

轴向运动等离子体柱的磁流体力学稳定性

徐 复

(中国科学院力学研究所)

1978年, 尤班克 (H. Eubank) 等发表了在 PLT 上中性束加热的实验^[1], 其中提到在中性束注入时引起了等离子体旋转。如果把相速度的变化解释为等离子体环向运动引起的多普勒移动, 那末在某些条件下可得到旋转速度为 1×10^7 厘米/秒。1979年5月, 苏凯尔 (S. Suckewer) 等^[2]进一步测量了这个环向速度的径向分布。

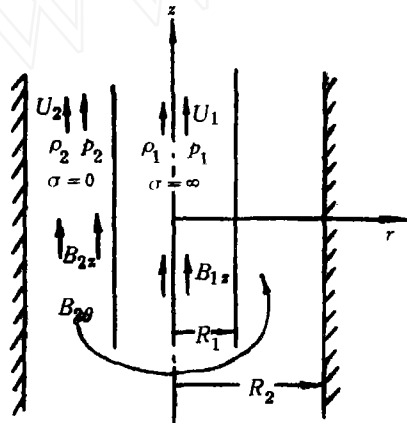


图1 座标系

托卡马克中的等离子体的快速环向旋转会不会引起新的磁流体力学不稳定性? 1980年, 工作^[3]采用平板片模型, 得到的结论是在 PLT 的运行条件下, 速度剪切流本身不会产生磁流体力学不稳定性。对这种看法, 我们将在另文中讨论。

本文把托卡马克等离子体简化为柱形等离子体, 环向运动相当于轴向运动。在 PLT 中, 高温旋转等离子体与导体壁之间有一段距离, 我们认为其中充满不导电的气体。高温等离子体表面上存在纵向与角向表面电流。我们将在这个模型下证明, 对 PLT 的运行参数, 轴向

运动的等离子体是稳定的, 即不出现 Kelvin-Helmholtz 不稳定性等宏观不稳定性。

我们采用如图 1 所示的模型。取柱坐标系 r, θ, z , 并假定

1. 在 $r < R_1$ 内为理想等离子体, 具有均匀轴向速度 U_1 , 均匀轴向磁场 B_{1z} 。
2. 在 $R_1 < r < R_2$ 为不导电理想气体, 具有均匀轴向速度 U_2 , 均匀轴向磁场 B_{2z} , 以及均匀轴向面电流 (在 $r=R_1$ 上) 所产生的角向磁场 $B_{2\theta} = B_{0\theta} R_1 / r$, 其中 $B_{0\theta}$ 为常数。
3. 两种介质都是不可压缩的。
4. 导体壁位于 $r=R_2$, 是理想导体。

在分界面 $r=R_1$ 上, 我们有切向磁场间断的条件和总压连续的条件。分界面 $r=R_1$ 既是电流面, 又是旋涡面 (假定 $U_1 \neq U_2$)。

假定介质中产生了小扰动, 小扰动量 \bar{q} 形如

$$\bar{q} = \bar{q}(r) \exp(\omega t + im\theta + ikz)$$

则理想导电等离子体的小扰动方程为:

$$\begin{cases} (\omega + iU_1 k) \tilde{u}_1 - \frac{B_{1z}}{4\pi\rho_1} ik \tilde{B}_1 = - \left(\frac{d}{dr}, \frac{im}{r}, ik \right) \frac{1}{\rho_1} \left(\tilde{P}_1 + \frac{B_{1z}}{4\pi} \tilde{B}_{1z} \right), \\ (\omega + iU_1 k) \tilde{B}_1 - ik B_{1z} \tilde{u}_1 = 0, \\ \nabla \cdot \tilde{u}_1 = 0, \\ \nabla \cdot \tilde{B}_1 = 0. \end{cases}$$

式中

$$\begin{aligned} \text{扰动速度 } \tilde{u}_1 &= (\tilde{u}_{1r}, \tilde{u}_{1\theta}, \tilde{u}_{1z}), \\ \text{扰动磁场 } \tilde{\mathbf{B}}_1 &= (\tilde{B}_{1r}, \tilde{B}_{1\theta}, \tilde{B}_{1z}). \end{aligned}$$

不导电气体的小扰动运动方程为:

$$\begin{cases} (\omega + iU_2 k) \tilde{u}_2 = - \left(\frac{d}{dr}, \frac{im}{r}, ik \right) \frac{1}{\rho_2} \tilde{P}_2, \\ \nabla \cdot \tilde{u}_2 = 0. \end{cases}$$

式中

$$\text{扰动速度 } \tilde{u}_2 = (\tilde{u}_{2r}, \tilde{u}_{2\theta}, \tilde{u}_{2z}).$$

由于在第 2 区中无电流, 扰动磁场 $\tilde{\mathbf{B}}_2$ 无旋

$$\tilde{\mathbf{B}}_2 = \nabla \varphi,$$

从磁通守恒 $\nabla \cdot \tilde{\mathbf{B}} = 0$,

给出 $\nabla^2 \varphi = 0$.

注意, 扰动磁场 $\tilde{\mathbf{B}}_2 = (\tilde{B}_{2r}, \tilde{B}_{2\theta}, \tilde{B}_{2z})$.

我们得到的第 1 区小扰动的解是

$$\begin{cases} \tilde{P}_1 + \frac{B_{1z}}{4\pi} \tilde{B}_{1z} = c_1 I_m(x) \exp(\omega t + im\theta + ikz), \\ \tilde{u}_1 = - \frac{c_1}{\rho_1 [\omega + iU_1 k + k^2 B_{1z}^2 / 4\pi \rho_1 (\omega + iU_1 k)]} \left[k I'_m(x), \frac{im}{r} I_m(x), \right. \\ \left. ik I_m(x) \right] \times \exp(\omega t + im\theta + ikz), \\ \tilde{B}_1 = \frac{ik B_{1z}}{\omega + iU_1 k} \tilde{u}_1. \end{cases}$$

式中, $x = kr$, c_1 为任意常数, $I_m(x)$ 为 m 阶的虚宗量贝塞尔函数。

在第 2 区中, 流体的扰动解是

$$\begin{cases} \tilde{P}_2 = c_2 \left[K_m(x) - \frac{K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I_m(x) \right] \exp(\omega t + im\theta + ikz), \\ \tilde{u}_{2r} = -c_2 \frac{k}{\rho_2 (\omega + iU_2 k)} \left[K'_m(x) - \frac{K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I'_m(x) \right] \\ \times \exp(\omega t + im\theta + ikz), \\ \tilde{u}_{2\theta} = -c_2 \frac{1}{\rho_2 (\omega + iU_2 k)} \frac{im}{r} \left[K_m(x) - \frac{K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I_m(x) \right] \\ \times \exp(\omega t + im\theta + ikz). \\ \tilde{u}_{2z} = -c_2 \frac{1}{\rho_2 (\omega + iU_2 k)} ik \left[K_m(x) - \frac{K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I_m(x) \right] \\ \times \exp(\omega t + im\theta + ikz). \end{cases}$$

磁场的扰动解是

$$\begin{cases} \tilde{B}_{2r} = \varphi_1 \left[k K'_m(x) - \frac{k K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I'_m(x) \right] \exp(\omega t + im\theta + ikz), \\ \tilde{B}_{2\theta} = \varphi_1 \frac{im}{r} \left[K_m(x) - \frac{K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I_m(x) \right] \exp(\omega t + im\theta + ikz), \\ \tilde{B}_{2z} = \varphi_1 \cdot ik \left[K_m(x) - \frac{K'_m(kR_2)}{I'_m(kR_2)} I_m(x) \right] \exp(\omega t + im\theta + ikz). \end{cases}$$

式中 c_2, φ_1 为两任意常数, $K_m(x)$ 为 m 阶的虚宗量贝塞尔函数。注意, 扰动解满足下面两个条件: 在 $r=R_2$,

$$\tilde{u}_{2r}=0, \quad \tilde{B}_{2r}=0.$$

这是固壁和理想导体壁所要求的。

下面讨论边界条件。

若扰动后的边界形状为

$$r=R_1+\tilde{R}\exp(\omega t+im\theta+ikz),$$

则
$$u_r|_{r=R_1}=\frac{dr}{dt}=(\omega+iUk)\tilde{R}\exp(\omega t+im\theta+ikz),$$

扰动面的法向为

$$n=\left(1, -\frac{im}{R_1}\frac{\tilde{u}_r}{\omega+iUk}, -ik\frac{\tilde{u}_r}{\omega+iUk}\right).$$

边界条件为: 在 $r=R_1$, 应满足

1. 运动学边界条件

$$\frac{\tilde{u}_{1r}}{\omega+iU_1k}=\frac{\tilde{u}_{2r}}{\omega+iU_2k},$$

2. 法向磁场连续

$$(B_{1z}-B_{2z})\left(-ik\frac{\tilde{u}_r}{\omega+iUk}\right)-B_{0\theta}\left(\frac{-im}{R_1}\frac{\tilde{u}_r}{\omega+iUk}\right)+(\tilde{B}_{1r}-\tilde{B}_{2r})=0.$$

3. 总压连续

$$\tilde{P}_1+\frac{B_{1z}}{4\pi}\tilde{B}_{1z}=\frac{\tilde{u}_r}{\omega+iUk}\frac{1}{4\pi}\frac{B_{0\theta}^2}{R_1}+\tilde{P}_2+\frac{B_{2z}}{4\pi}\tilde{B}_{2z}+\frac{B_{0\theta}}{4\pi}\tilde{B}_{2\theta}.$$

消去 φ_1, c_1, c_2 之后, 可得如下的色散关系:

$$\begin{aligned} & \rho_1\left[(\omega+iU_1k)^2+\frac{k^2B_{1z}^2}{4\pi\rho_1}\right]\left[\frac{K'_m(x_1)}{I'_m(x_1)}-\frac{K'_m(x_2)}{I'_m(x_2)}\right] \\ & =\frac{1}{4\pi}\frac{B_{0\theta}^2}{R_1}\frac{kI'_m(x_1)}{I_m(x_1)}\left[\frac{K'_m(x_1)}{I'_m(x_1)}-\frac{K'_m(x_2)}{I'_m(x_2)}\right] \\ & +\left[\rho_2(\omega+iU_2k)^2+\frac{1}{4\pi}\left(kB_{2z}+\frac{m}{R_1}B_{0\theta}\right)^2\right]\left[\frac{K_m(x_1)}{I_m(x_1)}-\frac{K'_m(x_2)}{I'_m(x_2)}\right], \end{aligned}$$

式中

$$x_1=kR_1, \quad x_2=kR_2.$$

我们只讨论 $x_2\rightarrow\infty$ 和 $B_{0\theta}=0$ 的特殊情况, 这时导体壁不存在, 轴向面电流为 0。色散方程化为

$$\rho_1\left[(\omega+iU_1k)^2+\frac{k^2B_{1z}^2}{4\pi\rho_1}\right]\frac{I_m(x_1)}{I'_m(x_1)}=\rho_2\left[(\omega+iU_2k)^2+\frac{k^2B_{2z}^2}{4\pi\rho_2}\right]\frac{K_m(x_1)}{K'_m(x_1)}.$$

注意, 扰动波数 k 还包含在 x_1 中。

若令

$$Q(x_1)=-\frac{I_m(x_1)}{I'_m(x_1)}\bigg/\frac{K_m(x_1)}{K'_m(x_1)},$$

则从色散关系解出

$$\omega = -\frac{\rho_1 U_1 Q(x_1) + \rho_2 U_2}{\rho_1 Q(x_1) + \rho_2} k i \pm k \sqrt{\frac{\rho_1 \rho_2 Q(x_1) (U_1 - U_2)^2}{[\rho_1 Q(x_1) + \rho_2]^2} - \frac{B_{1z}^2 Q(x_1) + B_{2z}^2}{4\pi [\rho_1 Q(x_1) + \rho_2]}}$$

由此得出稳定性判据为

$$\frac{\rho_1 \rho_2 Q(x_1) (U_1 - U_2)^2}{\rho_1 Q(x_1) + \rho_2} < \frac{B_{1z}^2 Q(x_1) + B_{2z}^2}{4\pi}$$

这个不等式的物理意义是：轴向速度差是不稳定因素，轴向磁场是稳定因素。稳定与否，取决于这两个因素的大小。

下面进行讨论：

1. 当 $Q(x_1) = 1$ ，这相当于平面情形，我们给出的稳定性判据是

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (U_1 - U_2)^2 < \frac{B_{1z}^2 + B_{2z}^2}{4\pi}$$

对于 PLT 的运行参数来说， $U_2 = 0$ ， $\rho_2 \ll \rho_1$ ，这个不等式是满足的，这就是说，宏观上是稳定的。这与实验相符。

2. 当 $Q(x_1) \neq 1$ ，出现柱形几何的影响。

由于扰动波长必须小于或等于大环的圆周，故有

$$x_1 \geq 1/A,$$

式中纵横比 $A = \text{大半径}/\text{小半径}$ 。对于短波扰动而言

$$x_1 \gg 1,$$

这时

$$Q(x_1) = 1 + \frac{1}{x_1} + \dots$$

于是不等式左方的因子

$$\frac{\rho_1 \rho_2 Q(x_1)}{\rho_1 Q(x_1) + \rho_2} = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \left[1 + \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \frac{1}{x} + \dots \right],$$

$$\text{右方} \quad \frac{B_{1z}^2 Q(x_1) + B_{2z}^2}{4\pi} = \frac{B_{1z}^2 + B_{2z}^2}{4\pi} + \frac{B_{1z}^2}{4\pi} \frac{1}{x_1} + \dots,$$

前面已指出，对于 PLT 的运行参数，有

$$\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (U_1 - U_2)^2 < \frac{B_{1z}^2 + B_{2z}^2}{4\pi}.$$

柱面几何对短波扰动的第一次修正，不稳定因素为

$$\frac{\rho_1 \rho_2^2}{(\rho_1 + \rho_2)^2} (U_1 - U_2)^2 \frac{1}{x_1},$$

稳定因素为

$$\frac{B_{1z}^2}{4\pi} \frac{1}{x_1},$$

若取 $B_{1z} \sim B_{2z}$ ， $\rho_2 \ll \rho_1$ ，则上面两式分别为

$$\left[\frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} (U_1 - U_2)^2 \right] \times \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \cdot \frac{1}{x_1}, \quad \left[\frac{B_{1z}^2 + B_{2z}^2}{4\pi} \right] \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{x_1},$$

上式右方的前两个因子分别大于左方的前两个因子。这就是说,柱面影响对短波扰动的第一次修正,使不稳定因素与稳定因素都增大,而稳定因素增加得多,从而出现致稳效应。

在 PLT 的运行参数下, $x_1 \gg 1$ 时, 仍然满足稳定性判据, 故旋转等离子体不出现 Kelvin-Helmholtz 不稳定性, 与实验相符。

导体壁的存在是一个稳定因素, 可以预料, $x_2 = kR_2$ 为有限时, 旋转等离子体应更加稳定。

参 考 文 献

- [1] H. Eubank et al., Plasma Phys. and Controlled Nucl. Fusion Research, Vol. 1, (1979), IAEA, p. 167.
- [2] S. Suckewer et al., PPPL-1542 UC-20d (1979), p. 1.
- [3] Y. Y. Lau & C. S. Liu, Phys. Fluids, 23, 939 (1980).

(编辑部 1981 年 2 月收稿)

MHD STABILITY OF A PLASMA COLUMN WITH AXIAL MOTION

XU Fu

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

(上接144页)

秦运文、李有宜、姚良骅同志和我们做过有益的讨论, 参加实验运行的还有张其英、李朝成、李德明、夏玉碧同志, 在此一并致谢。

参 考 文 献

- [1] 曹家麟等, 核聚变, 1, 29(1980).
- [2] 曹家麟等, J. Nucl. Mater., 93/94, 343(1980).
- [3] 杨式坤等, 微环质谱测量及放电清洗, 1980年, 未发表.
- [4] T. Hirayama, J. Nucl. Mater., 76/77, 452(1978).
- [5] R. T. Jacobsen, Plasma Phys., 17, 547(1975).
- [6] J. D. Strachan, Nucl. Fusion, 16, 743(1976).
- [7] 郑永真等, 核聚变, 2, 24 (1981).
- [8] T. H. Hutchinson, Plasma Phys., 18, 246 (1976).
- [9] B. A. Cimonov, Nucl. Fusion, 1, 313(1962).
- [10] G. M. McCracken, Nucl. Fusion, 19, 889(1979).
- [11] G. M. McCracken, J. Nucl. Mater., 93/94, 3(1980).

(编辑部 1981 年 1 月收稿)

EXPERIMENTS ON THE MINI-TORUS

DUAN Wenxin CHEN Jiefu YANG Shikun CAO Jialin

ABSTRACT

Adjustments and experimental results are described for a small tokamak, the Mini-Torus. Disruptive instabilities of the discharge have been observed. Unipolar arcs are investigated with surface probes.