分层介质中快磁声波的传播

胡　文　瑞

（中国科学院力学研究所）

分层介质中阿尔文波的传播特征已有研究[1]，我们讨论分层介质中的快磁声波．对于一维问题，假设基态为

$$\boldsymbol{B}=(0,\,B_0(x),\,0),\quad \rho=\rho_0(x),\quad \boldsymbol{v}=0,\quad a=a_0\,(\text{常数}) \tag{1}$$

在直角坐标系中列出磁流体力学方程组为

$$\left.\begin{aligned}&\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\\&\rho\frac{d\boldsymbol{v}}{dt}=-a^2\nabla\rho+\frac{1}{4\pi}(\nabla\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{B}\\&\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\end{aligned}\right\} \tag{2}$$

讨论线性波的特征，作展开

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}_0+\boldsymbol{b},\quad \boldsymbol{v}=0+\boldsymbol{v}_1,\quad \rho=\rho_0+\rho_1 \tag{3}$$

基态的平衡关系要求总压守恒，即

$$\rho_0(x)a_0^2+\frac{B_0^2(x)}{8\pi}=P_T\,(\text{常数}) \tag{4}$$

不难推出，线性的快磁声波的方程为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=&\left(a_0^2+\frac{B^2}{8\pi\rho_0}\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}+\left(2a_0^2\frac{d\ln\rho_0}{dx}+\frac{3B_0}{4\pi\rho_0}\frac{dB_0}{dx}\right)\frac{\partial u_1}{\partial x}\\&+\left[\frac{a_0^2}{\rho_0}\frac{d^2\rho_0}{dx^2}+\frac{B_0}{4\pi\rho_0}\frac{d^2B_0}{dx^2}+\frac{1}{4\pi\rho_0}\left(\frac{dB_0}{dx}\right)^2\right]u_1\end{aligned} \tag{5}$$

利用基态关系式 (4)、上式可以简化为

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=&\,a_0^2\left(\frac{P_T+B_0^2/8\pi}{P_T-B_0^2/8\pi}\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2}\\&+\left[\frac{a_0^2}{P_T-B_0^2/8\pi}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{B_0^2}{8\pi}\right)\right]\frac{\partial u_1}{\partial x}\end{aligned} \tag{6}$$

当介质均匀时，磁场也均匀．线性波关系式 (5) 就退化为均匀场时的快磁声波方程

$$\frac{\partial^2u_1}{\partial t^2}=\left(a_0^2+\frac{B_0^2}{4\pi\rho_0}\right)\frac{\partial^2u_1}{\partial x^2} \tag{7}$$

它的解就是垂直于均匀场传播的快波，即

$$u_1=f\left(x\pm\sqrt{a_0^2+B_0^2/4\pi\rho_0}\,t\right) \tag{8}$$

讨论波动形式的解

本文于 1979 年 10 月收到．

$$u_1(x, t) = \tilde{u}(x)e^{i\omega t} \tag{9}$$

方程 (6) 可化为常微分方程

$$\left(P_T + \frac{B_0^2}{8\pi}\right)\frac{d^2\tilde{u}}{dx^2} + \frac{d}{dx}\left(\frac{B_0^2}{8\pi}\right)\frac{d\tilde{u}}{dx} + \left(\frac{\omega}{a_0}\right)^2\left(P_T - \frac{B_0^2}{8\pi}\right)\tilde{u} = 0 \tag{10}$$

利用 WKB 方法，可讨论短波近似[2]，这时

$$\tilde{u}(x) \propto e^{ikx}$$

代人式 (10)，即求出波的色散关系为

$$\left(P_T + \frac{B_0^2}{8\pi}\right)k^2 - i\frac{d}{dz}\left(\frac{B_0^2}{8\pi}\right)k - \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\left(P_T - \frac{B_0^2}{8\pi}\right) = 0$$

或者求出

$$k = \frac{i\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{B_0^2}{8\pi}\right) \pm \sqrt{4\left(\dfrac{\omega}{a}\right)^2\left[P_T^2 - \left(\dfrac{B_0^2}{8\pi}\right)^2\right] - \left[\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{B_0^2}{8\pi}\right)\right]^2}}{2\left(P_T + \dfrac{B_0^2}{8\pi}\right)} \tag{11}$$

式 (11) 表明，波动解要求根式为正，因而存在一个临界频率.

$$\omega_c = \frac{a}{2}\frac{\left|\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{B_0^2}{8\pi}\right)\right|}{\sqrt{P_T^2 - (B_0^2/8\pi)^2}} \tag{12}$$

当 $\omega > \omega_c$ 时存在快磁声波，而 $\omega < \omega_c$ 时则没有. 显然，当 $\left|\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{B_0^2}{8\pi}\right)\right|$ 较小时，即波在缓变磁场区域时较易传播，在速变区域中则只有高频波才能传过. 这是由于非均匀介质中波的折射效应. 但是，速变磁场中短波长近似失效，必须分析非局部解. 式 (11) 还表明，波的振幅在非均匀场中会变化. 波数 k 的虚部 k_i 等于

$$k_i = \frac{d}{dx}\left(\frac{B_0^2}{8\pi}\right)\Big/2\left(P_T + \frac{B_0^2}{8\pi}\right) \tag{13}$$

波传向强场时会衰减，传向弱场时会放大.

快磁声波在非均匀介质中的传播包含着许多物理过程，既包括密度的变化，也含有传播速度的变化. 在许多具体问题中不能用短波长近似，必须讨论式 (10) 的整体解. 如果作变换

$$\frac{dx}{d\xi} = P_T + \frac{B_0^2(x)}{8\pi}$$

则式 (10) 可以化为标准的 Sturm 方程

$$\frac{d^2\tilde{u}}{d\xi^2} + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2\left[P_T^2 - \left(\frac{B_0^2}{8\pi}\right)^2\right]\tilde{u} = 0 \tag{14}$$

因为 $P_T > B_0^2/8\pi$，所以式 (14) 的系数为正，代表一类色散波. 利用常系数的比较方程，可以定性地得到式 (14) 的波动性质.

为了描述非均匀磁场中波动传播的具体关系，特别是磁场变化较迅速时，可取下列初值

(i) $\tilde{u}(0) = 1, \quad \tilde{u}'(0) = 0$ (15)

(ii) $\tilde{u}(0) = 0, \quad \tilde{u}'(0) = 1$ (16)

然后，用数值计算方法求出微分方程式（10）的两组线性无关解．取典型的基态磁场分布

$$\frac{B_0^2}{8\pi}=P_H(e^x-1) \tag{17}$$

这种分布代表基态磁场由 0 迅速增加．总压与典型磁压 P_H 之比值取为

$$P_T/P_H=2,3,7 \tag{18}$$

它们分别相当于外场 $x=1$ 时的 $\beta=\rho_0a_0^2/P_H$ 值为

$$\beta=0.3,1.3,5.3 \tag{19}$$

代表外场 β 数小、中、大三种情况．特征频率

$$\frac{\omega l}{a_0}=30,10,5 \tag{20}$$

计算结果如图 1 所示．

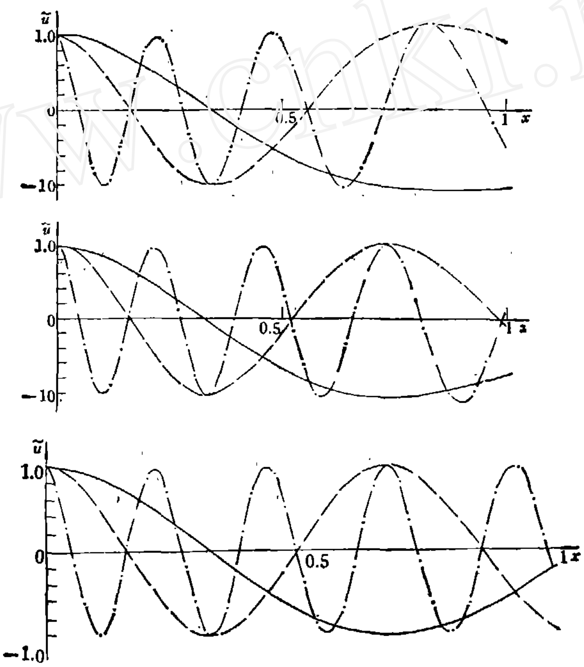

图 1　速变场（17）中快磁声波的特性，图上、中、下分别对应于 $\frac{P_T}{P_H}=2,3,7$；实线，虚线，点划线分别对应于 $\frac{\omega l}{a_0}=5,10,30$．

从物理上可以设想，当磁声波传向低密度区域时，波的振幅会放大；但传向强磁场区域时，会衰减．对于分层介质的基态（4），密度减小时磁场增强，反之亦然．所以，同时存在两个互相抵消的效应．图 1 的计算结果表明，这类色散波的振幅变化很小，低 β 时振幅几乎不增加，高 β 时振幅增加很少．还计算了其他形式的基态分布、也得到类似的结果．综合计算结果与前面短波长近似的结果，分层介质中快磁声波的幅度变化是缓慢的．

在天体物理，空间物理，以及一般磁流体力学中，磁场往往是不均匀的，讨论非均匀介质中快磁声波的传播特征，是重要的．

参　考　文　献

[1] Ferraro, V. C. A., Plumpton, C., An Introduction To Magneto-Fluid Mechanics, Oxford (1966).
[2] Stix, T. H., The Theory of Plasma Waves, McGraw-Hill (1962).

PROPAGATION OF FAST *MHD* WAVES IN STRATIFIED MEDIUM

Hu Wen-rui

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)

Abstract

In this paper, the propagation of fast magnetohydrodynamic waves in stratified medium is discussed. The wave equation for nonuniform magnetic field and non-uniform thermodynamic state is solved by numerical method. Results show that for several typical cases which are of interest in astrophysics and geophysics the wave amplitude varies slowly.