z=0} = & -\frac{2\alpha_0 M}{\pi} \left\{ \frac{n(u^2 - M^2 y^2)^{1/2} (2u - b)}{u^2 - M^2 n^2 y^2} + \frac{(\bar{N} - 1)}{(1 - n^2)^{1/2}} \right. \\ & \left. + \frac{1}{(1 - n^2)^{1/2}} \left( \cos^{-1} \frac{un - My}{u - Mny} + \cos^{-1} \frac{un + My}{u + Mny} \right) \right\} \quad (51) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
i\psi_{1z}^{(0)}|_{z=0} = & -\frac{2\alpha_0 M \bar{K}}{\pi} \left\{ n(u^2 - M^2 y^2)^{1/2} \left( \frac{3u^2 - 2b}{u^2 - M^2 n^2 y^2} + \frac{2}{1 - n^2} \right) \right. \\
& + \frac{3u - b}{(1 - n^2)^{1/2}} \left( \cos^{-1} \frac{un - My}{u - Mny} + \cos^{-1} \frac{un + My}{u + Mny} \right) \\
& - \frac{2n^2 - 1}{(1 - n^2)^{3/2}} \left[ (u - Mny) \cos^{-1} \frac{un - My}{u - Mny} \right. \\
& \left. + (u + Mny) \cos^{-1} \frac{un + My}{u + Mny} \right] - \frac{\pi}{(1 - n^2)^{1/2}} \left[ \left( \frac{1 - 2n^2}{1 - n^2} \right) \right. \\
& \left. - 3(\bar{N} + 3)u + \frac{3n^2 - 2}{1 - n^2} Mny \right] \left. \right\} \quad (52)
\end{aligned}$$

由此可数字求解  $\psi_1$ , 代入方程 (29) 和 (30) 求出压力系数  $C_p^{(1)}$ 。俯仰力矩系数为

$$C_m = \frac{1}{S c_0} \iint C_p(x - b) dx dy \quad (53)$$

对于小振幅简谐振荡,  $\theta = \theta_0 e^{i\omega t}$ , 所以有

$$-\frac{C_m}{\theta} = C_{m_0} + i k C_{m_0} = 2 \operatorname{tg} \chi_r \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\bar{x} \operatorname{ctg} \chi_r} \frac{C_p}{\theta} (\bar{x} - \bar{b}) d\bar{y} \quad (54)$$

由此式可知动导数  $C_{m_0}$  只和  $\frac{C_m}{\theta}$  的虚部即  $C_p^{(1)}/\theta$  的虚部有关, 即

$$C_{m_0} = \frac{2 \operatorname{tg} \chi_r}{k} \int_0^1 d\bar{x} \int_0^{\bar{x} \operatorname{ctg} \chi_r} \left[ \frac{C_p^{(1)}}{\theta} \right]_{i.m.} (\bar{x} - \bar{b}) d\bar{y} \quad (55)$$

积分时注意原奇线  $x = My$  在  $u-y$  平面内成为

$$u = \left[ 1 + \frac{\alpha_0 M}{(1 - n^2)^{1/2}} (\bar{N} - 1 + n) \right] My \quad (56)$$

即可得到所求的动导数。

## 五、结果与讨论

在求解二次方程的过程中, 我们部分地使用三元近似特解(方程(45)中的右边第二项)。用上述方法对于  $M$  从 2 至 8, 攻角  $\alpha_0$  从  $5^\circ$  至  $20^\circ$ , 后掠角从  $20^\circ$  至  $63^\circ$ , 俯仰转轴位置  $\bar{b}$  从 0 至 1.0 做了大量的计算。代表性结果画在图 1 和图 2 中, 并且把 Liu 和 Hui<sup>(6)</sup> 的可供比较的曲线和线性理论的结果<sup>(5)</sup>也画在图上。据我们所知, 至今未见有关实验数据。

从图 1 和图 2 可以看出, 本结果与 Liu 和 Hui 的结果在趋势和量级上都 很吻合。在图 1 中, 对后掠角  $\chi_r = 63^\circ$  的平板三角翼(展弦比 2)与线性理论进行了比较。可见, 厚度或初始攻角对气动导数是起减少的作用。

Van Dyke<sup>(8)</sup>曾在轴对称体二次理论中, 利用气动对马赫数变化曲线的发散点, 确定轴对称体绕流二次理论的适用范围为  $M\delta \leq 0.7$  左右。本文的图 1 也可以看到类似的情况。后掠角越大, 开始发散的马赫数越高。可以说, 在三元情况下, 二次理论的适用范围可达  $M\delta > 1.0$ 。在一般的后掠角情况下, 可以适用到  $M\delta = 1.0$ 。在  $M\delta \approx 0.7 \sim 1.0$  之间, 主要非线性效应可以通过二次理论进行估算。

高马赫数假定的适用范围是  $M \geq 3$ 。在马赫数 2 ~ 3, 二次解的误差会大一些。但是, 计算气动力、动导数时, 要在一次解加上二次解, 而这个一次解是线性结果。如果一次解采用没有高马赫数近似的精确线性结果, 即使在低超音速二次解的误差大一些, 总的还是

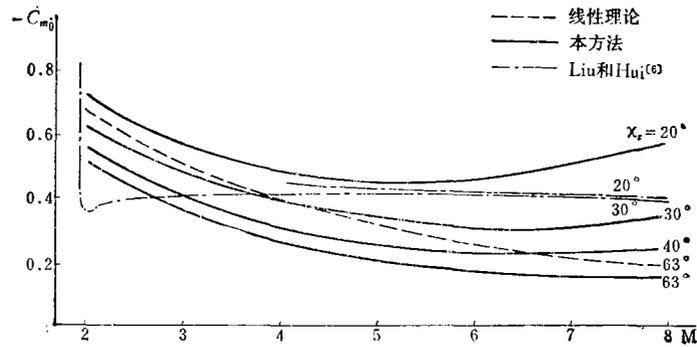


图1  $C_{m_0}$  随马赫数的变化 (平板三角翼压缩面)

能够提高本来就比较可靠的线性结果。

我们在超音速、小高超音速范围内, 为了提高飞行器的机动性、动稳定性, 对动导数计算寻找一些比线性理论或半经验的活塞理论, 激波膨胀法, 牛顿理论等更可靠的有一定理论根据, 并适合于工程计算的方法。主要是小展弦比机翼的厚度效应和平均攻角的影响, 还有折合频率要求到  $0 \sim 1$  的范围, 这些在线性理论是不能使人满意的, 尤其在马赫数 3 以上。

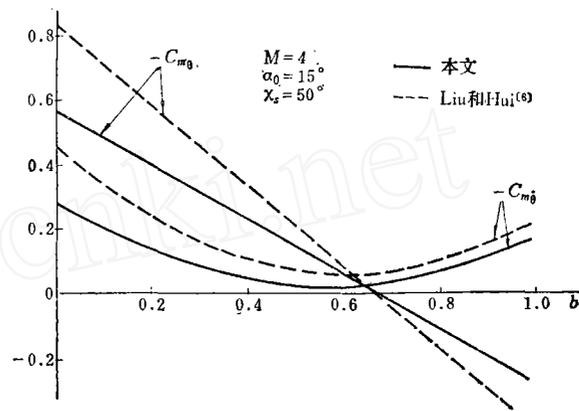


图2  $C_{m_0}$  和  $C_{m_0^*}$  随  $b$  的变化 (平板三角翼压缩面)

最后应该提到的是韩延良同志, 他始终参加了本文有关的大量计算工作。在本文写作过程中得到了颜美云同志的协助, 表示感谢。

### 参 考 文 献

- (1) Orlik-Rückemann K. J., Dynamic Stability Testing of Aircraft-Needs Versus Capabilities. Prog. Aerospace Sci. Vol. 16, No. 4, 1975.
- (2) Buseman A., Aerodynamischer Auftrieb bei Überschall Geschwindigkeit. Lufo. Bd. 12, Nr. 6, 1935.
- (3) Van Dyke M. D., A Study of Second-Order Supersonic Flow Theory. NACA Report 1081, 1952.
- (4) Landahl M. T., Unsteady Flow Around Thin Wings at High Mach Numbers. JAS. 1957, p. 33.
- (5) 钱福星, 华威, 江权威等人, 超音速, 高超音速三元薄翼非定常二次理论, 中国科学力学研究所, 科学技术研究报告, 1964年12月。
- (6) Liu D. D. and Hui W. H., Oscillating Delta Wings with Attached Shock Waves. AIAA J. Vol. 15 No. 6, 1977.
- (7) Hui W. H., Stability of Oscillating Wedge and Wings in Hypersonic and Supersonic Flows. AIAA J. Vol. 7, No. 8, 1969.
- (8) Van Dyke M. D., Practical Calculation of Second-Order Supersonic Flow Past Nonlifting Bodies of Revolution. NACA TN 2744, 1952.
- (9) Van Dyke, M. D., Supersonic flow past oscillating airfoils including nonlinear thickness effects. NACA Rep. 1183. 1954.

ACCURACY AND APPLICATION OF A SECOND-  
ORDER THEORY FOR THREE-DIMENSIONAL  
SUPERSONIC AND LOW HYPER-  
SONIC UNSTEADY FLOWS  
AROUND A THIN WING

*Qian Fuxing, Gu Weikai and He Longde*  
(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

Abstract

The three-dimensional unsteady second-order non-homogeneous differential equation has been derived by superposition of a small disturbance on a given steady three-dimensional flow. Based on the assumption of high Mach numbers this second-order equation for unsteady flow reduces to a form analogous to that for steady flow. This makes it possible to solve the equation by methods used in the second-order theory for steady flows. In the course of solution the flows are constrained and corrected according to the PLK method, and singularities are thus eliminated. The crucial point in this procedure is to find the correct particular solutions. Two particular solutions are used. One is the approximate three-dimensional particular solution. The other is obtained under the assumption of local two-dimensionality. In addition, the uniform particular solution is given, from which the uniform second-order solutions may be obtained. Then, we have treated the unsteady problem for delta wings with low aspect ratio and supersonic leading edges. The Mach number range for application of the present theory is from supersonic to low hypersonic values with reduced frequencies up to near unity. The theoretical results derived in this work can be used to calculate the unsteady aerodynamic characteristics of wings having arbitrary airfoil sections.

As experimental information for similar conditions is not yet available, we can only compare our results with those of Liu D.D.. For this reason, only the derivation for a flat delta wing oscillating at low frequencies has been carried out and an analytical expression is obtained for the first order expansion of the unsteady velocity potential. In the range of Mach numbers 4 to 8, our results are in agreement with those of Lui D.D..

It is also shown that under conditions of three-dimensional thin wings the second-order theory is valid up to  $M\delta=1.0$ , while according to application of the second-order theory to bodies of revolution by Van Dyke, the useful upper limit of  $M\delta$  is only 0.7. Hence, with  $M\delta=0.7\sim 1.0$ , the principal non-linear effects can be calculated by our second-order theory, while for thin wings the third-order terms connected with heat transfer and entropy change can be ignored.