

二维裂纹体的弹塑性有限元解*

张 晓 堤

(中国科学院力学研究所)

由于数学上的困难,可用解析方法得到弹塑性裂纹体全场解的问题极少。因此,有限元法已成为解决这类问题的有力手段。鉴于〔1〕已给出了平面应力状态的基本方程,本文则只给出平面应变弹塑性问题基本方程推导的最终结果以及程序框图,最后给出一个三点弯曲裂纹试样直到韧带全面屈服的解。该解与实验符合较好。

符 号

应力增量列阵	$\{d\sigma\} = \{d\sigma_x, d\sigma_y, d\sigma_z, d\sqrt{2}\tau_{xy}\}^T$
应力列阵	$\{\sigma\} = \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \sqrt{2}\tau_{xy}\}^T$
塑性应变增量列阵	$\{de^p\} = \{de_x^p, de_y^p, de_z^p, d\gamma_{xy}^p/\sqrt{2}\}^T$
弹性应变增量列阵	$\{de^e\} = \{de_x^e, de_y^e, de_z^e, d\gamma_{xy}^e/\sqrt{2}\}^T$
全应变增量列阵	$\{de\} = \{de^e\} + \{de^p\}$
全应变列阵	$\{e\} = \{e_x, e_y, e_z, \gamma_{xy}/\sqrt{2}\}^T$
应力偏量列阵	$\{\sigma_D\}$
结点载荷及其增量	$\{P\}, \{dP\}$
结点位移及其增量	$\{U\}, \{dU\}$
等效应力	$\bar{\sigma}$
等效塑性应变	$\bar{\epsilon}_p$
硬化材料的切线模量	H
材料弹性矩阵	$[D]$
材料弹塑性矩阵	$[F]$
四阶单位矩阵	$[I_4]$
结构的弹性刚度矩阵	$[K]$
屈服应力	σ_{ys}
弹性剪切模量	G

1、平面应变状态的基本方程 众所周知,与弹性理论中两种平面问题归结为同一基本方程不同,在弹塑性平面应变问题中对弹性与塑性变形而论之都不再是平面问题,所以它的基本方程与平面应力情况不同。本文对幂乘硬化材料采用 Prandtl-Reuss 理论和 Mises 屈服准则,在平面应变条件 $de_z^e = -de_x^e$ 下导出了增量形式的应力应变关系

$$\{d\sigma\} = [F]\{de\} \quad (1)$$

* 1980年2月29日收到。

$$\text{其中} \quad [F] = \left([I_s] - \frac{2G}{H+3G} \{S\} \{S\}^T \right) [D] \quad (2)$$

$$\{s\} = \frac{3}{2} \frac{1}{\sigma} \{\sigma_D\}$$

式(2)表明, $[F]$ 不仅取决于材料的当前应力水平而且还与其塑性变形历史有关, 所以方程(1)是非线性的.

2、解题方法和程序框图 本文采用常应变三角元和初应力法求解(1). 引入初应力增量

$$\{d\sigma^0\} = ([F] - [D]) \{d\epsilon\} = -d\alpha \{s\} \quad (3)$$

$$\text{其中} \quad d\alpha = \frac{2G}{H+3G} \{S\}^T [D] \{d\epsilon\} \quad (4)$$

称为塑性系数. 借助单元应变矩阵 $[B]$, 初载荷增量可写为

$$\{dp^0\} = - \sum \int [B]^T \{d\sigma^0\} dv \quad (5)$$

被分割为有限单元的结构平衡方程为

$$[K] \{dU\} = \{dp\} + \{dp^0\} \quad (6)$$

由(3)(4)(5)可知, 初载荷增量与本增量加载在塑性元中引起的全应变增量 $\{d\epsilon\}$ 有关, 而后者正是待求的, 故方程(6)须迭代求解. 为消除迭代误差的积累, 在每步增量加载时均附加一个不平衡校正项

$$\{P_{cor}\}^i = \{P\}^{i-1} - \sum [B]^T \{\sigma\}^{i-1} \quad (7)$$

这样, 对第 j 载荷增量的第 i 步迭代可写出

$$[K] \{dU\}_i = \{dp\}_i + \{dp^0\}_i + \{p_{cor}\}_i \quad (8)$$

在某载荷增量施加之前为弹性而后进入塑性的单元称为过渡元. 为避免由于材料曲线的切线模量在弹塑性转折点不连续而引进误差, 本文在求解(8)时采用山田法^[2] 确定一个载荷增量缩减系数 γ_{min} , 使在 $\gamma_{min} \{dp\}_i$ 作用下只有一个刚好屈服的过渡元. 具体的解题步骤由 367 页程序框图给出.

3、一个韧带全面屈服时的三点弯曲试样的解 本文计算了一个材料为 18MnMoNiCr 钢的三点弯曲试样([3]中的 T102-6 试样)在平面应变条件下大范围屈服时的解. 其几何尺寸见图 1. 材料曲线(图 2)是根据光滑拉伸实验数据拟合的. 试样的一半被分为 342 个单元 202 个结点. 裂端附近最小单元尺寸为 0.125mm, 约为 $a/250$. 最大实验载荷 $P_{max} = 2830\text{kg}$. 试样有一个单元开始屈服的载荷 $P_y = 0.106 P_{max}$. 从 P_y 到 P_{max} 被分为 136 个载荷增量. 迭代求解时要求 $\Delta\alpha$ 的相对误差 $ER \leq 10^{-4}$, 当 $P > 0.762 P_{max}$ 后改为 $ER \leq 10^{-3}$.

图 3—10 给出了 $0.755 P_{max}$ 和 P_{max} 两个不同载荷下的各应力应变分量、等效应力、等效塑性应变以及三轴张力在韧带上的分布. 从这些图上可以看出: 1) 在裂纹顶端有明显的应力集中和应变集中. 这与现有的许多实验和计算结果一致. 2) 韧带中部存在一个弹性核(图 7 曲线位于横轴以下的部分), 各应力应变分量, 包括三轴应力通过弹性核区域反号, 并且分布规律有明显改变. 直到开裂弹性核仍存在. 3) 图 8 表明由显微硬度试验换算的 ϵ_p 值与计算结果基本一致. 图 11 给出的计算的载荷—加载点位移曲线

程序框图

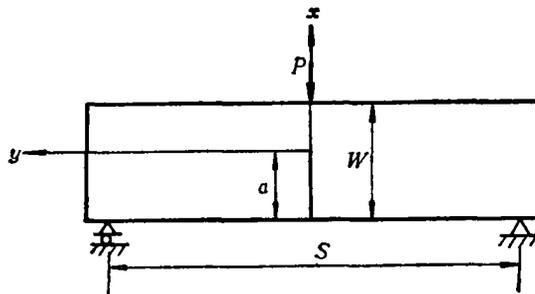
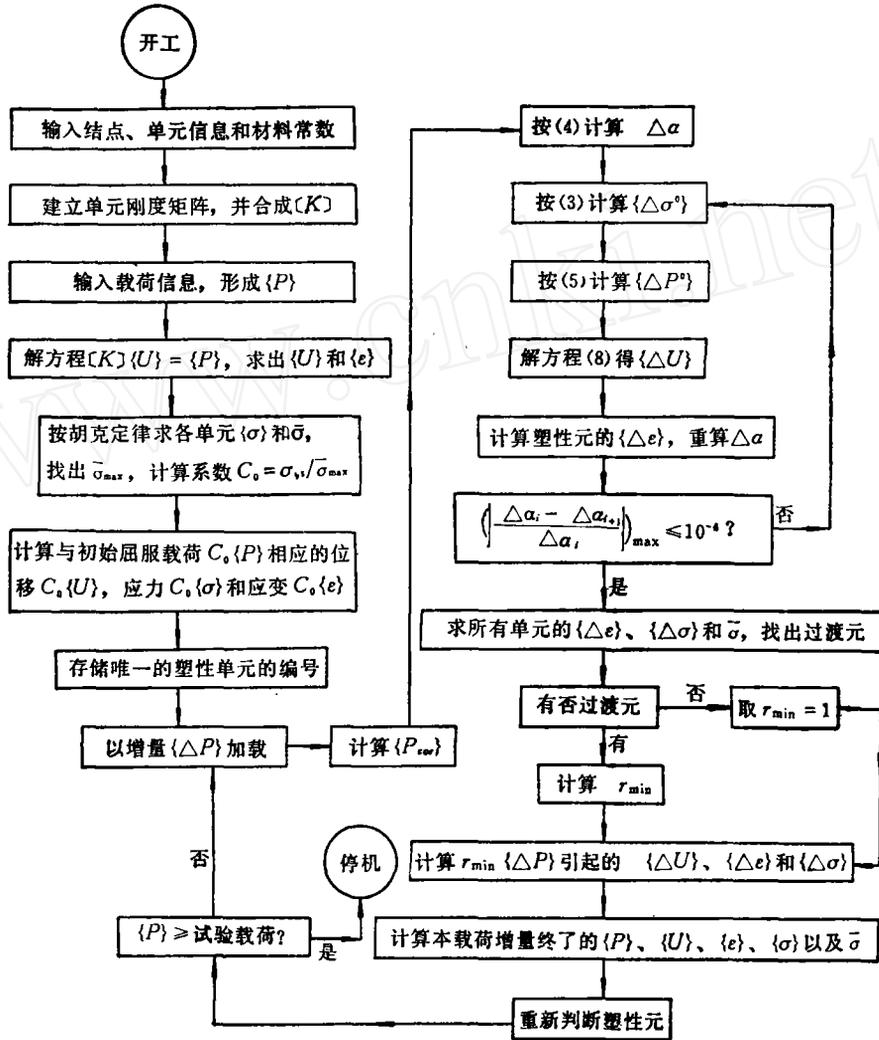


图 1 三点弯曲试样

$a/W = 0.679$, $S/W = 4$, $W = 45.09\text{mm}$, 厚度 $B = 29.99\text{mm}$.

与实验曲线（其中包含了平面应力表面层的影响）基本一致。图 12 是塑性应变能随载荷的变化情况。当 $P = P_{max}$ 时塑性应变能约占总应变能的 80%，而此时塑性区的体积却不超过总体积的 4%。最后在图 13 上给出三个不同载荷下的塑性区形状。最大载荷时的塑性区与用 Fry 试剂腐蚀得到的滑移线场轮廓吻合很好。

感谢冶金部北京钢铁研究院邓技生、姚蓓同志对本工作给予的协助。

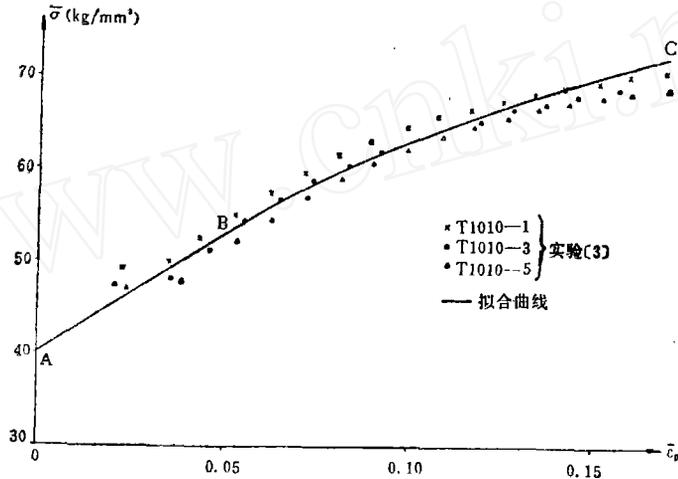


图 2 18MnMoNiCr 低碳钢单轴拉伸材料曲线 BC 段的拟合函数 $\bar{\sigma} = 112.5 (\bar{\epsilon}_p)^{0.261}$
 AB 段采用 BC 段拟合函数在 B 点的切线近似： $\bar{\sigma} = \sigma_{ys} + 260.8 \bar{\epsilon}_p$ $\sigma_{ys} = 40 \text{ kg/mm}^2$

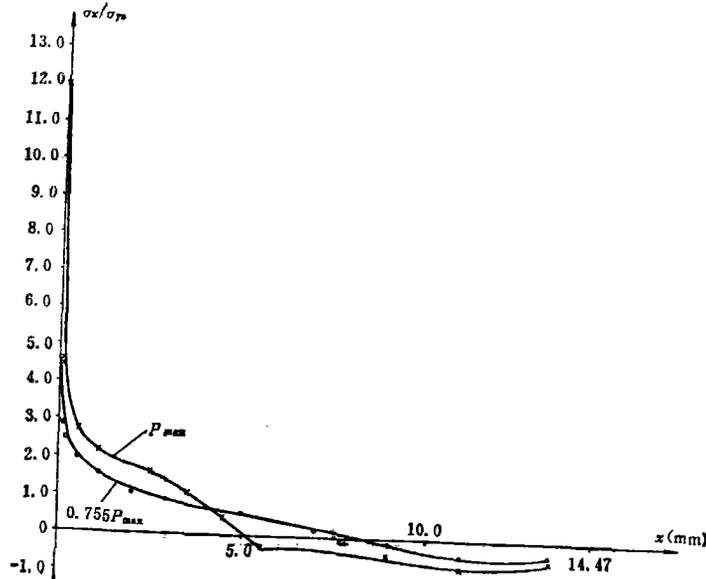


图 3 σ_x/σ_{ys} 在韧带上的分布

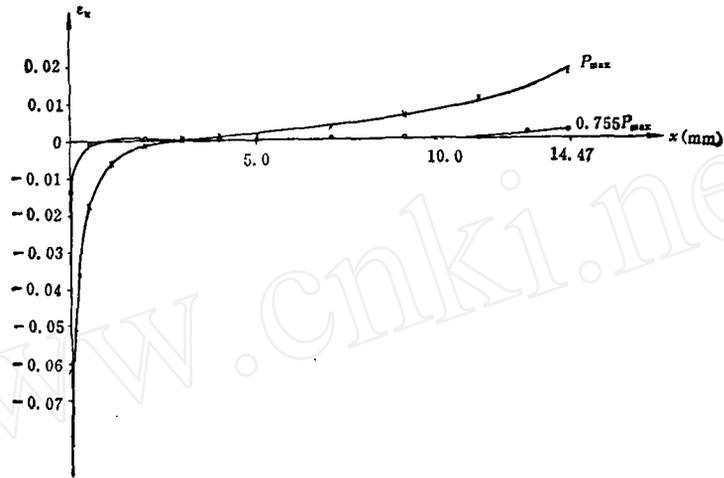


图 4 ϵ_x 在韧带上的分布

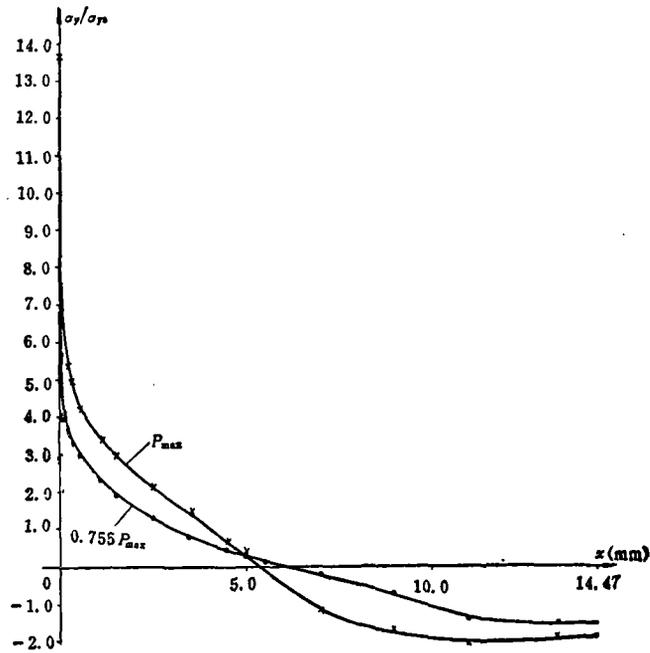
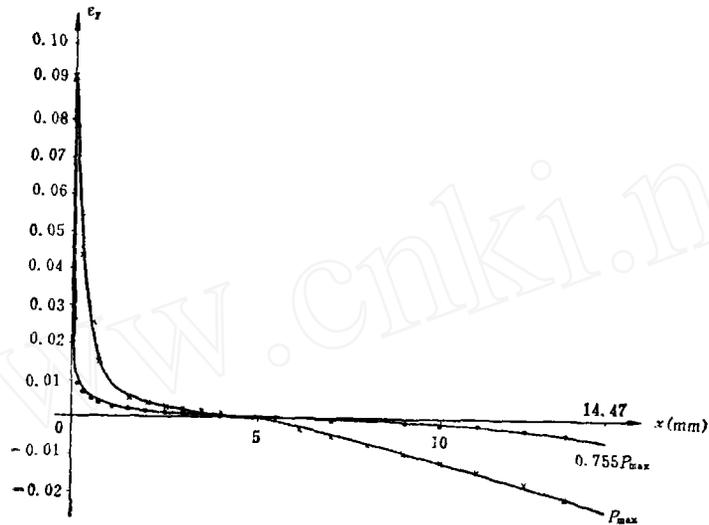
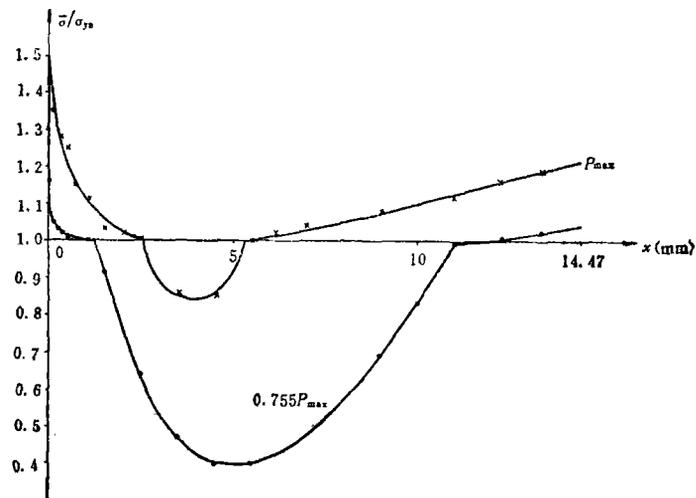


图 5 σ_y/σ_{ys} 在韧带上的分布

图6 ϵ_x 在韧带上的分布图7 $\bar{\sigma}/\sigma_{ys}$ 在韧带上的分布

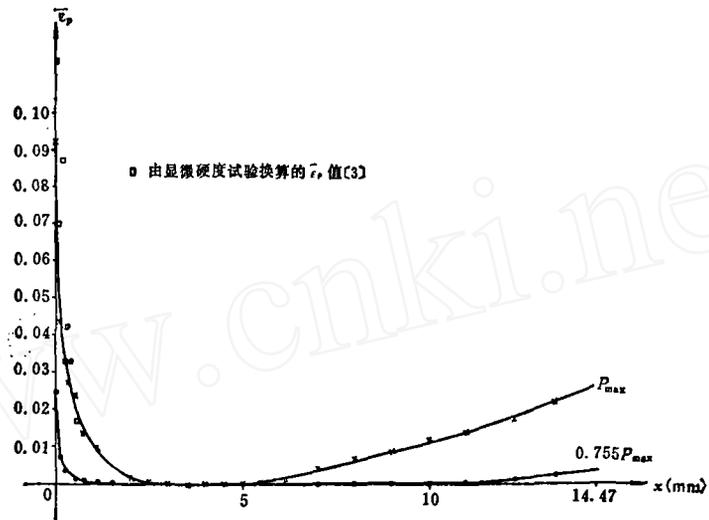


图 8 $\bar{\epsilon}_p$ 在韧带上的分布

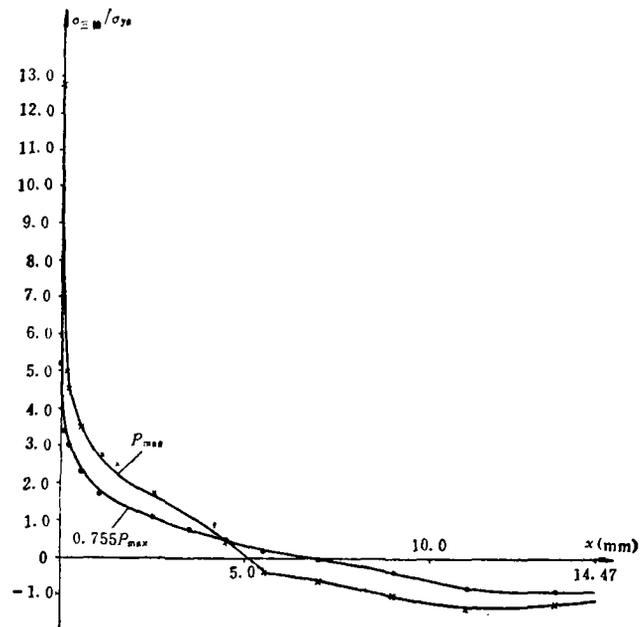


图 9 $\sigma_{\text{轴}}/\sigma_{ys}$ 在韧带上的分布

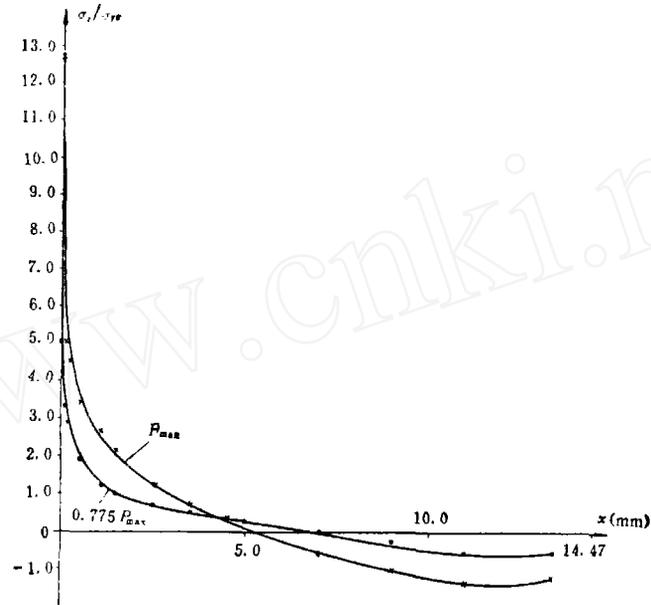


图 10 σ_z/σ_{ys} 在韧带上的分布

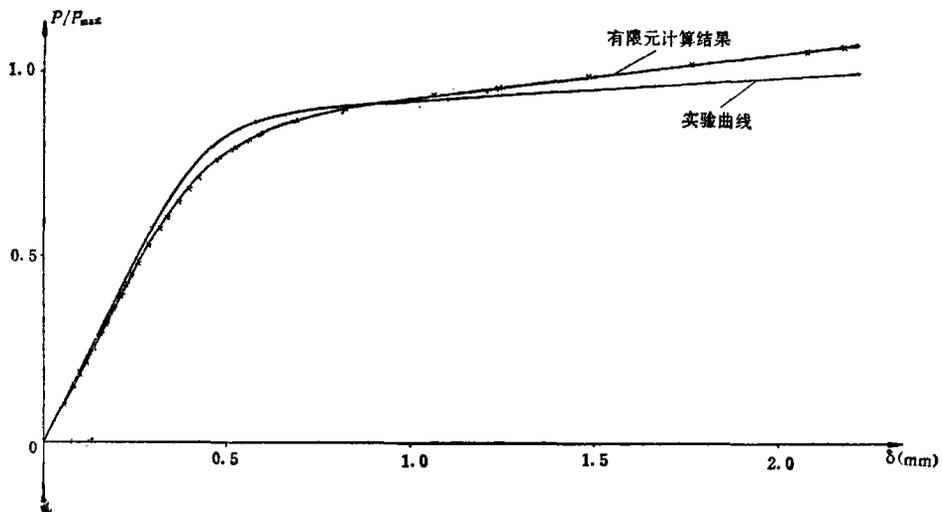


图 11 T102-6试样的载荷—加载点位移曲线

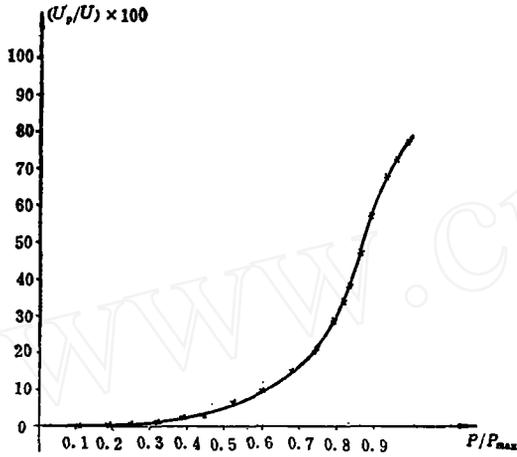


图 12 载荷—塑性变形能曲线
 U 总变形能
 U_p 塑性变形能

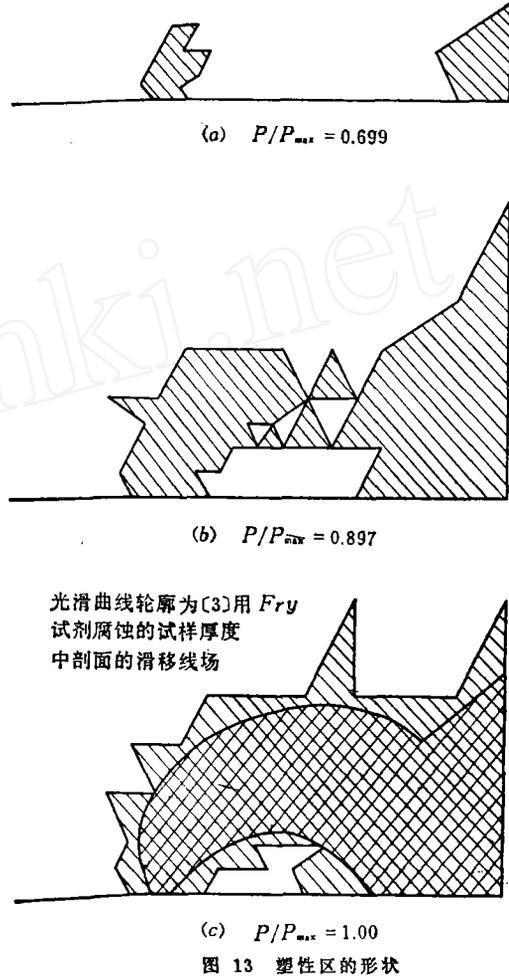


图 13 塑性区的形状

参 考 文 献

- (1) 欧阳邈, 用增量法求解非线性断裂力学问题, 北京断裂力学交流会第二次会议文集 (1977), 277—286.
- (2) Yamada Y. and Yoshimura N., Plastic Stress-Strain Matrix and Its Application for the Solution of Elastic-Plastic Problems by the Finite Element Method, Int. J. of Mech. Sci., 10, 5(1968), 343.
- (3) 邓拔生、陈旒, 裂纹顶端应变与应力的研究, 金属学报, 第 14 卷, 第 3 期, 239—245 页.

AN ELASTIC-PLASTIC SOLUTION FOR
 TWO-DIMENSIONAL CRACKED BODY WITH
 FINITE ELEMENT METHOD

Zhang Xia-ti

(Institute of Mechanics, Academia Sinica)