

# 关于太阳日冕磁环的稳定性

陈 乐 山

(中国科学院力学研究所)

## 摘 要

本文指出: 在过去多数的日冕磁环稳定性的研究中, 都存在一个未作说明、却又不容忽视的问题, 即无形中都在磁环边缘处用了固壁边界条件, 而它的采用与否对结果影响极大; 另外在这些研究中只考虑  $m = 1$  的模式也是不够的。这些问题都有待于进一步研究。

## 一、引 言

近年来在远紫外及软 X 射线波段的观察, 表明太阳日冕含有大量的环状结构, 很可能就是它们勾划出太阳磁场的情况, 故又称磁环 (magnetic loops)。单个磁环的寿命, 从观察看, 可以长达几小时甚至一天以上<sup>[1]</sup>; 长度达  $10^4$ — $10^5$  km; 直径  $2a$  大致比长度小一至两个数量级, 它沿长度近乎不变<sup>[2]</sup>。

环及其周围的磁场强度按 Dulk<sup>[3]</sup> 总结的经验公式来推测, 约在 10—100 G 之间。

由于日冕温度的典型值为  $10^6$  K, 电子数密度约为  $10^9$  个/c. c., 故比压  $\beta = \text{压强}/\text{磁压} \ll 1$ 。而 Alfvén 传递时间  $a/V_A$  只是秒的量级, 比观察到的磁环的寿命要短得多。这就引起了不少人对磁环的兴趣。

Van Hoven<sup>[4]</sup>, Giachetti<sup>[5]</sup> 与 Hood<sup>[6]</sup> 讨论了磁环的稳定性。由于他们不是从 Newcomb<sup>[7]</sup> 的能量原理出发就是从 Goedbloed<sup>[8]</sup> 的边缘稳定性方程出发(这两者其实是等价的), 所以在文献 [4—6] 中, 虽然没有明说, 但事实上都用了径向扰动位移  $\xi_r|_{r=a} = 0$  的边界条件(以下简称固壁条件), 然而这只在磁环外缘直接与固壁接触时才能保证实现。再说, 文献 [4—6] 只作了边缘稳定性分析, 故只能算出参量空间内稳定与不稳定的边界, 并不能回答不稳定性发展的特征时间或磁环寿命的问题。还由于边缘稳定性方程具有奇异性, 一方面给数学处理带来不少麻烦; 另外, 在用数学结果解释实验现象时, 也带来了很大的不确定性<sup>[9,10]</sup>。

Sillen<sup>[11]</sup> 与文献 [4—6] 不同, 采用了磁环的自由边界模型。他设想一个载有无力电流的磁环, 浸没在一个无电流, 低比压(近乎真空)的无界空间中, 并假定扰动是不可压缩的。然后从运动方程出发, 他算出了不稳定性的发展率。然而真实的扰动通常总是可压缩的, 而就不稳定性的发展率而言, 可压缩扰动有时比不可压缩扰动增长得更快<sup>[12,13]</sup>; 此外, 从观测看, 磁环通常并非无力场的结构, 而是沿小半径方向存在压力梯度的<sup>[6]</sup>。

本文于 1981 年 4 月 9 日收到。

本文在比压  $\beta \ll 1$  的假定下, 从运动方程出发, 用 Foukal 的压力结构来代表磁环, 并取消了扰动是不可压缩的假定, 统一用打靶格式 (shooting code)<sup>[10,11]</sup> 算出了固定边界与自由边界情况的不稳定性发展率. 计算结果表明: 采用不同的边界条件对稳定性的影响是很大的; 文献 [4-6, 11] 中只考虑或只给出  $m = 1$  的情况是不全面的,  $m > 1$  的模式有时会比  $m = 1$  的增长得更快, 因此是不允许忽略的.

## 二、平衡解

由于日冕磁环的纵横比很大, 故可近似作为直圆柱处理; 还由于从观测看, 沿轴向未发现物理量有大的不均匀性, 故选用柱坐标, 并假定平衡时一切物理量只是半径  $r$  的函数以及  $B_{\theta} = 0$ . 不计引力时, 理想磁流体力学的平衡方程为

$$\frac{dp_0}{dr} + \frac{1}{\mu} \left( B_{0z} \frac{dB_{0z}}{dr} + B_{0\theta} \frac{dB_{0\theta}}{dr} + \frac{B_{0\theta}^2}{r} \right) = 0,$$

其中下标“0”表示平衡时的值,  $\mu$  为真空导磁率, 单位为实用制.

取磁环边缘处的半径  $a$  为特征长度, 平衡磁场的角向分量  $B_{0\theta}$  在半径  $a$  处的值  $B_a$  为磁场的特征尺度. 平衡态时, 压强  $p$  在  $a$  处的值  $p_a$  为压强的特征尺度. 于是无量纲化的平衡方程为

$$\beta_a \frac{d\tilde{p}_0}{d\tilde{r}} + \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{B}_{0\theta} \frac{d\tilde{B}_{0\theta}}{d\tilde{r}} + \tilde{B}_{0z} \frac{d\tilde{B}_{0z}}{d\tilde{r}} = 0, \quad (1)$$

式中  $\beta_a = p_a / (B_a^2 / \mu)$ , 波纹号“~”代表无量纲化的量. (1) 式反映了当平衡时, 压强  $\tilde{p}_0(\tilde{r})$ , 磁场分量  $\tilde{B}_{0\theta}(\tilde{r})$  与  $\tilde{B}_{0z}(\tilde{r})$  三者之间应受一定的制约, 其中只有两个允许事先给定, 剩下的那个只能由平衡方程定.

磁环内压强的精细分布尚缺少观测数据. Foukal<sup>[1]</sup> 认为压强  $p_0$  在柱轴 ( $\tilde{r} = 0$ ) 处为极小, 而在柱边缘 ( $\tilde{r} = 1$ ) 处, 升为日冕区的常值压强  $p_a$  ( $p_0|_{\tilde{r}=0} \doteq 0.1p_a$ ). 对此, 目前是有争议的<sup>[15]</sup>, 但因文献 [2, 4, 5] 已采用了他的模型, 为了与他们比较, 本文仍袭用这一模型, 即设  $\tilde{p}_0(\tilde{r}) = 1.8\tilde{r}^2(1.5 - \tilde{r}) + 0.1$ . 它符合 Foukal 的观测, 又处处满足 Suydam 条件, 因而对局域模是稳定的.

关于磁场的分布, 更缺少观测数据, 于是取最简单的轴向电流在磁环内均布的模型, 即假设在  $\tilde{r} \leq 1$  时,  $\tilde{B}_{0\theta} = \tilde{r}$ . 于是由 (1) 式得

$$\tilde{B}_{0z}(\tilde{r}) = [3.6\beta_a\tilde{r}^3 - (5.4\beta_a + 2)\tilde{r}^2 + \tilde{B}_{0z}^2(1) + 1.8\beta_a + 2]^{\frac{1}{2}} \quad (2)$$

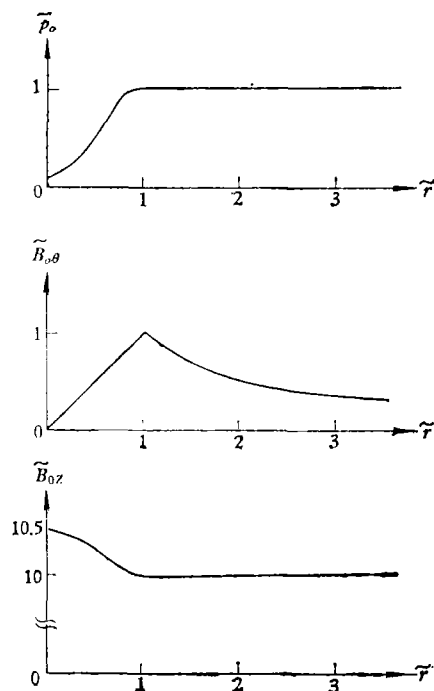


图1 平衡态时, 未扰的压强  $\tilde{p}_0$ , 角向磁场强度  $\tilde{B}_{0\theta}$  及纵向磁场强度  $\tilde{B}_{0z}$  随半径  $\tilde{r}$  的分布

式中  $\tilde{B}_{0z}(1)$  是在柱边缘处 ( $\tilde{r}=1$ ), 平衡磁场的轴向分量与角向分量的比值, 它与  $\beta_a$  一起, 共同表征平衡态的特征.

对于固定边界模型,  $\tilde{r}=1$  处是理想导电的固体壁. 对于自由边界模型, 从  $\tilde{r}=1$  一直到无限远处均是压强很小的真空区, 在真空区 ( $\tilde{r}>1$ ) 中电流为零, 其平衡位形如图 1 所示.

### 三、线性化的运动方程及其求解

由于未扰解在圆柱坐标  $(r, \theta, z)$  中只是  $r$  的函数, 且不随时间  $t$  而变化, 在作简正模分析时, 就可以假定扰动解对  $\theta, z, t$  的依存关系为  $\exp[i(m\theta + kz + \omega t)]$ , 于是在磁环内 (即  $\tilde{r} \leq 1$ ), 线性化的运动方程可以简化为关于扰动位移的径向分量  $\xi_r$  的一个二阶线性常微分方程, 其无量纲形式为<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned}
 L(\tilde{\eta}) = & \frac{d}{d\tilde{r}} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \cdot \frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{r}} \cdot \frac{\Omega^2 - \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( m + \tilde{k} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2}{\tilde{N}} \right. \\
 & \cdot \left[ \Omega^2 (\gamma \beta_a \tilde{p}_0 + \tilde{B}_0^2) - \gamma \beta_a \tilde{p}_0 \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( m + \tilde{k} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2 \right] \Big\} \\
 & + \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{r}} \left\{ \Omega^2 - \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( m + \tilde{k} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2 - 2B_{0\theta} \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \frac{\tilde{B}_{0\theta}}{\tilde{r}} \right) \right. \\
 & \left. - \frac{4\tilde{k}^2 \cdot \tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( \frac{\Omega^2 \tilde{B}_0^2 - \gamma \beta_a \tilde{p}_0 \cdot \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \cdot \left( m + \tilde{k} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2}{\tilde{N}} \right) \right. \\
 & \left. + \tilde{r} \frac{d}{d\tilde{r}} \left[ \frac{2\tilde{k} \cdot \tilde{B}_{0\theta}}{\tilde{r}^2} \left( \frac{m}{\tilde{r}} \tilde{B}_{0z} - \tilde{k} \cdot \tilde{B}_{0\theta} \right) \right. \right. \\
 & \left. \left. \cdot \frac{\Omega^2 (\gamma \beta_a \tilde{p}_0 + \tilde{B}_0^2) - \gamma \beta_a \tilde{p}_0 \cdot \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \cdot \left( m + \tilde{k} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2}{\tilde{N}} \right] \right\} = 0 \quad (3)^*
 \end{aligned}$$

式中  $\tilde{r} = r/a$ ,  $\tilde{\xi}_r = \xi_r/a$ ,  $\tilde{\eta} = \tilde{r} \cdot \tilde{\xi}_r$ ,  $\tilde{p}_0 = p_0/p_a$ ,  $\tilde{k} = k \cdot a$ ,  $\Omega^2 = \omega^2 \cdot a^2 / (B_a^2 / \mu \cdot \rho_0)$ ,  $\tilde{B}_0^2 = (B_{0\theta}^2 + B_{0z}^2) / B_a^2$ ,  $\tilde{B}_{0z} = B_{0z} / B_a$ ,  $\gamma$  为比热比,

$$\tilde{N} = \Omega^4 - \left( \frac{m^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{k}^2 \right) (\gamma \beta_a \tilde{p}_0 + \tilde{B}_0^2) \Omega^2 + \gamma \beta_a \tilde{p}_0 \left( \frac{m^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{k}^2 \right) \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( m + \tilde{k} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2$$

由于沿  $\theta$  方向具有周期性,  $m$  应为整数,  $k$  为实数. 由于算子的自伴性, 本征值  $\Omega^2$  只可能是实数.

边界条件的提法是:

\* (3) 式与文献 [16] 中的 (4-8) 式略有不同: 一、凡是 (4-8) 式中出现  $\tilde{p}_0$  的地方, 本文一律多了个因子  $\beta_a$ . 因为本文中  $\tilde{p}_0$  是以  $r=a$  处的压强  $p_a$  来无量纲化的, 而 [16] 是以  $B_a^2/\mu$  来无量纲化的. 二、托卡马克中的惯用参数是  $nq$ , 故 (4-8) 式中写为  $(m+nq)$  的形式; 本文则恢复最一般的形式, 把  $(m+nq)$  换写为  $(m + \tilde{k} \cdot \tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z} / \tilde{B}_{0\theta})$ .

对固定边界模型<sup>[7,8]</sup>——在  $\tilde{r} = 0$  及  $\tilde{r} = 1$  处  $\tilde{\eta} = 0$  (4)

对自由边界模型——因为  $\beta \ll 1$ , 就仿照 Silen<sup>[11]</sup> 设  $\beta = 0$ , 于是磁环的边缘 ( $\tilde{r} = 1$ ) 就变成了等离子体与真空的界面. 在界面 ( $\tilde{r} = 1$ ) 上, 边界条件由文献 [16] 中的 (4—10) 式给出,

$$\left. \frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = \left[ \frac{m \cdot u}{(\mathcal{Q}^2 - u^2)} \cdot (\chi \cdot u - 2) \cdot \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{r}} \right] \Big|_{\tilde{r}=1}.$$

其中  $u = m + \tilde{\kappa} \cdot 1 \cdot \tilde{B}_{0z}(1) / \tilde{B}_{0\theta}(1) = m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z}(1)$ ,  $\chi = [1 + (a/b)^{2m}] / [1 - (a/b)^{2m}]$ ,  $b$  在文献 [16] 中代表围在真空区外缘的理想导体壁半径. 在本文中令  $b \rightarrow \infty$  (相当于没有理想导体壁的情况), 故  $\chi$  取为 1. 于是上式就成为

$$\left. \frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{r}} \right|_{\tilde{r}=1} = \frac{m \cdot (m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z}(1))}{\mathcal{Q}^2 - (m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z}(1))^2} \cdot (m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z}(1) - 2) \cdot \tilde{\eta} \Big|_{\tilde{r}=1}, \quad (5)$$

而在  $\tilde{r} = 0$  处,  $\tilde{\eta} = 0$ . (6)

于是求不稳定性发展率的问题就归结为在齐次边界条件 (4) 下 (对自由边界模型, 则是在 (5), (6) 的条件下), 求解二阶线性常微分方程 (3) 的本征值问题 (求  $\mathcal{Q}^2$ ). 倘把 (3) 式中的  $\mathcal{Q}^2$  换成零, 即得边缘稳定性方程, 它虽形式上简单, 却有奇异性. 对  $\mathcal{Q}^2 > 0$ , (3) 式也会出现奇点. 但在  $\mathcal{Q}^2 < 0$  的一侧, 方程 (3) 却是非奇异的, 且可证明<sup>[10]</sup>, 本征函数  $\tilde{\eta}$  的零点的个数随  $\mathcal{Q}^2$  的增加而单调增加, 即谱具有 Sturm 性质, 因而就可以在相应的边界条件下, 用打靶格式 (见附录) 来求 (3) 式的代数最小的本征值  $\mathcal{Q}^2$ , 即求相应参数下不稳定性的最大发展率.

若略去  $\tilde{N}$  表达式中的  $\mathcal{Q}^4$  项, 则 (3) 式可简化为

$$\begin{aligned} L(\tilde{\eta}) = & \frac{d}{d\tilde{r}} \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} \cdot \frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{r}} \cdot \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( m + \tilde{\kappa} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2 - \mathcal{Q}^2 \right\} \\ & + \frac{\tilde{\eta}}{\tilde{r}} \cdot \left\{ \mathcal{Q}^2 - \frac{\tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \left( m + \tilde{\kappa} \cdot \frac{\tilde{r} \cdot \tilde{B}_{0z}}{\tilde{B}_{0\theta}} \right)^2 \right. \\ & \left. - 2\tilde{B}_{0\theta} \cdot \frac{d}{d\tilde{r}} \left( \frac{\tilde{B}_{0\theta}}{\tilde{r}} \right) + \frac{4\tilde{\kappa}^2 \cdot \tilde{B}_{0\theta}^2}{\tilde{r}^2} \cdot \left( \frac{1}{\frac{m^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{\kappa}^2} \right) \right. \\ & \left. + \tilde{r} \cdot \frac{d}{d\tilde{r}} \left[ \frac{2\tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0\theta}}{\tilde{r}^2} \left( \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0\theta} - \frac{m}{\tilde{r}} \tilde{B}_{0z} \right) \cdot \frac{1}{\frac{m^2}{\tilde{r}^2} + \tilde{\kappa}^2} \right] \right\} = 0, \quad (7) \end{aligned}$$

在轴向电流均布 ( $\tilde{B}_{0\theta} = \tilde{r}$ ) 的假定下, 当只考虑长波扰动 ( $m^2/\tilde{r}^2 \gg \tilde{\kappa}^2$ ) 时, (7) 式还可进一步简化为

$$\frac{d^2\tilde{\eta}}{d\tilde{r}^2} = \tilde{\eta} \cdot \left\{ \frac{m^2}{\tilde{r}^2} + \frac{2\tilde{\kappa} \cdot \frac{d\tilde{B}_{0z}}{d\tilde{r}} \cdot \frac{m}{\tilde{r}} - 8\tilde{\kappa}^2}{(m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z})^2 - \mathcal{Q}^2} \right\}$$

$$-\frac{d\tilde{\eta}}{d\tilde{r}} \cdot \left\{ \frac{1}{\tilde{r}} + \frac{2\tilde{\kappa} \cdot \frac{d\tilde{B}_{0z}}{d\tilde{r}} \cdot (m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z})}{(m + \tilde{\kappa} \cdot \tilde{B}_{0z})^2 - \mathcal{Q}^2} \right\}. \quad (8)$$

本文根据打靶格式的思路,用 Runga-Kutta 法对(8)式在相应的边界条件下,求出代数最小的本征值  $\mathcal{Q}^2$ 。

#### 四、计算结果及讨论

在本文的模型下,平衡态可由三个参数  $p_a$ ,  $\beta_a$  及  $B_{0z}(a)$  完全确定,从它们可构成两个

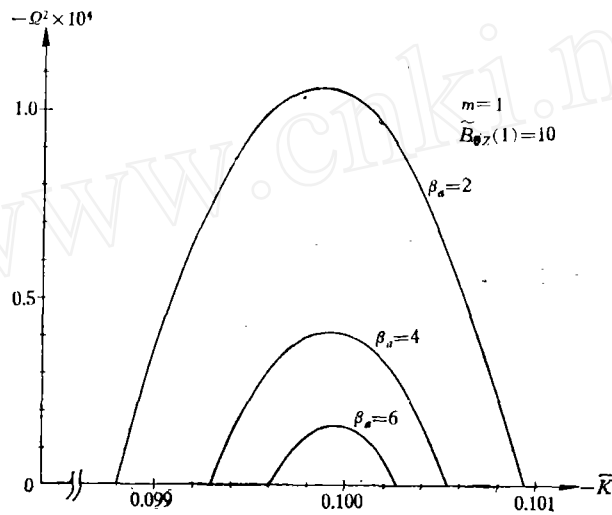


图2 固壁条件下,  $m=1$ ,  $\tilde{B}_{0z}(1)=10$  时,  $\mathcal{Q}^2$  随  $\beta_a$  及  $\tilde{\kappa}$  而变化的情况

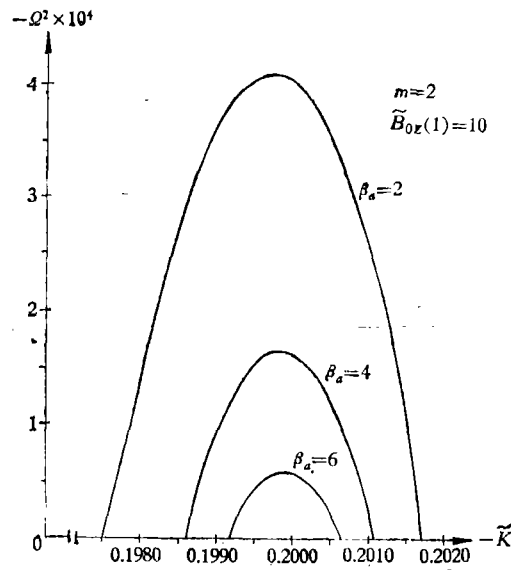


图3 固壁条件下,  $m=2$ ,  $\tilde{B}_{0z}(1)=10$  时,  $\mathcal{Q}^2$  随  $\beta_a$  及  $\tilde{\kappa}$  而变化的情况

独立的无量纲参数  $\beta_a = \rho_a / (B_a^2 / \mu)$ ,  $\tilde{B}_{0z}(1) = B_{0z}(a) / B_a$ . 扰动的模式则由纵向模数  $\tilde{k}$  及角向模数  $m$  来表征.

固定边界的计算结果表示在图 2, 3 上; 自由边界的计算结果表示在图 4, 5 上.

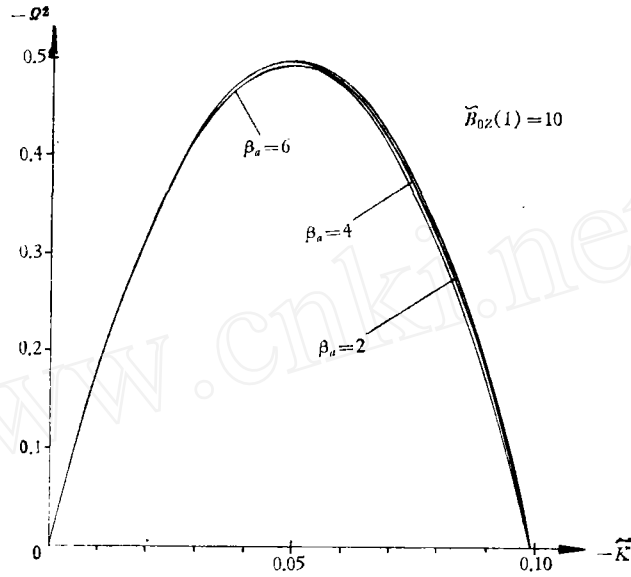


图 4 自由边界情况,  $m = 1$ ,  $\tilde{B}_{0z}(1) = 10$  时,  $\Omega^2$  随  $\beta_a$  及  $\tilde{k}$  而变化的情况

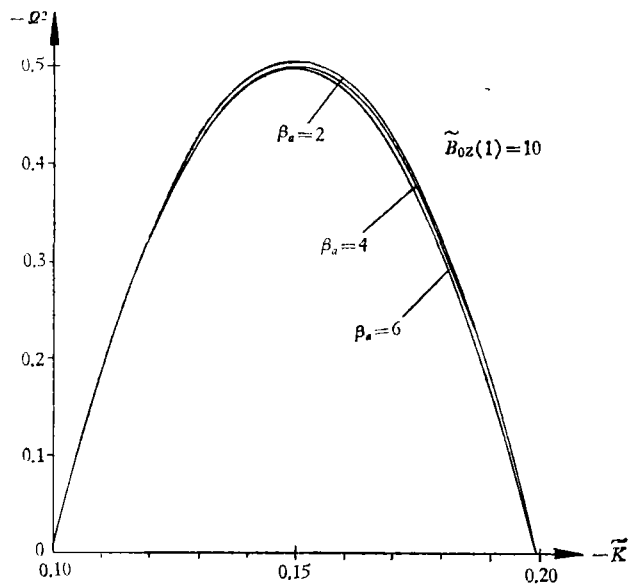


图 5 自由边界情况,  $m = 2$ ,  $\tilde{B}_{0z}(1) = 10$  时,  $\Omega^2$  随  $\beta_a$  及  $\tilde{k}$  而变化的情况

对比图 2 与图 4 (或图 3 与图 5), 不难看出, 无论就发生不稳定的参数范围还是就不稳定性的最大发展率而言, 固壁情况都比自由边界情况要稳定, 而磁环内的压力分布对这

两种情况则都是一样的 ( $\frac{dp}{dr} > 0$ )。可见文献 [2, 4, 5] 中认为的, 由磁环内  $\frac{dp}{dr} > 0$  而带来的致稳效应比起他们无形中采用的  $\xi_r|_{r=a} = 0$  这一边界条件的致稳效应来说是弱多了。但日冕区情况同实验室情况差别很大, 对日冕磁环采用固壁条件是否合适? 又是什么物理机制保证了这一边界条件的实现? 这些还都值得研究。

文献 [4—6, 11] 都只限于研究  $m = 1$  的情况, 即认为这是最不稳定的, [11] 还引用了 Newcomb<sup>[7]</sup> 的定理为依据。文献 [7] 中 240 页定理 1 是这样的: 当 (也只当) 直线箍缩对  $m = 1$ ,  $-\infty < k < \infty$  及  $m = 0$ ,  $k \rightarrow 0$  是稳定的, 则它就对  $m, k$  的其它所有值稳定。问题是若对  $m = 1$  直线箍缩是不稳定的, 则由该定理只能推出它就不对  $m, k$  的其它所有值稳定的结论。至于这时是否仍是  $m = 1$  的情况最严重、最不稳定呢? 那就未必了<sup>[12]</sup>。在我们考虑的模型下, 比较图 2 与图 3, 可见无论就不稳定的参数范围或是最大发展率来说,  $m = 1$  都不是最严重的。因此, 在已发现  $m = 1$  是不稳定的时候, 还应校验  $m > 1$  的模式, 只限于讨论  $m = 1$  是不够的 (当然, 只要 Suydam 条件得到满足, 当  $m \rightarrow \infty$  时, 内部模还是稳定的)。由图 4 与图 5 看, 对自由边界情况, 也不能只限于讨论  $m = 1$  的模。

## 五、结 语

在太阳日冕磁环稳定性的研究中, 在磁环边缘外边界条件的不同提法对稳定性能影响至大, 应该怎么提才较合适, 还需要进一步研究讨论。

当已发现  $m = 1$  的模式不稳定时, 只考虑  $m = 1$  的情况是不够的。从最大发展率或不稳定的参数区间来看, 有时  $m > 1$  的模式可能更不稳定。(但只要 Suydam 条件能满足, 当  $m$  大到一定程度时, 不稳定性又会减弱。)

在完成本文的过程中始终得到徐复同志的热情鼓励和帮助并作过多次有益的讨论, 谨致谢意。

## 附 录

所谓打靶格式就是先把齐次的边值条件用相应的初值条件来代替, 然后在  $(-\infty, 0)$  之间任意猜一个  $\varrho^2$  的值代入 (8) 式 (或 (3) 式), 再对该式从给出初值条件的一端向另一端作数值积分, 得出另一端的  $\tilde{\eta}$  值。由于  $\varrho^2$  是猜的, 当然未必恰好就是该问题的本征值, 故如此得出的另一端的  $\tilde{\eta}$  值通常不满足边界条件。倘若按初值条件积出来的  $\tilde{\eta}$  在区间  $(0, 1)$  内至少有一处等于零, 根据 Sturm 性质, 可见代数最小的 (即负数中绝对值最大的) 那个本征值 (它对应于不稳定性的最大发展率) 应比刚才猜的那个  $\varrho^2$  值为小; 反之, 应比猜的  $\varrho^2$  值为大。如此试算, 恰似打靶修正一样, 直至按初值条件积出的  $\tilde{\eta}$  恰好在 (也只在) 另一端等于零为止。这时对应的  $\varrho^2$  值, 即是代数最小的那个本征值, 也就是不稳定性的最大发展率。

所谓“相应的初值条件”, 对固定边界模型来说, 即是在  $r = 1$  处,  $\tilde{\eta} = 0$ , 而  $d\tilde{\eta}/dr = -1$ 。对自由边界模型是在  $r = 1$  处,  $\tilde{\eta} = 1$  并且有 (5) 式成立。

这一算法对固定边界问题是定型的 (见文献 [14] 中第六章第三节), 但对存在真空区的情况, 则未见论及。本文采用了文献 [16] 中把真空区与等离子体区域分开求解的办法, 从而把打靶格式推广用到

了自由边界情况。为了检验这一算法的可靠性,把它同用伽辽金法算得的结果<sup>[16]</sup>与用有限元法算得的结果<sup>[13]</sup>作比较,符合良好。

今以  $m = 2$ ,  $\bar{k} = 0.2$ ,  $s = 20$ ,  $a/b = 1/2$  (故  $\chi = 17/15$ ) 的情况为例,如表:

$\alpha$	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8
$\Omega^2_{\text{伽}}(\text{参 [16]})$	0	-0.16	-0.28	-0.36	-0.39	-0.38	-0.33	-0.24	-0.1
$\Omega^2_{\text{打靶}}$	-0.02	-0.18	-0.30	-0.37	-0.41	-0.40	-0.35	-0.25	-0.11

由上表看,  $\Omega^2_{\text{打靶}}$  一般都比  $\Omega^2_{\text{伽}}$  略小一些,这是合理的。因为文献 [16] 中用伽辽金法求得值只是从事先给定范围的、极其有限的试验函数族中求得的本征值的近似最小值,它总比真正最小值要大些。而(3)式却对应着相应变分问题的欧拉-拉格朗日方程,虽然打靶格式也还是用数值方法求得近似解,但步长和精度是可以随时改善的,所以由之求得的本征值应比  $\Omega^2_{\text{伽}}$  要更接近于准确的本征值,即应比  $\Omega^2_{\text{伽}}$  要小一些。

### 参 考 文 献

- [1] Foukal, P. V., *Astrophys. J.*, **210**, 575, 1976.
- [2] Chiuderi, C., Giachetti, R. and Van Hoven, G., *Solar Phys.*, **54**, 107, 1977.
- [3] Dulk, G. A. and Mclean, D. J., *Solar Phys.*, **57**, 279, 1978.
- [4] Van Hoven, G., Chiuderi, C. and Giachetti, R., *Astrophys. J.* **213**, 869, 1977.
- [5] Giachetti, R., Van Hoven, G. and Chiuderi, C., *Solar Phys.*, **55**, 371, 1977.
- [6] Hood, A. W. and Priest, E. R., *Solar Phys.*, **64**, 303, 1979.
- [7] Newcomb, W. A., *Annals of Phys.*, **10**, 232, 1960.
- [8] Goedbloed, J. P., *Physica*, **53**, 501, 1971.
- [9] Sakanaka, P. H. and Goedbloed, J. P., *Phys. Fluids*, **17**, 919, 1974.
- [10] Goedbloed, J. P. and Sakanaka, P. H., *Phys. Fluids*, **17**, 908, 1974.
- [11] Sillen, R. M. J. and Kattenberg, A., *Solar Phys.*, **67**, 47, 1980.
- [12] Goedbloed, J. P. and Hagebeuk, H. J. L., *Phys. Fluids*, **15**, 1090, 1972.
- [13] Takeda, T., Shimomura, Y., Ohta, M. and Yoshikawa, M., *Phys. Fluids*, **15**, 2193, 1972.
- [14] Bateman, G., *MHD Instabilities*, The MIT Press, 1978, p. 112.
- [15] Cheng, C. C., *Solar Phys.*, **65**, 347, 1980.
- [16] 徐复, 陈乐山, 力学学报特刊, 1981.



## ON THE STABILITY OF CORONAL MAGNETIC LOOPS

Chen Le-shan

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica*)

### Abstract

In this paper, it is pointed out that in most of the previous works about the stability of coronal magnetic loops, a rigid boundary condition is used (although sometimes without being mentioned) at the edge of a loop, which has a great influence on the result too large to be ignored, even if the pressure gradient is favourable. On the other hand, corona conditions are quite different from that in laboratories. Is it proper to use the rigid boundary condition at the edge of a loop? And what is the mechanism that makes the condition realized? They are still the questions open to further discussions.

Besides, if  $m = 1$  is stable, according to Newcomb's theorem, it is unnecessary to consider the modes of  $m > 1$ ; but if it is not stable, it will not be enough to examine  $m = 1$  only. And this article shows that, sometimes, the modes of  $m > 1$  may be more instable.

Instead of using a marginal stability analysis such as many authors did, the MHD momentum equation of compressible fluid is used in this paper, so that both the instability region and the growth rate of instability can be obtained at the same time. In addition, the difficulties associated with the singularity in marginal stability analysis could then be avoided.