

纤维复合材料刚度和强度的分析与表征方法

中国科学院力学研究所 张双寅

一、引言

复合材料是多相非均匀、各向异性材料，具有很多不同于金属等各向同性材料的特点。为确保它在结构中得到可靠而有效的应用，近十多年间，各国力学工作者对纤维复合材料的力学性质进行了大量研究，发展了预示这些材料受力响应和破坏强度的分析方法，并建立了一套检验这些分析方法的试验技术。本文对这些分析方法和试验技术给以简要评述。

1. 复合材料的发展与现状

当前，复合材料工业在如下三个方面取得了巨大进展：(a)高强度、高模量纤维的

上来说较困难，但如果选用所需要尺寸的矩形管，经机加工做成芯模，也是可以实现的。

参 考 文 献

1. AIAA No72-734
2. 《材料工艺》1976, No5, 44
3. 国营南京有线电厂：南京电镀资料选编(三)，1977, 15-20页
4. 上海机电二局电镀队：菸酸镀银试验总结，1978

出现；(b)高刚度、强度大，而且耐高温的基体材料的生产；(c)使用了具有可设计性的层板复合材料的概念。

表1列出了目前常用高性能纤维的力学性能。

基体材料耐温度性能也在不断改进，如环氧可在176.7℃下长期工作；聚酰亚胺可在315℃下长期工作；金属基复合材料(如硼/铝)可在315.6℃下长期工作。

2. 复合材料制造和各向异性特征

把纤维(或纤维束)以适当距离排列，涂上基体材料或用基体材料浸渍，制成半固化无纬带，然后将这些单向纤维的无纬带以各种方向和层数叠加在一起，加热固化而成层板。这种层板是工程上最常用的复合

5. 北京航空学院四〇五教研室：金属保护学(第二篇)，1963

6. 上海科学技术编译馆：金属表面处理和电铸技术，10-13页，1962

7. 《Plating》1974, Vol.61, No12, 1019-1021

8. Handbook Adhesive Bonding, 21-23, 1973

9. Electroplating Engineering Handbook, p519-531, 1971

10 国防工业出版社：《电镀手册》，440-454页，1977

表 1.

纤维 \ 性能	强度(公斤/厘米 ²)	模量(公斤/厘米 ²)	密度(公斤/厘米 ³)
玻璃纤维	31.64×10^3	0.773×10^6	2.5
碳纤维	$21.1 - 28.1 \times 10^3$	$2.46 - 3.52 \times 10^6$	1.46
硼纤维	28.1×10^3	4.22×10^6	2.63

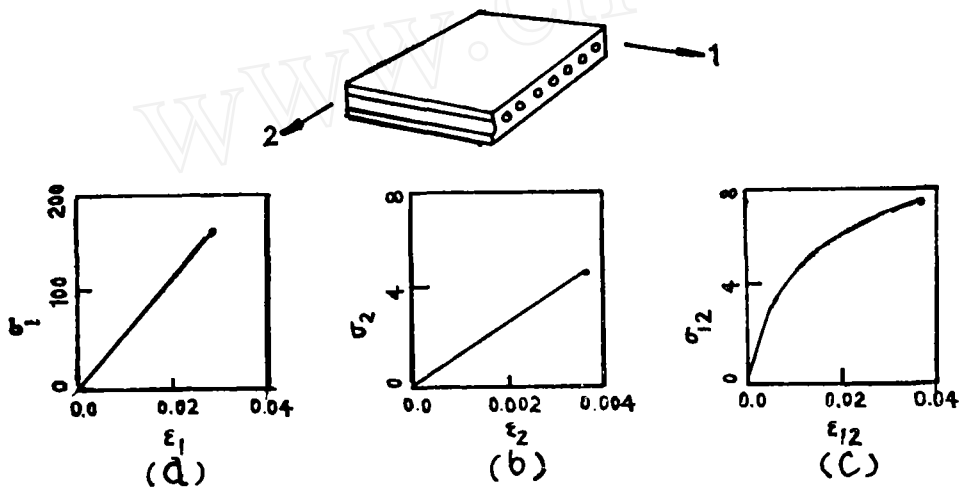


图 1. 玻璃/环氧单层复合材料的应力-应变关系

图中: (a) 纵向拉伸应力应变关系
 (b) 横向拉伸应力应变关系
 (c) 平面剪切应力应变关系

材料。

单向纤维复合材料板在纤维方向(纵向)具有较高的力学性能;但在垂直纤维方向(横向)上力学性能较差;同时,平面剪切方向上具有非线性性质。如图 1 所示。

$(0/90)_m$ 层板具有两互相垂直的轴,沿这两轴方向上具有相同的力学性能,但层与层之间则性能不同。 $(0/90)_m$ 玻璃/环氧层板的平面拉伸与平面剪切性能表示在图 2 上,可以看到 $(0/90)_m$ 层板与单向纤维复合材料板具有大致相同的剪切性能。

单向纤维复合材料的单向性能为按照刚

度与强度要求设计材料提供了可能性。在制作材料时使应力大的方向具有更大的强度与刚度。同时,单层复合材料的单向性,导致不对称多层板具有拉伸与弯曲的耦合效应,也会导致成角铺层的不对称多层板具有弯曲与扭转的耦合特性。这些特性都可用于设计目的,以符合结构的承载要求,最大限度地发掘材料潜力。

3. 两种层次的抽象

研究复合材料力学性能时,有两种层次的抽象。其一是微观力学(micromechanics)

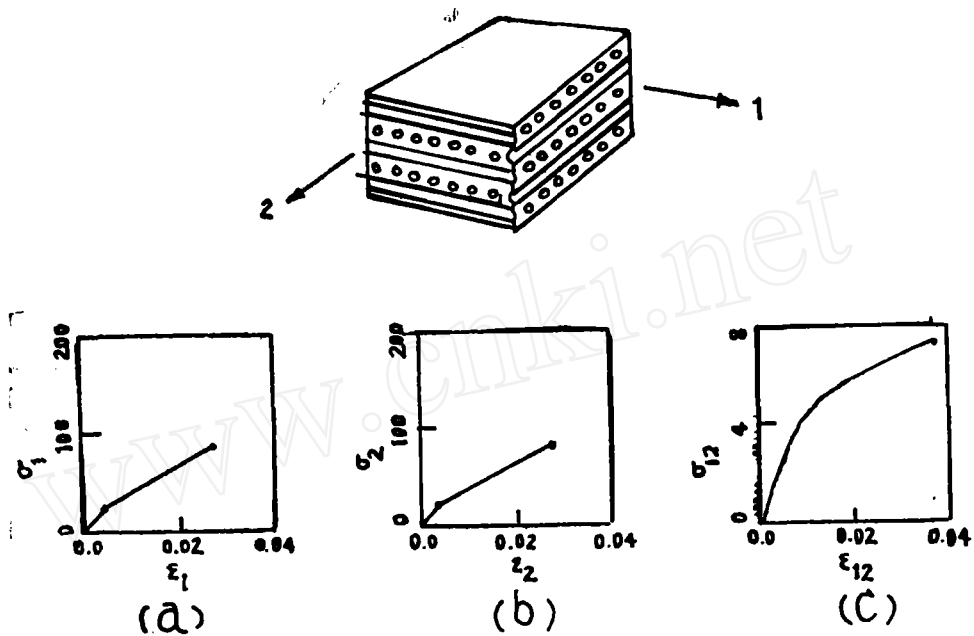


图2. $(0/90)_m$ 玻璃/环氧层板的应力应变关系

图中：(a) 纵向拉伸应力应变关系
 (b) 横向拉伸应力应变关系
 (c) 平面剪切应力应变关系

的观点，有意义的尺度为纤维直径；其二是宏观力学的观点，其特征尺度是层板的厚度、宽度与长度。材料的宏观力学性能是结构设计的基础，因此本文主要讨论复合材料的宏观力学性能。当然，这样处理决不意味着已经全面和透彻了。在研究材料的破坏机理时，深入到微观与细观层次就十分必要了。

二、复合材料的刚度分析

平衡方程、位移应变关系与本构方程是进行任何材料受力变形分析所必须的三个关系式。对复合材料而言，平衡方程与位移应变关系与各向同性材料完全相同，所不同的是本构方程。现阶段对复合材料进行变形分析的基础是各向异性弹性理论。纤维复合材料与传统材料的主要区别是虎克定律。

1. 虎克定律

各向同性材料的虎克定律只有两个独立的弹性常数，而最一般的各向异性弹性材料，广义虎克定律有21个独立的弹性常数。

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1-a)$$

$$\text{或 } \epsilon_{ij} = S_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (1-b)$$

式中 $i, j, k, l = 1, 2, 3$ 。 σ_{ij} (或 ϵ_{ij}) 的方向表示在图3。 C_{ijkl} 与 S_{ijkl} 为材料的刚度系数矩阵与柔度系数矩阵，二者均为四阶张量，共36个分量。由于对称，只有21个分量是独立的。式(1-a, b)中重复的指标表示相加。

2. 坐标变换

当要求变形的方向与参考坐标方向不一致时，必须进行坐标变换。新旧坐标之间的

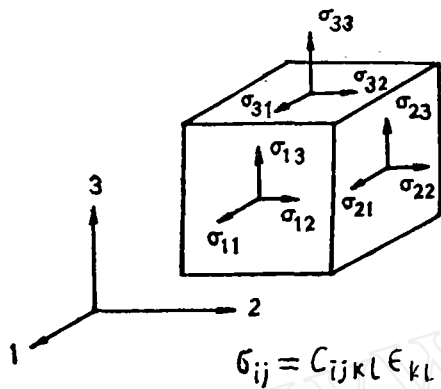


图3. 虎克定律与张力张量

方向余弦由图4表示。坐标变换, 应力(或应变)张量的变换与刚度系数矩阵(或柔度系数矩阵)的变换由式(2)给出。

$$x'_i = a_{ij} x_j \quad (2-a)$$

$$\sigma'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \sigma_{kl} \quad (2-b)$$

$$C_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} C_{mnpq} \quad (2-c)$$

式中 $i, j, k, l, m, n, p, q = 1, 2, 3$ 。

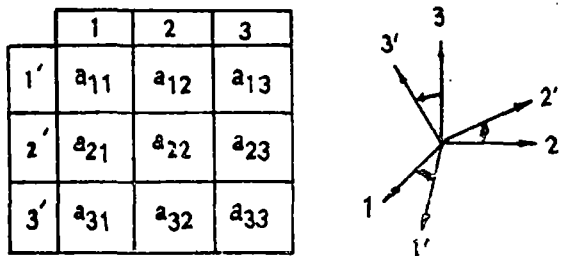


图4. 坐标变换

3. 紧凑记号表示的虎克定律

可以用紧凑的记号简化张量记号表示的虎克定律。公式(1)可以写为下式:

$$\sigma_i = C_{ij} \epsilon_j \quad (3-a)$$

$$\epsilon_i = S_{ij} \sigma_j \quad (3-b)$$

$i, j = 1, 2, \dots, 6$ 。于是, 指标数由4个变成2个, 每个指标的变化范围由3扩展到6。张量记号与紧凑记号之间的对应关系列于表2。

用张量记号进行坐标变换是很方便的,

表2

应 力	应 变
$\sigma_{11} \rightarrow \sigma_1$	$\epsilon_{11} \rightarrow \epsilon_1$
$\sigma_{22} \rightarrow \sigma_2$	$\epsilon_{22} \rightarrow \epsilon_2$
$\sigma_{33} \rightarrow \sigma_3$	$\epsilon_{33} \rightarrow \epsilon_3$
$\sigma_{23} \rightarrow \sigma_4$	$\epsilon_{23} \rightarrow \epsilon_4$
$\sigma_{13} \rightarrow \sigma_5$	$\epsilon_{13} \rightarrow \epsilon_5$
$\sigma_{12} \rightarrow \sigma_6$	$\epsilon_{12} \rightarrow \epsilon_6$

而紧凑的记号, 当引入对称的性质时, 提供了相当的简化。

4. 弹性对称

因为线弹性体存在弹性能, 所以刚度与柔度系数矩阵为对称矩阵, 式(1)与(3)中的 C_{ijkl} , S_{ijkl} , C_{ij} 和 S_{ij} 的三十六个分量只有21个是独立的。这是最一般的材料, 称为三斜对称体。具有一个对称面的材料称为单斜对称体, 具有13个独立常数。

具有两个正交对称面的材料就是正交各向异性体, 有9个独立常数。如果正交各向异性体中有一个对称面是各向同性面, 那么它就是横观各向同性体, 又称六角对称体, 有五个独立常数。单向纤维复合材料在垂直纤维的平面上是各向同性的, 是横观各向同性体。具有各种对称性的刚度(柔度)系数的个数列于表3。

表3

弹 性 对 称	独 立 常 数
三 斜 对 称	21
单 斜 对 称	13
正 交 各 向 异 性	9
六 角 对 称	5
各 向 同 性	2

正交各向异性材料与横观各向同性材料的虎克定律的展开型式由方程(4)与(5)给出。

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (4)$$

对称

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & S_{22} & S_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & S_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & S_{44} & 0 & 0 \\ & & & & S_{55} & 0 \\ & & & & & S_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (5)$$

对称

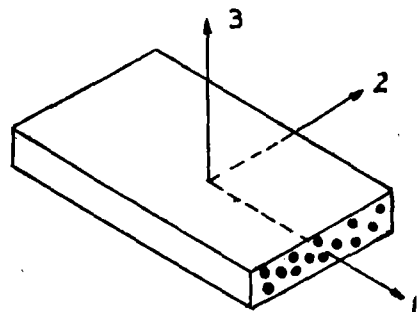
式(5)相应于2—3平面是各向同性平面，并且有 $S_{44} = 2(S_{22} - S_{23})$ ，所以式(5)中只有5个独立常数。

5. 工程常数与柔度系数之间的关系

工程常数即杨氏模量、泊松比与剪切模量，对于各向异性材料它们具有对方向的依赖性。可以通过简单拉伸和剪切试验测得。关于横观各向同性材料的工程常数与柔度系数之间的关系见图5。

6. 二维问题

既然工程层板是最常见的结构型式，所以在研究复合材料的虎克定律时，二维问题的公式具有特别重要的意义。假定是平面应力或平面应变状态，可以将三维虎克定律简化为二维问题。



$$\begin{aligned} S_{11} &= 1/E_{11} \\ S_{22} &= S_{33} = 1/E_{22} \\ S_{12} &= S_{13} = -\nu_{12}/E_{11} \\ S_{23} &= -\nu_{23}/E_{22} \\ S_{44} &= 2(1 + \nu_{23})/E_{22} \\ S_{55} &= S_{66} = 1/G_{12} \end{aligned}$$

图5. 工程常数

(a) 平面应力情况

假定面外应力分量是零，面内应力分量均与第三个方向无关，得到平面应力情况的虎克定律：

$$\begin{cases} \sigma_3 = \sigma_4 = \sigma_6 = 0 \\ \sigma_i = Q_{ij} \epsilon_j \end{cases} \quad (6)$$

Q_{ij} 是折合刚度矩阵

$$Q_{ij} = C_{ij} - \frac{C_{i3} C_{j3}}{C_{33}} \quad (7)$$

$i, j = 1, 2, 6$ 。写成矩阵形式，方程(6)为

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ & Q_{22} & 0 \\ \text{对称} & & Q_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} \quad (8)$$

(b) 平面应变情况

假定面外应变分量为零，面内应变分量

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \\ \sigma_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & 2a_{11} a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & 2a_{21} a_{22} \\ a_{11} a_{21} & a_{12} a_{22} & a_{11} a_{22} + a_{12} a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (12)$$

相似地可以得到关于应变的表达式。

由式(2-C)可以得到刚度矩阵的转换结果。

$$\begin{pmatrix} \sigma_1' \\ \sigma_2' \\ \sigma_6' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \text{对称} & & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \epsilon_1' \\ \epsilon_2' \\ \epsilon_6' \end{pmatrix} \quad (13)$$

式中：

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{11} &= Q_{11} \cos^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \sin^4 \alpha \\ \bar{Q}_{12} &= (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ \bar{Q}_{22} &= Q_{11} \sin^4 \alpha + 2(Q_{12} + 2Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{22} \cos^4 \alpha \\ \bar{Q}_{16} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin \alpha \cos^3 \alpha + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66}) \sin^3 \alpha \cos \alpha \\ \bar{Q}_{26} &= (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^3 \alpha \cos \alpha + (Q_{12} - Q_{66} + 2Q_{66}) \sin \alpha \cos^3 \alpha \\ \bar{Q}_{66} &= (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + Q_{66} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \end{aligned} \quad (14)$$

不依赖于第三个方向，于是

$$\begin{cases} \epsilon_3 = \epsilon_4 = \epsilon_6 = 0 \\ \epsilon_i = R_{ij} \sigma_j \end{cases} \quad (9)$$

R_{ij} 为折合柔度矩阵。

$$R_{ij} = S_{ij} - \frac{S_{i3} S_{j3}}{S_{33}} \quad (10)$$

$i, j = 1, 2, 6$ 。写成矩阵形式，式(9)为

$$\begin{pmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{11} & R_{12} & 0 \\ & R_{22} & 0 \\ \text{对称} & & R_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{pmatrix} \quad (11)$$

(c) 坐标变换

当研究的方向与参考坐标的方向不一致时就需要进行坐标变换。如图6所示。已知旧坐标系1,2与材料主方向重合，求新坐标系1',2'下的应力时，由式(2-b)， $i, j, k, l = 1, 2$ 。则：

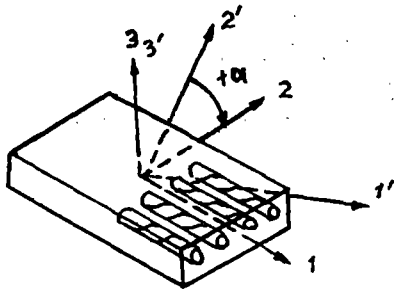
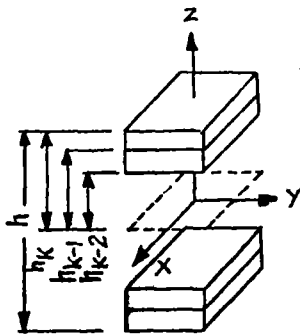


图6. 坐标变换

7. 层板理论

上边主要介绍了单层复合材料刚度的表征方法,重要的是如何由单层材料的刚度求多层材料的刚度。所谓“单层”材料,是指具有单向纤维的复合材料薄板。将这些单层板以一定顺序和方向叠在一起,形成多层板。这种多层板的力学性能由各层材料的性能、



$$\begin{aligned} [\epsilon] &= [\epsilon^0] + Z[K] \\ [N] &= [A][\epsilon^0] + [B][K] \\ [M] &= [B][\epsilon^0] + [D][K] \end{aligned}$$

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K (h_{K+1} - h_K)$$

$$B_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K (h_{K+1}^2 - h_K^2)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{3} \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K (h_{K+1}^3 - h_K^3)$$

图7. 层板的本构响应

厚度、排列方向和铺层顺序所决定。

假定层板变形为小挠度,且满足 kirc-hoff假定,即变形前参考面法线在变形后仍为法线,而且没有拉伸变形,于是:

(a)在垂直层板板面方向上的正应变与剪应变可以忽略;(b)垂直板面方向上的应力很小可以忽略,得到平面应力状态;(c)层板任何一点的位移可以由参考面(例如板中性面)的位移和该点到参考面的距离表示;(d)每层很薄处于平面应力状态,所有层粘在一起,保持位移连续。图7给出了层板材料示意图。

由 Kirchhoff 假定,每层上任意点的应变为

$$[\epsilon] = [\epsilon^0] + z[K] \quad (15)$$

$[\epsilon^0]$ 为参考面上的应变列阵; z 为该点与参考面之距; $[K]$ 是弯曲曲率。

根据虎克定律

$$\sigma_i = Q_{ij} (\epsilon_j^0 + zK_j) \quad (16)$$

代入求内力与弯矩的公式

$$[N] = \int_{\text{厚度}} [\sigma] dz$$

$$[M] = \int_{\text{厚度}} [\sigma] z dz$$

得到:

$$[N] = [A][\epsilon^0] + [B][K] \quad (17)$$

$$[M] = [B][\epsilon^0] + [D][K] \quad (18)$$

式中:

$$A_{ij} = \sum_{K=1}^n Q_{ij}^K (h_{K+1} - h_K) \quad (19)$$

$$B_{ij} = \sum_{K=1}^n \frac{1}{2} Q_{ij}^K (h_{K+1}^2 - h_K^2) \quad (20)$$

$$D_{ij} = \sum_{K=1}^n \frac{1}{3} Q_{ij}^K (h_{K+1}^3 - h_K^3) \quad (21)$$

A_{ij} 、 D_{ij} 、 B_{ij} 分别为拉伸刚度矩阵、弯曲刚度矩阵和拉弯耦合矩阵。

具有对称铺层的层板, B_{ij} 为 0 矩阵, 没有拉弯耦合效应; 而对于不对称情况, B_{ij} 为非零矩阵, 存在拉弯耦合效应。这个特性可以用于材料与结构设计。例如直升飞机的旋翼, 既受旋转离心力引起的拉应力作用, 又受垂直翼面气动力引起的弯曲应力的作用。应该设计旋翼具有这样的不对称性, 使拉应力引起的弯曲变形与弯曲应力引起的弯曲变形相抵消。这样可以提高结构的承载能力, 充分利用材料。另外, 这类非对称层板还具有弯扭耦合效应。当弯矩方向与材料主方向不一致时, 除了产生弯曲变形外还产生扭转变形。这种特性可用于机翼或水平尾翼的设计, 使之在气动力作用下翼面“攻角”有合理的改变, 改善抗颤振的性能。总之, 复合材料的可设计性具有丰富的内容, 为工程设计工作者提供了广阔的用武之地。

本节讨论的内容主要是基于经典的各向异性弹性理论, 并作了 Kirchhoff 假定, 这只是一种近似。进一步精确分析必须考虑非线性效应和横向剪切变形, 这里就不讨论了。

三、纤维复合材料的强度理论

复合应力条件下的强度准则是进行结构设计所必须的。从五十年代起, 各国力学工作者提出了许多破坏准则, 大多是经验公式。就是采用唯象论的方法, 对破坏准则的一般形式进行假定, 由实验决定待定常数, 然后由复合应力试验来检验其正确性。

作为强度准则应该满足如下几个原则:

(1) 破坏准则(或破坏判据)在坐标变换时应保持不变; (2) 在九维应力空间中破坏准则面应该是凸的; (3) 材料的强度特征应该在准则中有体现; (4) 表达式力求简

洁, 使用方便。

文献[9]综述了各种经验的强度准则。

(1) Hankinson 准则

$$T_{\theta} = T_0 T_{90} [T_0 \sin^n \theta + T_{90} \cos^n \theta]^{-1} \quad (22)$$

T_0 、 T_{90} 是材料在纤维(或结晶)方向上的与垂直纤维方向上的拉伸强度; n 是经验常数, T_{θ} 为所求之与纤维成 θ 角方向上拉伸强度。

(2) Strüssi 准则

$$T_{\theta} = T_0 \cos^2 \theta [1 + C_1 \sin^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} + T_{90} \sin^2 \theta [1 + C_2 \cos^2 \theta]^{-\frac{1}{2}} \quad (23)$$

这个准则具有两个待定常数 C_1 与 C_2 。

(3) Norris 准则

$$T_{\theta}^{-2} = T_0^{-2} \sin^4 \theta + G^{-1} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + T_{90}^{-2} \cos^4 \theta \quad (24)$$

这里考虑了剪切模量 G 的影响。

(4) 美国森林产品实验室准则

$$T_{\theta}^{-2} = T_0^{-2} \sin^4 \theta + (2S_0)^{-2} \sin^2 2\theta + (T_{90})^{-2} \cos^4 \theta, \quad (25.a)$$

$$S_0^{-2} = S_0^{-2} \cos^2 2\theta + (T_0^{-2} + T_{90}^{-2}) \sin^2 2\theta \quad (25.b)$$

S_0 、 S_{θ} 为纤维方向上与角度为 θ 方向上的剪切强度。(25.a) 计得了平面剪切强度的影响。

(5) Von Mises 准则

Von Mises 针对织构金属的屈服强度提出屈服准则。

$$A_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl} = \text{常数} \quad (26)$$

四阶张量 A_{ijkl} 的诸分量由试验测定, 这个准则认为拉伸与压缩强度相等, 并且与体积膨胀无关。

(6) Von Mises—Hill 准则

$$F(\sigma_{22} - \sigma_{33})^2 + G(\sigma_{33} - \sigma_{11})^2 + H(\sigma_{11} - \sigma_{22})^2 + 2L\sigma_{23}^2 + 2M\sigma_{31}^2 + 2N\sigma_{12}^2 = 1 \quad (27)$$

F, G, H, L, M, N 为六个由试验测定的常数

(7) Norris - Fischer 准则

$$\sigma_{11}^2/T_0 + \sigma_{22}^2/T_{90} + \sigma_{12}^2/S_0 - K\sigma_{11}\sigma_{22}/T_0T_{90} = 1 \quad (28)$$

K是待定常数。这个准则适于平面应力状态，应力方向与材料主方向一致，并且拉伸与压缩强度相等。

(8) Ashkenazi 准则

$$(\sigma_{11}^2/T_0 + \sigma_{22}^2/T_{90} + \sigma_{12}^2/S_0 + r\sigma_{11}\sigma_{22})^2 = \sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{12}^2 \quad (29)$$

式中 $r = 4/T_{45} - 1/T_0 - 1/T_{90} - 1/S_0$ ； T_{45} 为与纤维成45°方向上的拉伸强度。这个准则可适用于强各向异性平面应力情况。

(9) Malmeister 准则

$$A_{ij}\sigma_{ij} + A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} + A_{ijklmn}\sigma_{ij}\sigma_{kl}\sigma_{mn} \dots = 1 \quad (30)$$

这个准则为最一般的表达式，它认为材料的破坏面（或屈服面）是一个多项式。

(10) Gol'denblat和Kopnov 准则

$$A_{ij}\sigma_{ij} + (A_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl})^{\frac{1}{2}} = 1, \quad (31)$$

(11) Tsai—Wn 准则

$$F_{ij}\sigma_{ij} + F_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl} = 1 \quad (32)$$

式(32)又称为Tsai—Wn 多项式准则，将应力张量记号换成紧凑记号（参看表2），式(32)成为

$$F_{ij}\sigma_i\sigma_j + F_i\sigma_i = 1 \quad (33)$$

$i, j = 1, 2, 6$ 。将式(33)展开得

$$F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + F_{22}\sigma_2^2 + F_{66}\sigma_6^2 + F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 = 1 \quad (34)$$

式(34)坐标轴与材料主轴一致，共有六个待定常数通过顺纤维方向的拉伸与压缩试验。垂直纤维方向的拉伸与压缩试验以及平面剪切试验可决定五个常数 F_{11} ， F_{22} ， F_{66} ， F_1 与 F_2 ，只有 F_{12} 通过一个的假设给出。这个准则具有很大的实用意义。

上述这些准则，主要由实验数据表示，而不追究其断裂过程的物理基础。虽然这些

准则往往缺少一般性，却能适用于特定的材料系统。

四、表征材料的试验方法

试验方法可区分为定性的对比实验与绝对性能测定实验两大类。这里主要讨论复合材料层板的某些绝对力学性能测定方法。

一个好的试验方法应该设计得使所加载荷在试验截面上应力已知，分布均匀，无其它附加应力，并且在试验截面上应变可以精确测定。绝对力学性能测试结果将不依赖于试样几何尺寸和载荷型式。

复合材料的各向异性性能使试验方法引入了一定复杂性。拉伸与弯曲的耦合效应和拉伸与剪切的耦合效应，使满足试验段边界条件有较大困难，有时为了避免对耦合变形的限制，需要用特殊的夹具。同时复合材料弹性模量高，但断裂应变较低，这使应力集中问题和载荷对中问题对试验结果的影响增大了。层间剪切强度较低，这要求特别注意夹持段的载荷传递问题。在作压缩试验时，端面不平将引起端部纤维屈曲，导致过低的承载能力和端部成“扫帚”式破坏。以上诸点为设计试验方法必须考虑的因素。

1. 拉伸试验方法

图8绘出了三种拉伸试验方法。(a)哑铃状试片，这种试样常因在夹持段与试验段过渡区有应力集中，引起纵向剪切撕裂导致提前破坏。所以不推荐这种方案。(b)直边试片，在夹持端部贴上加强片，加强片从夹持段到试验段缓慢变薄以减少应力集中。这个方案应用较多，但应注意载荷对中问题。(c)夹心樑弯曲试验，用作拉伸试验的材料做夹心樑的面板，用其他软夹心材料（如蜂窝）做夹心，制成樑试件，作弯曲试验。于是一层面板受拉，而另一层面板受压。

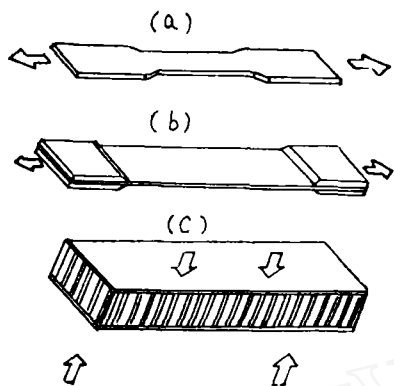


图8. 拉伸试验

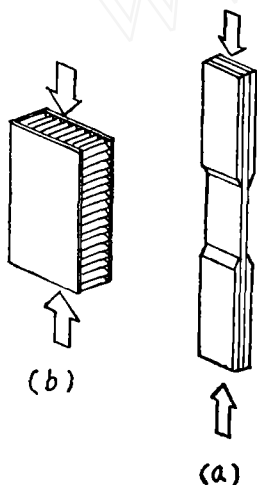


图9. 压缩试验

2. 压缩试验方法

图9绘出了两种压缩试验方案。(a)直边试件,与拉伸试片相似,但试验段较短,以防屈曲破坏。(b)蜂窝夹心试件,由两端沿面板方向加载。蜂窝夹心起到使薄试片稳定化的作用。然而这个试验的结果往往受局部屈曲,端部纤维劈裂,以及试样与加载台面摩擦的影响。为减少这些影响应将端部浸渍树脂,然后将端部加工得非常平。此外用夹心樑试样作压缩试验与图8c所示一样。

3. 平面剪切与层间剪切试验法

因纯剪与均匀剪切应力很难加上去,故平面剪切试验有一定难度。图10介绍了三种方案。(a)薄圆管扭转试验,这是直接施加纯剪应力的方法,被公认为精确的平面剪切试验方法。但是这个方案试样加工困难,试验需用专门扭转试验机,所以应用较少。(b)轨道剪切,通过一对轨道沿试件长边施加剪力。这个试验方案要求轨道刚度较大,能够把均匀分配的剪力传给试样,并且没有弯矩引入。(c)方板纯剪试验,这个方案就通过刚性较大的四个边框夹持方板试样,然后沿对角线施加拉伸(或压缩)。与轨道剪切

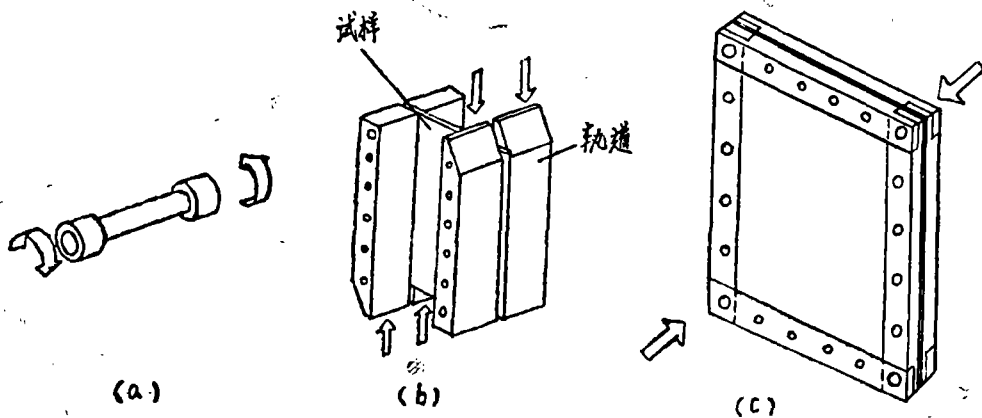


图10. 平面剪切试验

方案相似,要求边框能均匀传递剪力,并且注意防避屈曲发生。所以要求试样有足够的厚度。

平面剪切试验方法还有很多种,参看文献[12][13]。例如 45° 与 10° 偏轴拉伸试验,方板扭弯(twist)试验法; 45° 偏轴梁纯弯试验法。 45° 与 10° 偏轴拉伸试验可以测得平面剪切模量 G_{12} ,但在测剪切强度时误差较大,因为二者均非纯剪应力状态,有一个与剪应力同量级的拉伸应力加于试样上。方板扭弯试验法不可能避免横向剪力的影响,所以用这个方法测模量 G_{12} 与强度 T_{12} 都是不可靠的。 45° 偏轴梁弯曲试验法,是通过弯曲变形来测平面剪切性能。因为梁试样在发生弯曲变形时,远离中性面的材料变形大,对测定结果的贡献就大。而靠近中性面材料变形小,对结果的贡献就小。于是当复合材料层数较少时,测量误差较大。例如用玻璃钢做夹心,碳纤维复合材料做面板的夹层复合材料用这个方法测 G_{12} 就有较大误差。

关于层间剪切试验方案也很多,图11只介绍了一个方案,因剪应力分布不均匀,层间剪切强度与试验段长度有关。

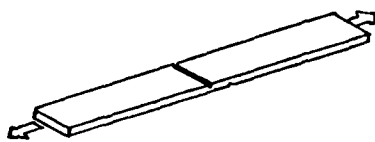


图11. 层间剪切试验

4. 双轴应力试验

图12介绍了两种方案。(a)薄管试验,对薄管施加扭矩,轴向拉力(或轴向压力)。这样可以得到二向应力状态。(b)平板双轴试验法,与管状试样相比,没有曲率影响,但是这种试验的夹持问题与加载问题都没有很好的办法。一般多用双轴拉伸试验。

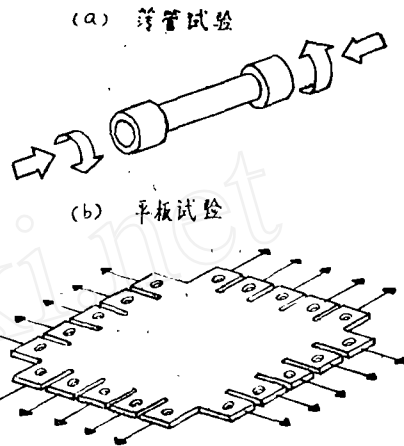


图12. 双轴试验

结束语

本文总结了纤维复合材料刚度与强度的分析与表征方法,相信这些内容对工程设计是有意义的,但并不是完全和彻底的。从宏观力学角度看,应进一步研究横向剪切性能的影响,非线性行为以及粘弹性行为的影响;从破坏机理看,深入到微观与细观的层次是必要的。这些工作至今还很不成熟,需要复合材料工作者与力学工作者共同努力去解决。

参考文献

1. Robert M. Jones, Mechanics of composite materials. Scripta Book Company. 1975.
2. 赵渠森编译, 复合材料, 国防工业出版社. 1979.
3. Sadao Amijima, Nonlinear stress-strain response of laminated composites. J. Comp. Mater. Vol 13. July, p.206 1979.

4. Ashton, J. E., Halpin, J.C. and Petit, P.H., Primer on composite materials; Analysis. Technomic publishing Co. Stamford, Conn., 1962.
5. Halpin, J. C., Structure-property relations and reliability concepts. J.Comp. Mater. Vol.6, April, 1972, p.208.
6. Hearmon, R.F.S., An introduction to applied anisotropic elasticity. Oxford Clarendon Press. 1961.
7. Composite materials Workshop. ed by Tsai, Halpin and Pagano. Technomic Publishing Co. Stamford, Conn. 1968.
8. Lekhnitskii, S.G., Anisotropic plates, Gordon and Breach Science Publishers, pp. 57—74 1968.
9. Sendekyi, G.P., A brief survey of empirical multiaxial strength criteria for composites. Composite Materials, Testing and Design (Second conference) ASTM, STP479. 1972. pp41-51.
10. Whitney, J.M., Pagano, N. J. and Pipes, R. B., Design and fabrication of tubular specimens for composite characterization. Composite Materials : Testing and Design (Second conference) ASTM, STP 497 1972, pp.52-67.
11. Wu, E.M. and Jerina, K. L., Computer aided mechanical testing of composites. Materials Research and Standards. Vol. 12, No. 2, February 1972, p.13.
12. 李家驹, 复合材料测试, 工程塑料应用。 1979, 1.
13. Chiao, C. C. and Chiao, T. T., Measurement of shear properties of fibre composites, Part I. Evaluation of test methods, Composites Vol. 8. No.3 1977, P.161