

研究简报

一类平板组合结构的杂交有限元解法*

张双寅

(中国科学院力学研究所)

1. 引言 由几块平板组成的空间结构在工程上得到广泛应用. 其动力、静力问题是很难用经典材料力学和弹性力学方法解决的. 有限元方法是解决这类问题的强有力手段.

各国力学工作者已经发展了很多解决板壳问题的有限元素法, Zienkiewicz 等^{[1][2]}提出的位移法有限元公式是最常用的, 这个元素的位移函数在边界上一阶法向导数不连续是它的最大缺点, 另外一些人提出的位移法边界协调元素公式太复杂, 而不为人们所喜欢. Severn 和 Taylor^[3]运用卞学璜首创的杂交元技术^[5]导出了假设应力分布的板弯元刚度矩阵公式, 并在平板应力问题和振动问题上得到应用^{[3]、[4]}; 但是运用基于应力分布假设的杂交元素求解平板组合空间结构的工作却没有见过. 本文就是针对一类平板组合结构提出了杂交法空间有限元模型.

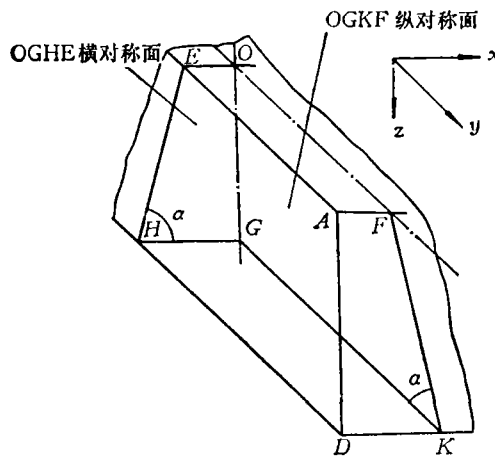


图1 五面体空间结构(1/4)

这个元素的刚度矩阵是由平面应力刚度矩阵与平板弯曲刚度矩阵组合而成. 平面刚度矩阵为等应变元素矩阵, 而平板弯曲刚度矩阵则为杂交元刚度矩阵. 推导杂交法元素刚度矩阵的基本思想为在元素内部假设应力分布, 并使应力分布函数满足全部平衡条件; 在单元边界上假设用节点广义位移表达的位移分布函数, 使它满足位移和法向斜率的连续性条件. 所假设的单元内应力分布函数与边界上位移分布函数的一致性通过最小余能原理获得, 这实质上是通过拉格朗日乘子法得到放松. 由于这个元素克服了常规位移法元素在边界上法向导数不连续的缺点, 因而有更好的收敛性, 并且在解应力问题中优点尤为明显.

上法向导数不连续的缺点, 因而有更好的收敛性, 并且在解应力问题中优点尤为明显.

* 1979年10月4日收到.

本文用上述有限元模型计算了如图1所示的五块平板组成的空间结构的自由振动问题和应力问题。因为四块侧板是梯形板，故采用了直角三角形单元。利用结构的对称性，只计算了四分之一。用粗细两种网格的计算结果证明所提出的有限元模型收敛性很好。

2. 单元刚度矩阵、质量矩阵和广义载荷矩阵

1) 刚度矩阵由下式给出

$$[K] = \begin{bmatrix} [K_{rs}^a] & [K_{rs}^b] & 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中 $[K_{rs}^a]$ 是平面刚度矩阵， $[K_{rs}^b]$ 为板弯元刚度矩阵，下角标 $r, s = 1, 2, 3$ 。

与刚度矩阵 $[K]$ 相应的广义节点位移列阵为

$$\{q_i\} = [u, v, w, \theta_x, \theta_y, \theta_z]^T \quad (2)$$

这里 $i = 1, 2, 3$ 。

2) 杂交法板弯元矩阵的推导：假设应力分布的杂交泛函由修正的余能原理给出^[6]。

$$\Pi_{mc}(\underline{\sigma}, \underline{u}) = \sum_n \left\{ \frac{1}{2} \int_{V_n} \underline{\sigma}^T \underline{s} \underline{\sigma} dv - \oint_{\partial V_n} \underline{T}^T \underline{u} ds + \int_{S_{\sigma n}} \underline{\bar{T}}^T \underline{u} ds \right\} \quad (3)$$

式中 \underline{s} 为弹性矩阵； $\underline{\sigma}$ 为应力向量，由图2给出；

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x/Z \\ \sigma_y/Z \\ \tau_{xy}/Z \\ \tau_{xz}/Z' \\ \tau_{yz}/Z' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-xyb}{a} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-xya}{b} & 1 & x & y & x^2 & y^2 \\ 0 & 1/a & 0 & x/a & y/a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-xa}{b^2} & 0 & 0 & 1/b & 0 & \frac{2y}{b} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-yb}{a^2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/b & 0 & x/b & y/b & 0 & 1/a & 0 & \frac{2x}{a} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{16} \\ \beta_{17} \end{bmatrix}$$

其中 $x = \frac{x}{a}$, $y = \frac{y}{b}$, $z = \frac{8z}{t}$, $z' = (1 - \frac{4z^2}{t^2})t$, t 厚度。用矩阵符号表示： $\{\sigma\} = [P]\{\beta\}$ 。

图2 应力分布函数

\underline{u} 代表单元边界上的位移分布向量，由图3给出。

\underline{T} 代表边界上广义力向量。

泛函(3)中的第一个积分代表应变能。把图2所示的应力分布函数代入这个积分，利用矩阵符号

$$[H] = \int_{V_n} [P]^T [S] [P] dv \quad (4)$$

应变能表达式为

$$U = \frac{1}{2} [\beta]^T [H] [\beta] \quad (5)$$

泛函中的第二个积分代表单元边界广义力向量 \underline{T} 在边界位移上作的功，边界广义力

$$\begin{pmatrix} (W)_{AB} \\ (\theta_x)_{AB} \\ (\theta_y)_{AB} \\ (W)_{BC} \\ (\theta_x)_{BC} \\ (\theta_y)_{BC} \\ (W)_{AC} \\ (\theta_x)_{AC} \\ (\theta_y)_{AC} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-3x^2+2x^3 & 0 & a(-x+2x^2-x^3) & 3x^2-2x^3 \\ 0 & 1-x & 0 & 0 \\ \frac{6}{a}(x-x^2) & 0 & 1-4x+3x^2 & \frac{6}{a}(-x+x^2) \\ 0 & 0 & 0 & (1-3y^2+2y^3)/s \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{b}(6y-6y^2) \\ 1-3y^2+2y^3 & b(-y+2y^2-y^3) & 0 & 0 \\ \frac{6}{b}(y-y^2) & 1-4y+3y^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-y & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x \\ 0 \\ \frac{b}{s}(-y+2y^2-y^3) \\ \frac{c}{s}(1-y) \\ -1+4y-3y^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x^2-x^3) \\ 0 \\ -2x+3x^2 \\ \frac{bc}{s^2}(y+2y^2+y^3) \\ 1-y \\ \frac{c}{s}(1-4y+3y^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (3y^2-2y^3)/s \\ 0 \\ \frac{6}{b}(y-y^2) \\ 3y^2-2y^3 \\ \frac{6}{b}(-y+y^2) \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{b}{s}(y^2-y^3) \\ cy/s \\ 2y-3y^2 \\ b(y^2-y^3) \\ -2y+3y^2 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{bc}{s^2}(-y^2+y^3) \\ y \\ \frac{c}{s}(-2y+3y^2) \\ 0 \\ 0 \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w_1 \\ \theta_{x_1} \\ \theta_{y_1} \\ w_2 \\ \theta_{x_2} \\ \theta_{y_2} \\ w_3 \\ \theta_{x_3} \\ \theta_{y_3} \end{pmatrix}$$

其中 $c = \cos\theta$ $s = \sin\theta$ 矩阵表示式 $\{u\} = [L]\{q\}$

图 3 边界位移分布函数

向量 \tilde{T} 可以通过对应力分布函数进行积分，对于斜边 BC (参看图 4) 还需进行坐标转换得到，写成矩阵形式为

$$[T] = [R]\{\beta\} \tag{6}$$

把式(6)与图 3 表达的边界位移分布函数 \tilde{u} 代入泛函的第二个积分，利用符号

$$[N] = \oint [R]^T [L] ds \tag{7}$$

边界力所作功为

$$W = \{\beta\}^T [N]\{q\} \tag{8}$$

泛函中的第三个积分，代表给定外力的边界上外力所作之功。

将式(5)与(8)代入式(3),得

$$\Pi_{mc} = \frac{1}{2} \{\beta\}^T [H] \{\beta\} - \{\beta\}^T [N] \{q\} \quad (9)$$

由最小余能原理 $\frac{\partial \Pi_{mc}}{\partial \beta_i} = 0$, 得到

$$\{\beta\} = [H]^{-1} [N] \{q\} \quad (10)$$

由式(5)与(10)得

$$U = \frac{1}{2} \{q\}^T [K] \{q\} \quad (11)$$

$$\text{刚度矩阵} \quad [K] = [N]^T [H]^{-1} [N] \quad (12)$$

$$\text{应力向量} \quad \{\sigma\} = [B] \{q\}$$

$$\text{式中} \quad [B] = [P] [H]^{-1} [N] \quad (13)$$

为应力矩阵.

由应力分布函数与边界位移分布函数出发, 经过冗繁的手工推导求得 $[H]$ 矩阵与 $[N]$ 矩阵的表达式. 刚度矩阵 $[K]$ 与应力矩阵 $[B]$ 要通过电子计算机完成.

3) 质量矩阵与广义载荷矩阵: 推导一致质量矩阵与一致广义载荷矩阵必须知道单元内位移分布函数. 但是杂交法单元内部假设应力分布, 位移分布函数是不知道的. 这是杂交法的不足之处. 当然可以采用反比例律求得集中质量矩阵或集中载荷矩阵, 这显然没有一致矩阵好. 文献[4]提出如下近似位移函数:

$$W = A_1 + A_2 x + A_3 y + A_4 x^2 + A_5 y^2 + A_6 x^3 + A_7 x^2 y + A_8 x y^2 + A_9 y^3 \quad (14)$$

这个位移函数没有“ xy ”项, 可能会有人提出疑义. 是的, 用这个表达式推导位移法刚度矩阵肯定是不行的, 因为它不满足 Zienkiewicz 提出的“常应变准则”, 导出的刚度矩阵不收敛. 但是, 比较式(14)与图3中的边界位移函数表达式, 可以看出二者有一定的一致性. 所以可以用它来推导一致质量矩阵或一致载荷矩阵. 本文的结果和文献[4]的结果都证明这样作是对的.

利用9个节点广义位移条件, 可以由式(14)得

$$W = [F] \{q\} \quad (15)$$

从(15)出发, 质量矩阵与广义载荷矩阵由下列式子给出

$$\text{质量矩阵} \quad [M] = \int_{r_n} [F]^T \rho [F] dV \quad (16)$$

$$\text{自重载荷矩阵} \quad \{R\} = \iint [F]^T \{\gamma\} t dx dy \quad (17)$$

$$\text{温度载荷矩阵} \quad \{R\}_T = \iint [B]^T [D]_b \{x_0\} t dx dy \quad (18)$$

$$\text{初应变载荷矩阵} \quad \{R\}_0 = [B]^T [D]_p \{\epsilon_0\} t \frac{ab}{2} \quad (19)$$

本文对如图 4 所示的两种三角形姿态，推导了刚度矩阵，质量矩阵和载荷矩阵。

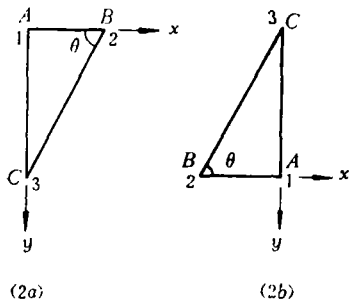


图 4 两种三角形姿态

文献[3]较详细地介绍了推导杂交法单元刚度矩阵的方法。根据空间问题有限元的特点，本文的公式与文献[3]有如下三点不同：

a) 节点广义位移的量纲与排列顺序不同，文献[3]为 $[a\theta_x, b\theta_y, w]^T$ ，而本文为 $[w, \theta_x, \theta_y]^T$ ；

b) 转角的表达式不同，文献[3]为 $\theta_x = -\frac{\partial w}{\partial y}$ ，而本文为 $\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y}$ ；

c) 文献[3]只给出了一种三角形姿态的单元刚度矩阵，本文对图 4 所示两种姿态的公式都进行了推导。

3. 算例与讨论 利用上述有限元模型，计算了图 1 所示的五面体结构的自由振动问题和应力问题。取上盖板与总体坐标面 xy 相重合，把侧板展平得到图 5 与图 6 所示的图形，图 5 是粗网格图，图 6 是细网格图。OEH 与 OFK 分别为横对称面与纵对称面，利用对称与反对称条件，只计算四分之一，对称与反对称条件由表 1 给出。

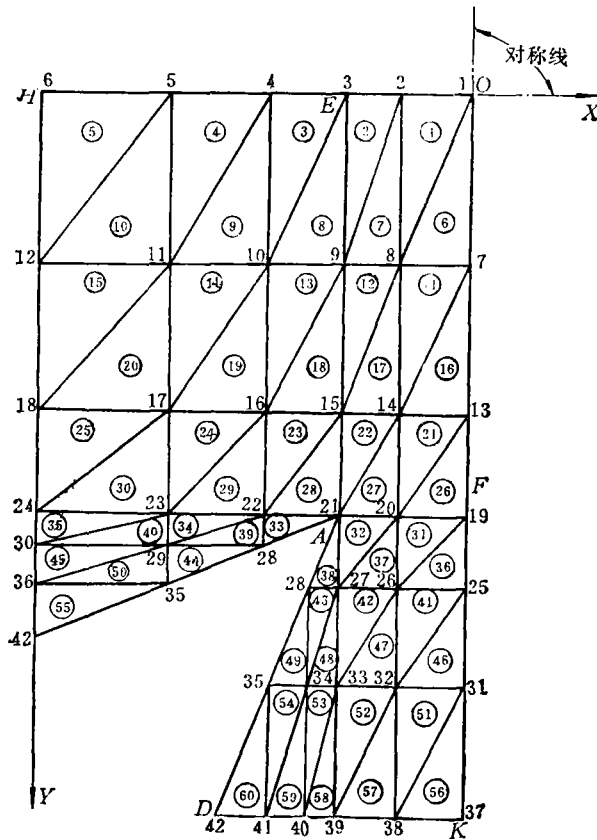


图 5 粗网格分割

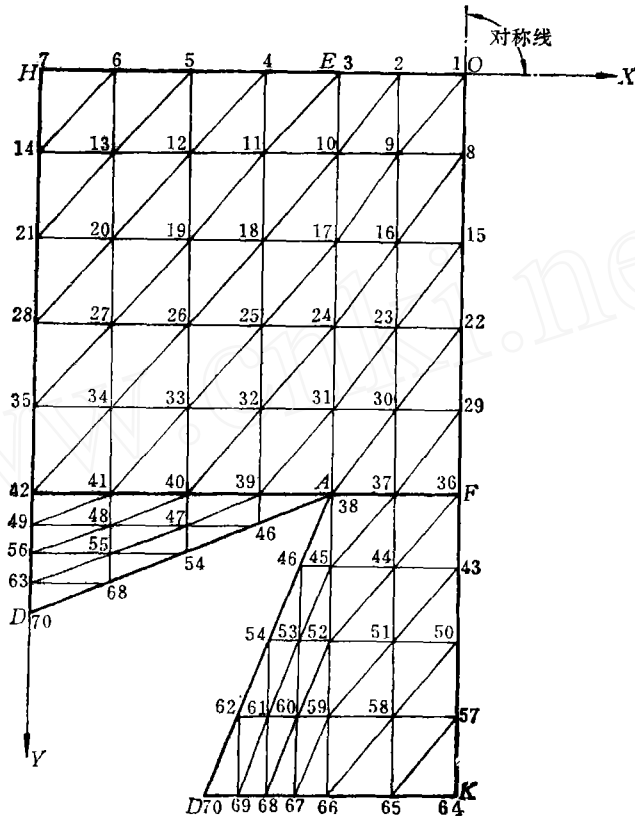


图 6 细网格分割(70节点108单元)

表 1

对称于 OFK	$o \ v \ w \ \theta_x \ o \ o$
反对称于 OFK	$u \ o \ o \ o \ \theta_y \ \theta_z$
对称于 OEH	$u \ o \ w \ o \ \theta_y \ o$
反对称于 OEH	$o \ v \ o \ \theta_x \ o \ \theta_z$

1) 自振频率与振型: 总体刚度矩阵与总体质量矩阵建立后, 求自振频率与振型的公式为

$$[K]\{q\} = \omega^2[M]\{q\} \quad (20)$$

由于 $[K]$ 与 $[M]$ 均为变带宽存储, 对 $[K]$ 求逆和求 $[M]$ 与 $[K]^{-1}$ 的乘积的运算非常困难. 作者提出“广义”迭代法可以用来求振型与频率. 其运算步骤如下:

(a) 任取一标准化位移向量 $\{q^0\}$ 代入式(20)右端计算 $[M]\{q^0\} = \{q_1^1\}$, 这是一个列阵.

(b) 用直接法解式 (20)，求得一次位移向量 $\{q^1\}$ 。

(c) 将 $\{q^1\}$ 标准化，再代入式 (20) 的右端，然后用直接法解出二次位移向量 $\{q^2\}$ 。重复上述运算，每迭代一次将结果与上次结果进行一次比较，若 $\{q^n\}$ 与 $\{q^{n+1}\}$ 之间相对误差小于规定的允许误差时 (例如取相对误差为 10^{-4}) 就认为收敛了。

表 2 列出了两种边界条件，四种振型，粗细两种网格的计算结果。

表 2 自振频率计算值

频率	网格振型	粗网格 60 单元 42 节点				细网格 108 单元 70 节点
		对称于 x 轴 反对称于 y 轴	对称于 y 轴 反对称于 x 轴	双对称型	双反对称型	对称于 x 轴 反对称于 y 轴
简支	f (赫)	252.6	416.3	291.7	385.0	/
固支	f (赫)	319.8	500.9	405.6	513.8	311.5

两种网格的计算值差别很小，说明收敛性很好。

图 7 绘出了横对称面 OEH 的振型曲线。图 7(a) 为反对称振型；图 7(b) 为对称振型，这两个图的右边是固支振型；而左边是简支振型。

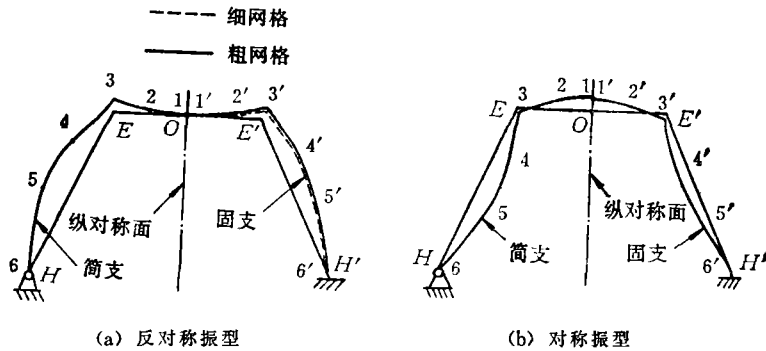


图 7 横对称面的振型

2) 自重应力与挠度曲线：本文的有限元应力矩阵可以算出 8 个节点应力，3 个平面应力分量，5 个弯曲应力分量。表 3 列出了部分节点的弯曲正应力和薄膜应力的计算结果。图 8 绘出了沿底边薄膜应力分布。图 9 绘出了横对称面 OEH 上的挠度曲线。

表 3a 沿横对称线 OEH 与棱线 EA 弯曲应力分布

固支	节点	1	2	3	4	5	6	9	15	21
	σ_x	0.5132	0.1131	-0.6939	0.1257	0.1658	-0.2591	-0.5144	-0.3539	-0.1345
简支	节点	1	2	3	4	5	6	9	15	21
	σ_x	0.4223	0.0175	-0.8113	0.1676	0.4178	0.0560	-0.5990	-0.4272	-0.2054

表 3b 沿底边 HD 薄膜应力

细网格	节点	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
	σ_x	0.2035	0.2020	0.1980	0.1893	0.1741	0.1534	0.1423	0.1321	0.1195	0.1145
粗网格	节点	6	12	18	24	30	36	42			
	σ_x	0.1965	0.1897	0.1693	0.1435	0.1316	0.1226	0.1215			

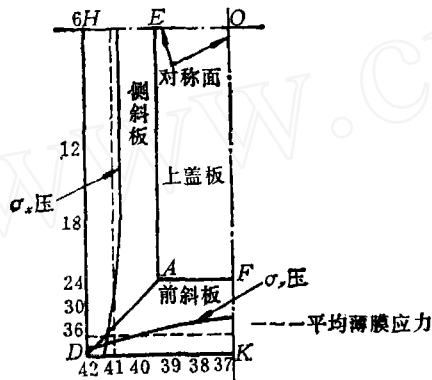


图 8 自重作用下沿底边薄膜应力

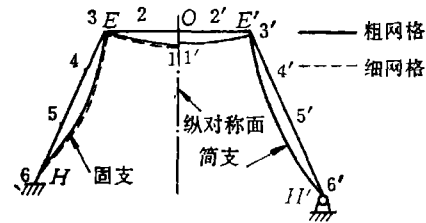


图 9 自重作用下挠度曲线

3) 初应力作用下的变形与应力: 假设上盖板制造偏小, 需在 X 、 Y 两个方向上拉长才能装上, 若预加初应变为 $\epsilon_0 = 0.1 \times 10^{-3}$, 求在这个初应力作用下的结构变形和应力. 表 4 列出了沿上盖板四个稜边的应力分布. 沿上盖板四个稜边的面内位移分布绘于图 10. 有趣的是 E, F 二点位移向里, 而角点 A 的位移却向外.

表 4 初应力作用下上盖板的薄膜应力

应 力 σ_x	节 点	1	2	3	9	15	21
	kg/cm ²	26.72	14.53	5.63	69.5	86.9	103.3
应 力 σ_y	节 点	1	7	13	19	20	21
	kg/cm ²	67.3	79.9	87.7	108.0	83.8	70.5

此外，由表 4 可以看出 A 点与下点处的面内拉伸应力比初始应力 σ_0 ($\sigma_0 = \varepsilon_0 E / (1 - \nu) = 73.93 \text{ kg/cm}^2$) 大得多。

4) 内外温度差引起的弯曲应力：本文计算了固支条件下，因内外存在 5°C 温度差引起的弯曲应力。计算结果列于表 5。由表 5 看出这些计算值与四边固支板因内外温度差引起的弯曲应力非常接近。文献〔7〕给出了固支板的温差应力公式。

$$\sigma = \frac{E\bar{\alpha}\Delta T}{2(1-\nu)} \quad (21)$$

式中 $\bar{\alpha}$ 为材料的热膨胀系数， ΔT 为内外温差。

表 5 固支下温差应力

节 点	1	2	3	4	5	6
应 力	13.125	13.246	13.398	14.526	12.98	14.00

4. 结束语

1) 本文提出的杂交法有限元模型对计算板组合盒形结构的应力问题和振动问题都是有效的。由于它克服了位移法平板弯曲元在边界上位移的法向导数不连续的缺点，所以具有较好的收敛性。在计算应力问题时这个优点更加明显。粗、细两种网格的计算值非常接近，说明了这一点。

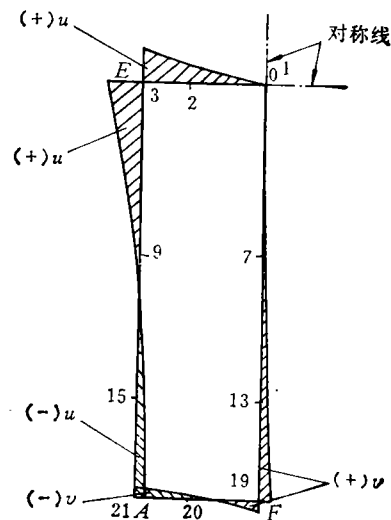
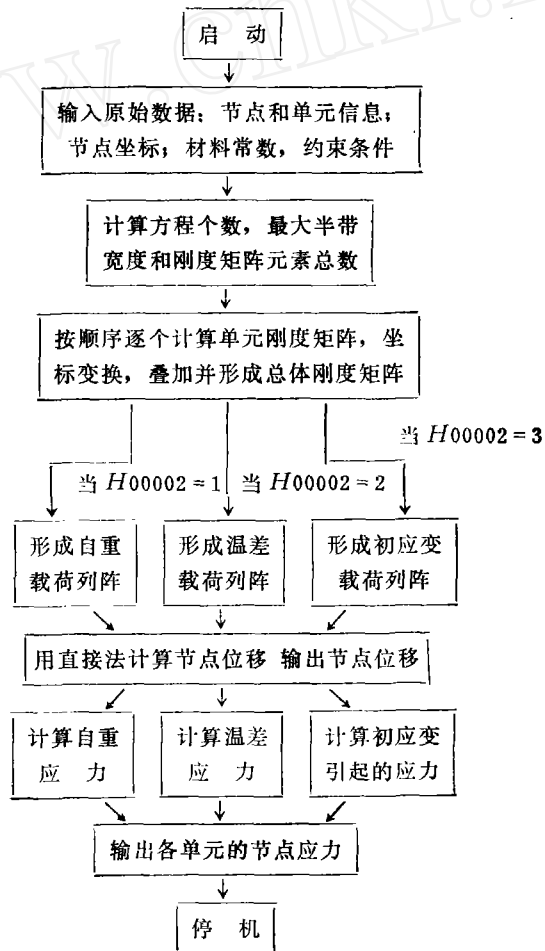


图 10 上盖板在初应力作用下的面内位移

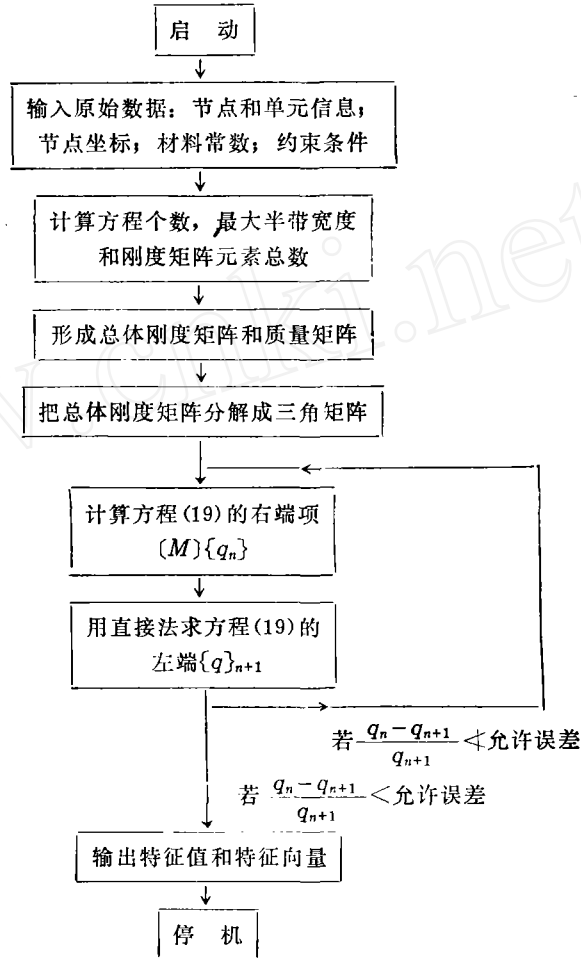
2) 应力计算结果表明，相邻单元对同一节点的应力值的计算结果有差别。我们在计算该节点的应力时，以包围该点的诸单元的张角为权，进行加权平均。这样得到的节点应力值比较合理。为减少相邻单元应力值的不连续性，应尽可能不采用很尖的，细长三角形单元。

3) 本文计算的实例不包括集中外力与集中支反力的情况, 所以较粗的网格就能得到较好的结果. 若遇到有集中载荷或集中支承情况, 需要将网格分细些. 那时可能要用更大的计算机才能完成计算.

附录 1. 应力问题的计算程序方框图



附录 2. 自由振动问题计算程序方框图



附录 3. 计算方程(20)右端项的分程序

$\epsilon P \epsilon \quad Q U I U (M, U_1, A x, A, U);$
 $\epsilon A \epsilon \quad M, U_1, A x, A, U;$
 $\epsilon B \epsilon \quad \epsilon F \epsilon \quad I := 1 \quad \epsilon S \epsilon \quad 1 \quad \epsilon U \epsilon \quad N \quad \epsilon D \epsilon \quad U_1(J) := 0;$
 $\epsilon F \epsilon \quad Q := 1 \quad \epsilon S \epsilon \quad 1 \quad \epsilon U \epsilon \quad N \quad \epsilon D \epsilon$
 $\epsilon B \epsilon \quad \epsilon F \epsilon \quad J := A(Q-1) + Q + 1 - A(Q) \quad \epsilon S \epsilon \quad 1$
 $\epsilon U \epsilon \quad Q \quad \epsilon D \epsilon$
 $U_1(Q) := U_1(Q) + M(A(Q) - Q + J) * U(J);$
 $\epsilon F \epsilon \quad P := 1 \quad \epsilon S \epsilon \quad 1 \quad \epsilon U \epsilon \quad A x(Q) \quad \epsilon D \epsilon$
 $\epsilon I \epsilon \quad A(P+Q) - P \geq A(Q+P-1) + 1$
 $\epsilon T \epsilon \quad U_1(Q) := U_1(Q) + M(A(Q+P) - P) * U(P+Q)$
 $\epsilon E \epsilon \quad \epsilon E \epsilon;$

附录 4. 算例的结构尺寸与材料参数

1. 结构尺寸 $OE = 250\text{mm}$ $OF = 850\text{mm}$
 $OG = 550\text{mm}$ 厚度 $t = 40\text{mm}$
 $\alpha = 65^\circ 33' 20''$
2. 材料常数 $E = 585500 \text{ kg/cm}^2$,
 $\nu = 0.208$, $\gamma = 2.51 \text{ 克重/厘米}^3$
 热胀系数 $\alpha = 71 \times 10^{-7}/\text{度 C}$

参 考 文 献

- {1} Zienkiewicz O. C. and Cheung Y. K., The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics. (1967)
- {2} 华东水利学院, 弹性力学问题的有限元法. 水利电力出版社.
- {3} Severn R. T. and Taylor P. R., The Finite Element Method for Flexure of Slabs When Stress Distributions are Assumed. Proc. Inst. Civil Eng. 34(1966), 153.
- {4} Dunger R., Severn R. T. and Taylor P. R., Vibration of Plates and Shells Structures Using Triangular Finite Elements. J. Strain Analysis, 2, 1 (1967), 73.
- {5} Pian T. H. H., Derivation of Element Stiffness Matrices by Assumed Stress Distributions. J. Am. Inst. Aero. Astro. 2 (1964). July 1333-1336.
- {6} Spilker R. L., Chou S. C. and Orringer, O. Alternate Hybrid-Stressed Elements for Analysis of Multilayer Composite Plates. J. Comp. Mater. January, 11(1977), 51.
- {7} Timoshenko S., Theory of Plates and Shells. (1959)

**SOLUTION FOR ONE CLASS OF PLATE-COMPOSED STRUCTURES
BY HYBRID FINITE ELEMENT METHOD**

Zhang Shuang-yin